VALTER OLARIU, VALERIU PREPELIȚĂ

TEORIA DISTRIBUȚIILOR, FUNCȚII COMPLEXE ȘI APLICAȚII

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
București, 1986

DISTRIBUȚII PERIODICE

1. Funcții continue periodice. Funcții indefinit derivabile periodice

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deci $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, unde $f_1 = \operatorname{Re} f$ este partea reală a lui f iar $f_2 = \operatorname{Im} f$ este partea imaginară a aceleiași funcții f. Vom spune că f este continuă pe $\mathbb{R}$ și vom scrie $f \in C(\mathbb{R})$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ astfel încît să avem

$$d'(f(y), f(x)) = |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

pentru orice $y \in \mathbb{R}$ care verifică $d(y, x) < \delta$, $x \in \mathbb{R}$ fiind arbitrar (s-a notat prin d' distanța din spațiul metric $(\mathbb{C}, d')$ iar prin d, distanța din spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$ (vezi A. M*. cap. II, pct. 1). Fie $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$; funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ va fi periodică cu perioada p dacă avem

$$f(x + p) = f(x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Dacă (1) se verifică, se deduce

$$f(x + 2p) = f[(x + p) + p] = f(x + p) = f(x),$$
$$f(x - p) = f[(x - p) + p] = f(x)$$

ceea ce înseamnă că dacă f este periodică cu perioada p, f va fi de asemeni periodică, cu perioada $2p$ sau cu perioada $-p$; mai general, din aproape în aproape se arată că dacă f este periodică cu perioda p, ea va fi periodică și cu perioada kp, $k \in \mathbb{Z}$. În plus, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este periodică cu perioada $p \neq 0$, atunci funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$g(x) = f\left(\frac{|p|}{2\pi} x\right)$$

va fi periodică cu perioada 2π; într-adevăr,

$$g(x + 2\pi) = f\left[\frac{|p|}{2\pi}(x + 2\pi)\right] = f\left(\frac{|p|}{2\pi} x + |p|\right) = f\left(\frac{|p|}{2\pi} x\right) = g(x)$$

*) În această carte prin A.M. se înțelege manualul de Analiză matematică elaborat de A. Halanay, V. Olariu și S. Turbatu apărut la Editura Didactică și Pedagogică, București 1983.

deoarece $|p|$ este perioadă pentru f odată cu p. De aceea, fără a se micșora generalitatea, se poate presupune $p = 2\pi$, ipoteză care va fi utilizată permanent în viitor.

Definiția 1. *Prin* $\mathcal{C}$ *se va înțelege mulțimea funcțiilor continue pe* $\mathbb{R}$ *și periodice iar prin* $\mathcal{Z}$ *se va înțelege mulțimea funcțiilor indefinit derivabile pe* $\mathbb{R}$, *periodice.*

Evident $\mathcal{Z} \subset \mathcal{C}$ iar $\mathcal{Z} \neq \mathcal{C}$, deoarece, de exemplu avem $f \in \mathcal{C}$ și $f \notin \mathcal{Z}$ dacă $f(x) = |\sin x|$ (această funcție nu este derivabilă în punctele $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ deci nu este nici indefinit derivabilă); funcțiile $\sin(nx)$, $\cos(nx)$, $\operatorname{cis}(nx) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ vor fi evident funcții periodice indefinit derivabile.

Mulțimea $\mathcal{C}$ este un spațiu vectorial complex în care operația de înmulțire cu scalari și de adunare a elementelor din $\mathcal{C}$ se definesc în mod natural prin

$$(af)(x) = af(x),\ a \in \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad f, g \in \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}$$

iar $(af)(x + p) = af(x + p) = af(x) = (af)(x)$ și $(f + g)(x + p) = f(x + p) + g(x + p) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$; deci $af \in \mathcal{C}$, $f + g \in \mathcal{C}$. Celelalte axiome ale spațiilor vectoriale se verifică de asemenea imediat. De remarcat că $\mathcal{C}$ are de fapt o structură de algebră, deoarece dacă f, $g \in \mathcal{C}$, definind produsul fg prin

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

avem evident $fg \in \mathcal{C}$ deoarece $(fg)(x + p) = f(x + p)(g(x + p) = f(x)g(x) = (fg)(x)$. În această algebră (comutativă) unitatea va fi funcția $e(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $f \in \mathcal{C}$ iar f este derivabilă în orice punct din $\mathbb{R}$, vom nota $f'(x) = (\mathrm{D}f)(x) = \mathrm{D}f(x)$ și este ușor de verificat periodicitatea (cu perioada p) a funcției $g = \mathrm{D}f$; într-adevăr,

$$g(x + p) = f'(x + p) = \mathrm{D}f(x + p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + p + h) - f(x + p)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

În mod analog, dacă există derivatele $f'' = \mathrm{D}^2 f, \ldots, f^{(k)} = \mathrm{D}^k f [= (\mathrm{D}^{k-1} f)']$ ele vor fi periodice; de aceea dacă $f \in \mathcal{Z}$, f va admite derivate de orice ordin în orice punct $x \in \mathbb{R}$ iar toate aceste derivate vor fi periodice cu perioada p, ceea ce înseamnă că $\mathcal{Z}$ va fi un subspațiu al lui $\mathcal{C}$ în sensul spațiilor vectoriale (adică dacă u, v sînt elemente oarecare din $\mathcal{Z}$, pentru orice a, $b \in \mathbb{C}$ avem $au + bv \in \mathcal{Z}$, iar în $\mathcal{Z}$ vor fi valabile axiomele spațiului vectorial).

Este uşor de stabilit că $\mathcal{C}$ este un spaţiu vectorial normat, definind norma elementului $f \in \mathcal{C}$ prin

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,\, 2\pi]} |f(x)| \tag{2}$$

(evident în loc de intervalul $[0,2\pi]$ se poate considera orice alt interval $[\alpha,\ \alpha + 2\pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, avînd lungimea egală cu 2π); faptul că (2) defineşte o normă se realizează exact la fel ca în A.M. pag. 141.

Teorema 1. *Spaţiul vectorial $\mathcal{C}$ înzestrat cu norma (2) este un spaţiu Banach.*

Deoarece un spaţiu Banach este un spaţiu vectorial normat şi complet teorema va fi demonstrată dacă arătăm că şirurile fundamentale în $\mathcal{C}$ (distanţa în $\mathcal{C}$ fiind definită cu ajutorul normei (2)), sînt convergente către elemente din $\mathcal{C}$. Fie deci $(f_n)_{n \geqslant 1}$ un şir din $\mathcal{C}$ considerat ca spaţiu metric în raport cu distanţa

$$d(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\|;$$

cu alte cuvinte, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît să avem $d(f_n, f_m) < \varepsilon$, dacă $n > m \geqslant N$. Deci, avem

$$\sup_{x \in [0,\, 2\pi]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ dacă } n > m \geqslant N;$$

aceasta înseamnă că pentru orice $x \in [0,2\,\pi]$ avem $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ pentru $n > m \geqslant N$, ceea ce arată că şirul de funcţii continue $(f_n)_{n \geqslant 1}$ este uniform convergent în intervalul $[0,\ 2\pi]$. Rezultă că funcţia limită $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ va fi continuă în $[0,\ 2\pi]$ şi deoarece f_n sînt funcţii periodice, cu perioada 2π, şi f va avea aceeaşi proprietate $[f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x + 2\pi) = f(x + 2\pi),\ x \in \mathbb{R}]$

Observaţia 1. *Teorema 1 arată că spaţiul metric $(\mathcal{C}, d)$, $d(f, g) = \|f - g\|$, norma fiind definită prin (2), este un spaţiu metric complet.*

Mulţimea $\mathcal{C}$ definită anterior conţine un număr suficient de mare de elemente; astfel utilizînd rezultatul de la pag. 111 din A.M. orice două şiruri $(a_n)_{n \geqslant 0}$, $(b_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$ verificînd condiţia

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty \tag{3}$$

vor defini elemente din $\mathcal{C}$ scriind

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \tag{3'}$$

deoarece din (3) se deduce că seria (3') este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ deci va defini o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$ (cu valori în $\mathbb{C}$) care este evident periodică cu perioada 2π.

În cazul mulțimii $\mathfrak{L}$ a funcțiilor periodice indefinit derivabile lucrurile sînt mai complicate dacă avem în vedere lema 2 din A.M. pag. 114; această lemă arată că nu orice serie trigonometrică (3') poate fi indefinit derivabilă oricare ar fi șirurile $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$, deci teorema 1 nu poate fi extinsă direct de la spațiul $\mathfrak{C}$ la spațiul $\mathfrak{L}$. Extensia se poate realiza utilizînd noțiunea de *spațiu vectorial numărabil normat* în care rolul principal îl joacă noțiunea de *seminormă*.

Definiția 2. *Fie X un spațiu vectorial complex; o aplicație*

$$n_k : X \to \mathbb{R}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

va fi numită seminormă pe X dacă se verifică următoarele proprietăți:

I: $n_k(f) \geqslant 0$, *pentru orice* $f \in X$;

II: $n_k(af) = |a| n_k(f)$, *pentru orice* $f \in X$ *și orice* $a \in \mathbb{C}$;

III: $n_k(f + g) \leqslant n_k(f) + n_k(g)$, *pentru orice* $f, g \in X$.

Observația 2. *O seminormă definită pe spațiul vectorial X va fi o normă în același spațiu dacă în plus din $n_k(f) = 0$ se deduce $f = 0$.*

Teorema 2. *Dacă în spațiul vectorial X s-a definit un șir $(n_k)_{k\geqslant 1}$ de seminorme cu proprietatea*

$$n_k(f) = 0, \; k = 1, 2, \ldots . \text{ implică } f = 0,$$

atunci introducînd distanța dintre elementele $f, g \in X$ prin

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k(f - g)}{2^k[1 + n_k(f - g)]} \tag{4}$$

spațiul (X, d) devine un spațiu metric.

Trebuie arătat că (4) definește o distanță în X; or, seria din (4) este convergentă fiind majorată de seria geometrică $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ (deoarece din $n_k(h) \geqslant 0$ și $1 + n_k(h) > n_k(h)$, se deduce $\frac{n_k(h)}{1 + n_k(h)} < 1$) iar în plus $d(f, g) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Prin urmare $d : X \times X \to [0, 1[$. Dacă $f = g$ avem $n_k(f - g) = 0$, deci $d(f, g) = 0$ și reciproc, dacă $d(f,g) = 0$, seria din (4) avînd toți termenii pozitivi, nu va avea suma nulă decît dacă $n_k(f - g) = 0$ $k = 1, 2, \ldots$ ceea ce potrivit ipotezei antrenează $f - g = 0$, deci $f = g$. Evident $d(g, f) = d(f, g)$ (deoarece $n_k(g - f) = n_k(f - g)$, $k = 1, 2, \ldots$) iar inegalitatea triunghiului rezultă imediat din inegalitatea $\frac{a}{1 + a} \leqslant \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c}$ valabilă pentru orice $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ cu $a \leqslant b + c$, înlocuind a, b, c prin $n_k(f - g)$, $n_k(f - h)$ și $n_k(h - g)$ respectiv și însumînd după înmulțire cu $\frac{1}{2^k}$.

Definiția 3. *În condițiile teoremei 2, dacă spațiul metric* (X, d) *este complet, atunci* X *se numește spațiu Fréchet.*

Teorema 3. *Spațiul* $\mathfrak{D}$ *al funcțiilor periodice indefinit derivabile este un spațiu Fréchet, dacă în* $\mathfrak{D}$ *se definesc seminormele*

$$n_k(f) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |\mathrm{D}^k f(x)|,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots . \tag{5}$$

Anterior s-a arătat că $\mathfrak{D}$ este un spațiu vectorial complex ; evident, prin (5) se definește o familie numărabilă de seminorme în $\mathfrak{D}$, deoarece condițiile I, II și III din definiția 2 se verifică. În plus, pentru $k = 1$ se deduce din $n_0(f) = 0$ condiția $f(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi]$ deci $f = 0$. Mai rămîne de arătat că în metrica

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_{k-1}(f-g)}{2^k\,[1 + n_{k-1}(f-g)]} \tag{6}$$

(dedusă din (4) prin înlocuirea lui k prin $k-1$) orice șir fundamental din $\mathfrak{D}$ converge către un element din $\mathfrak{D}$. Pentru un $k \in \mathbb{N}$ și un $\varepsilon > 0$, fie $N \in \mathbb{N}$ suficient de mare astfel încît pentru $n,\ m \geqslant N$ să avem

$$d(f_n, f_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{2^{k-1}[1 + \|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|]} < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}};$$

atunci, pentru $n,\ m \geqslant N$ rezultă

$$\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\| = 2^k \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{2} < 2^k \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{1 + \|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|} <$$

$$< 2^{k+2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{2^{k+1}(1 + \|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|)} = 2^{k+2} d(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

(s-a folosit faptul că $d(f_n, f_m) < 1$ ceea ce face să avem $\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\| < 1$, adică $\frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{2} < \frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{1 + \|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}$). În baza raționamentului din demonstrația teoremei 1 rezultă existența unui element $f \in \mathfrak{D}$ astfel încît $d(f_n, f) < \varepsilon$ pentru toți $n \geqslant N$.

În baza teoremei 3 este naturală următoarea definiție :

Definiția 4. *Un șir* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *din* $\mathfrak{D}$ *va converge către* $f \in \mathfrak{D}$, *în sensul convergenței din* $\mathfrak{D}$ *dacă pentru orice* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *avem*

$$|\mathrm{D}^k f_n(x) - \mathrm{D}^k f(x)| \to 0 (n \to \infty) \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \tag{7}$$

și vom scrie $f_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} f$.

Evident, condiția (7) se transcrie astfel : șirul $(f_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathfrak{D}$ va converge către $f \in \mathfrak{D}$ (deci $f_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} f$) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît să avem

$$\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f\| < \varepsilon \text{ dacă } n \geqslant N \quad ,\forall\ k \in \mathbb{N} \tag{8}$$

Teorema 4. *Şirul* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *din* $\mathfrak{D}$ *converge către* $f \in \mathfrak{D}$ *dacă şi numai dacă acest şir converge către* f *în sensul distanţei (6) iar un şir* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *din* $\mathfrak{D}$ *este fundamental în* $\mathfrak{D}$ *dacă şi numai dacă acest şir este fundamental în sensul convergenţei definite prin distanţa (6).*

Teorema 3 arată că dacă şirul $(f_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathfrak{D}$ este astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ dacă $n > m \geqslant N$, atunci există $f \in \mathfrak{D}$ astfel încît $f_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} f$; o simplă modificare a acestei demonstraţii arată că dacă $d(f_n, f) < \varepsilon$ pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$, atunci $f_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} f$. Reciproc, dacă $f_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} f$ sau dacă $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este un şir fundamental din $\mathfrak{D}$, atunci avem $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ respectiv $d(f_n, f_m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$; vom realiza demonstraţia pentru şirurile $(f_n)_{n\geqslant 1}$ fundamentale din $\mathfrak{D}$, în celălalt caz demonstraţia fiind similară. Fie $\varepsilon > 0$ dat, $k_0 \in \mathbb{N}$ suficient de mare pentru a avea $\frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$ şi $N \in \mathbb{N}$ astfel încît să avem

$$\|\mathrm{D}^j f_n - \mathrm{D}^j f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j = 0, 1, \ldots, k_0, \; n > m \geqslant N;$$

calculînd $d(f_n, f_m)$ rezultă

$$d(f_n, f_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{2^{k+1}(1 + \|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|)} = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{2^{k+1}(1 + \|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|)} +$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|}{2^{k+1}(1 + \|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\|)}$$

şi dacă $n, m \geqslant N$ se deduce, deoarece $1 + \|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f_m\| \geqslant 1$,

$$d(f_n, f_m) < \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{k+1}} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{k_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Un rezultat important relativ la spaţiile de funcţii periodice $\mathfrak{C}$ şi $\mathfrak{D}$ este dat de

Teorema 5. *Spaţiul* $\mathfrak{D}$ *este dens în spaţiul* $\mathfrak{C}$ *în sensul metricii uniforme (2) (cu alte cuvinte, pentru orice* $f \in \mathfrak{C}$ *există un şir* (φ_n) *din* P *astfel încît* $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *convergenţa fiind uniformă).*

Pentru demonstraţie se poate utiliza teorema lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcţiilor continue pe un compact prin polinoame algebrice (vezi A.M. pag. 275–277); deci dacă $g \in C^0(D)$, $D \subset \mathbb{C}$, D compact, există şirul $(p_n)_{n\geqslant 0}$ de polinoame algebrice astfel încît $g(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z)$, $z \in D$*). Scriind $z = \mathrm{cis}(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ şi notînd $g[\mathrm{cis}(x)] = f(x)$, $p_n[\mathrm{cis}(x)] = \varphi_n(x)$ avem $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, convergenţa fiind uniformă iar evident $\varphi_n \in \mathfrak{D}$, deoarece dacă $p_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$, avem $\varphi_n(x) = (p_{n_0}\,\mathrm{cis})(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{cis}(x) + \alpha_2 \mathrm{cis}^2(x) + \ldots + \alpha_n \mathrm{cis}^n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{ix} + \alpha_2 e^{2ix} + \ldots + \alpha_n e^{inx} \in \mathfrak{D}$

*) Se presupune că discul unitate $B_1(0)$ este inclus în D.

Observația 3. Deoarece funcția φ_n este un polinom trigonometric complex, înțelegînd prin polinoame trigonometrice complexe funcțiile de forma $\sum_{k=-n}^{k=n} \alpha_k e^{ink}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, $n \in \mathbb{Z}$, teorema 5 arată că orice element din $\mathcal{C}$ poate fi aproximat uniform prin polinoame trigonometrice (complexe). Prin calcule elementare se poate arăta că dacă $f \in \mathcal{C}$ are valori reale, atunci f poate fi aproximat uniform prin polinoame trigonometrice reale, adică prin funcții de forma

$$t_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{k} [\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)], \quad n \in \mathbb{N}, \ \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$$

care sînt evident elemente din $\mathcal{R}$.

Observația 4. Teorema 5 se poate reformula scriind $\mathcal{R}_u^- = \mathcal{C}$, unde $\mathcal{R}_u^-$ este închiderea mulțimii $\mathcal{R}$ în raport cu metrica uniformă (2).

2. Convoluția funcțiilor periodice și proprietățile ei. Funcționale

Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{R}$ spațiile de funcții definite la punctul 1.

Definiția 1. *Dacă $f \in \mathcal{C}$ și $t \in \mathbb{R}$, prin translația lui f prin t se înțelege funcția $T_t f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin*

$$(T_t f)(x) = f(x - t), \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Vom utiliza și notația $T_t f(x)$ pentru funcția translatată $(T_t f)(x)$; evident $T_t f \in \mathcal{C}$ dacă $f \in \mathcal{C}$ și $T_t f \in \mathcal{R}$ dacă $f \in \mathcal{R}$ iar dacă f are valori reale, graficul lui $T_t f$ se deduce din graficul lui f prin deplasarea acestuia din urmă prin t unități spre dreapta (dacă $t > 0$) sau prin deplasarea cu t unități spre stînga, dacă $t < 0$. Sînt evidente proprietățile :

$$(T_0 f)(x) = f(x), \ T_s(T_t f)(x) = (T_{s+t} f)(x) \tag{2}$$

Definiția 2. *Dacă $f, g \in \mathcal{C}$, prin convoluția funcțiilor f și g se înțelege funcția $f \ast g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin*

$$(f \ast g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - t) g(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (T_t f)(x) g(t) \mathrm{d}t \tag{3}$$

Se va utiliza și notația $f(x) \ast g(x)$ pentru convoluția (3) și se observă că din definiție rezultă că funcția $f \ast g$ este exprimată cu ajutorul unei integrale cu parametru; conform teoriei generale a acestor integrale (vezi A.M. cap. II, III, punctul 3), dacă $f, g \in \mathcal{C}$ atunci $f \ast g \in \mathcal{C}$ iar dacă $f, g \in \mathcal{R}$, atunci $f \ast g \in \mathcal{R}$.

Pentru funcțiile $f \in \mathcal{C}$, periodice cu perioada $p \neq 0$ este valabilă egalitatea

$$\int_{t_0}^{t_0+p} f(s)\mathrm{d}s = \int_0^p f(s)\mathrm{d}s \tag{4}$$

pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$; într-adevăr scriind $\int_{t_0}^{t_0+p} f(s)\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{0} f(s)\mathrm{d}s + \int_0^p f(s)\mathrm{d}s + \int_p^{t_0+p} f(s)\mathrm{d}s$, cu schimbarea $s \to s + p$ rezultă $\int_p^{t_0+p} f(s)\mathrm{d}s = \int_0^{t_0} f(t+p)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} f(t)\mathrm{d}t$ (folosind și periodicitatea lui f) ceea ce coincide cu (4).

La baza egalității (4), convoluția $f \ast g$ poate fi definită și prin

$$(f \ast g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t \tag{3'}$$

deoarece funcția $t \to f(x-t)g(t)$ este continuă și periodică (cu perioada 2π) sau chiar prin relația

$$(f \ast g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \tag{3''}$$

În propoziția care urmează se vor exprima cîteva proprietăți ale operației de convoluție.

Propoziția 1. *Dacă $f, g \in \mathcal{C}$. atunci sînt valabile relațiile*

$$\|f \ast g\| \leqslant \|f\|\,\|g\| \tag{5}$$

$$f \ast g = g \ast f \tag{6}$$

$$(af) \ast g = a(f \ast g),\ a \in \mathbb{C} \tag{7}$$

$$(f_1 + f_2) \ast g = f_1 \ast g + f_2 \ast g,\ f_1, f_2, g \in \mathcal{C} \tag{8}$$

$$(f \ast g) \ast h = f \ast (g \ast h),\ f, g, h \in \mathcal{C} \tag{9}$$

$$T_t(f \ast g) = (T_t f) \ast g = f \ast (T_t g) \tag{10}$$

$$D^k(f \ast g) = (D^k f) \ast g,\ k = 1, 2, \ldots, f \in \mathcal{Q} \tag{11}$$

Inegalitatea (5) rezultă din definiția 2, utilizînd proprietățile integralelor și faptul că $|g(t)| \leqslant \|g\|$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\|f * g\| = \max_{x \in [0,2\pi]} |(f * g)(x)| = \max_{x \in [0,2\pi]} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x \in [0,2\pi]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-t)|\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_{x \in [0,2\pi]} |f(x-t)|\,\|g\|\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|\,\|g\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \|f\|\,\|g\|.$$

Egalitatea (6) se obține din (3) prin schimbarea de variabilă $x - t = s$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}s$, ținînd seama și de egalitatea (4) scrisă pentru $t_0 = x - 2\pi$, $p = 2\pi$:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^{x} f(s)g(x-s)\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-t)f(t)\mathrm{d}t = (g * f)(x)$$

iar (7) și (8) sînt simple consecințe ale proprietăților integralei Riemann ; proprietatea de asociativitate (9) se deduce calculînd separat cei doi membri.

Pentru justificarea primei egalități din (10), calculînd $T_t(f * g)(x)$ găsim :

$$T_t(f * g)(x) = (f * g)(x - t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t-s)g(s)\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (T_t f)(x-s)g(s)\mathrm{d}s = [(T_t f) * g](x)$$

și la fel se deduce și a doua egalitate (10), ținînd însă seama de (7). În fine, (11) se deduce utilizînd regula de derivare a integralelor cu parametru :

$$\mathrm{D}^k(f * g)(x) = \mathrm{D}^k \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^k}{\partial x^k} [f(x-t)g(t)]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(x-t)g(t)\mathrm{d}t = (\mathrm{D}^k f * g)(x)$$

Observația 1. Din relația de permutabilitate (6) se deduce că $f \overset{*}{\times} g \in \mathfrak{L}$ dacă doar unul din factori este un element din $\mathfrak{L}$; de exemplu, dacă $f \in \mathfrak{L}$ și $g \in \mathfrak{C}$, proprietatea enunțată rezultă din (11) iar dacă $f \in \mathfrak{C}$ și $g \in \mathfrak{L}$, din (11) și (6) avem $D^k(f \overset{*}{\times} g) = D^k(g \overset{*}{\times} f) = (D^k g) \overset{*}{\times} f$.

Propoziția 2. *Produsul de convoluție $f \overset{*}{\times} g$ este o aplicație continuă în sensul topologiei din $\mathfrak{L}$, adică pentru orice șir $(f_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathfrak{L}$ uniform convergent, avem*

$$f_n \overset{*}{\times} g \xrightarrow{\mathfrak{L}} f \overset{*}{\times} g \quad \textit{oricare ar fi } g \in \mathfrak{L}.$$

În primul rînd, avem $f \in \mathfrak{C}$, în baza convergenței uniforme a șirului $(f_n)_{n \geqslant 1}$ iar $f_n \overset{*}{\times} g \xrightarrow{\mathfrak{L}} f \overset{*}{\times} g$ dacă și numai dacă $D^k(f_n \overset{*}{\times} g) \to D^k(f \overset{*}{\times} g)$, uniform pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$; utilizînd propoziția 1 se deduce $D^k(f_n \overset{*}{\times} g - f \overset{*}{\times} g) = D^k[(f_n - f) \overset{*}{\times} g] = (D^k g) \overset{*}{\times} (f_n - f)$. În baza inegalității (5) avem $\|D^k(f_n \overset{*}{\times} g - f \overset{*}{\times} g)\| \leqslant \|D^k g\| \, \|f_n - f\| \leqslant M \|f_n - f\| \to 0 (n \to \infty)$

Definiția 3. *Vom spune că șirul $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathfrak{C}$ aproximează unitatea, dacă acest șir verifică următoarele condiții:*

i: $\varphi_n(x) \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *și oricare* $x \in \mathbb{R}$

ii: $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\, dx = 1$, $n = 1, 2, \ldots$

iii: *Pentru oricare* ε, $0 < \varepsilon < \pi$ *avem* $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} \varphi_n(x) dx \to 0 \; (n \to \infty)$.

Exemplul 1. Dacă $\varphi_n(x) = c_n(1 + \cos x)^n$, $c_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$ avem $1 + \cos x \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ și *i* se verifică, luînd

$$c_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)};$$

se va verifica și *ii* deoarece φ_n fiind o funcție pară putem scrie

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^n dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos x)^n dx = 2 \int_0^{\pi} (1 + \cos x)^n dx = 2^{n+1} \int_0^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= 2^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx = 2^{n+2} \int_0^{\pi} \cos^{2n} x dx = \frac{2^{n+2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n!}$$

avînd în vedere că $\int_0^{\pi} \cos^k x\,dx = \frac{1+(-1)^k}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}$, Γ fiind funcţia

eulerianã de speţa a doua (A.M. cap. I. p. ct. 5). Va rezulta $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx = 1$ cu c_n astfel determinat iar calcule similare cu cele anterioare arată că pentru $0 < \varepsilon < \pi$ avem

$$b_n(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \varphi_n(x)dx = \frac{c_n}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (1-\cos x)^n dx =$$

$$= \frac{c_n}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} (1-\cos x)^n dx = \frac{c_n}{\pi}\,2^n \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{c_n}{\pi}\,2^{n+1}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,dt,\ 0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \pi - \varepsilon$$

ultima egalitate obţinînd-se printr-o schimbare de variabilă.

Cum $\cos^{2n} t \leqslant \cos^{2n}\frac{\varepsilon}{2}$ pentru $\frac{\varepsilon}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ va rezulta $b_n(\varepsilon) \to 0\ (n \to \infty)\ 0 < \varepsilon < \pi$, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 2^n \cos^{2n} t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{1\cdot 3\cdot (2n-1)} \cos^{2n} t$ este uniform convergentă, fiind majorată de seria numerică convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{1\cdot 3 \ldots (2n-1)} \cos^{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ (conform cu criteriul raportului seria : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n! \cos^{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}$ care se obţine integrînd termen cu termen seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 2^n \cos^{2n} t$ este convergentă, deci termenul ei general tinde la zero : notînd $a_n = \frac{2^n n! \cos^{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}$ avem $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cos\frac{\varepsilon}{2} < 1$ dacă $0 < \varepsilon < \pi$).

Rezultatul următor este important pentru calculele viitoare :

Lema 1. *Dacă* $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ *este un şir din* $\mathcal{C}$ *care aproximează unitatea, atunci pentru orice* $f \in \mathcal{C}$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n \ast f)(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

convergența fiind uniformă; în plus, dacă $f \in \mathfrak{L}$, *atunci*

$$\varphi_n * f \xrightarrow{\mathfrak{L}} f \ (n \to \infty)$$

Deoarece se poate scrie $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_n(t)\mathrm{d}t$, avem

$$|(\varphi_n * f)(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x-t) - f(x)]\varphi_n(t)\mathrm{d}t| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \left| [f(x-t) - f(x)]\varphi_n(t)\mathrm{d}t \right| + \frac{1}{2\pi}\left| \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} [f(x-t) - f(x)]\varphi_n(t)\mathrm{d}t \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left| \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} [f(x-t) - f(x)]\varphi_n(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} |f(x-t) - f(x)|\varphi_n(t)\mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} |f(x-t) - f(x)|\varphi_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} |f(x-t) - f(x)|\varphi_n(t)\mathrm{d}t$$

Cum $0 < \varepsilon < \pi$ și f este continuă pe $[0,2\pi]$, f va fi uniform continuă pe acest interval cît și pe orice subinterval din $[0, 2\pi]$; de aceea, pentru orice $\delta > 0$, va exista $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, astfel încît să avem $|f(x-t) - f(x)| < \frac{\delta}{3}$ dacă $|t| < 2\varepsilon$ și $x \in [0,2\pi]$. Va rezulta

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} |f(x-t) - f(x)|\varphi_n(t)\mathrm{d}t < \frac{\delta}{3}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi_n(t)\mathrm{d}t < \frac{\delta}{3}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\delta}{3}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} |f(x-t) - f(x)|\varphi_n^{(t)}\mathrm{d}t < \frac{\delta}{3}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi}\varphi_n(t)\mathrm{d}t < \frac{\delta}{3}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\delta}{3}$$

utilizîndu-se proprietățile *i* și *ii* ale șirului $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$. În baza proprietății *iii* a aceluiași șir, se poate alege n suficient de mare pentru a avea

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} |f(x-t) - f(x)|\varphi_n^{(t)}\mathrm{d}t \leqslant 2\|f\|\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\varphi_n(t)\mathrm{d}t < \frac{\delta}{3}$$

și în definitiv, se deduce $|(\varphi_n \ast f)(x) - f(x)| < \delta$ pentru $f \in \mathcal{C}$ și $n \geqslant N(\delta)$. În ipoteza $f \in \mathcal{P}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem

$$D^k(\varphi_n \ast f) = (D^k\varphi_n) \ast f = (D^k f) \ast \varphi_n \to D^k f \ (n \to \infty)$$

convergența fiind uniformă. Rezultă $\varphi_n \ast f \xrightarrow{\mathcal{P}} f$.

Cu ajutorul lemei 1 se poate deduce o nouă justificare a faptului că subspațiul $\mathcal{P}$ este dens în spațiul $\mathcal{C}$, deoarece avem $\varphi_n \ast f \in \mathcal{P}$ dacă $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir din $\mathcal{P}$ (așa cum este cazul șirului de la exemplul 1) pentru orice $f \in \mathcal{C}$ iar $\varphi_n \ast f \to f (n \to \infty)$ (convergența fiind uniformă); în particular, deoarece dacă considerăm $\varphi_n(x) = c_n(1 + \cos x)^n$, cu $c_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ determinați în exemplul 1, vom avea

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) \ast f(x) = \frac{c_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + \cos(x - t)]^n f(t)\,dt$$

iar $\psi_n \to f \ (n \to \infty)$, uniform.

Lema 2. *Dacă f, $g \in \mathcal{C}$, atunci convoluția $f \ast g$ se poate scrie ca limita uniformă a șirului $(h_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathcal{C}$, unde*

$$h_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{2\pi k}{n}\right) f\left(x - \frac{2\pi k}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{2\pi k}{n}\right) T_{\frac{2k\pi}{n}} f(x) \qquad (13)$$

Să calculăm $h_n(x) - h(x)$, unde $h(x) = (f \ast g)(x)$; avem

$$2\pi[h_n(x) - h(x)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} g\left(\frac{2\pi k}{n}\right) f\left(x - \frac{2\pi k}{n}\right) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2\pi k}{n}} f(x - t)g(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2\pi k}{n}} \left[g\left(\frac{2\pi k}{n}\right) f\left(x - \frac{2\pi k}{n}\right) - g(t)f(x - t) \right] dt$$

Cum f și g sînt continue pe $[0,2\pi]$, produsul $f \cdot g$ va fi uniform continuu pe orice subinterval de forma $\left[\frac{2\pi(k-1)}{n}, \frac{2k\pi}{n}\right]$ și deci dacă $\left| x - \frac{2k\pi}{n} \right| < \frac{2\pi}{n\|g\|}$ va rezulta

$$|h_n(x) - h(x)| \leqslant \frac{\|g\|}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} \left| f\left(x - \frac{2k\pi}{n}\right) - f(x - t) \right| dt < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}} dt = \frac{1}{n}$$

și deci $h_n \to h \ (n \to \infty)$ uniform.

De remarcat că h_n poate fi considerat ca o sumă Riemann pentru $h = f \ast g$.

Lema 3. *Dacă $f \in \mathcal{D}$ și $g \in \mathcal{E}$ atunci funcțiile h_n definite prin* (13) *vor converge către $h = f \ast g$, în sensul convergenței din $\mathcal{D}$, cînd $n \to \infty$.*

Deoarece avem

$$D^k(T_x f) = T_x(D^k f)$$

se deduce că $(D^k h_n)_{n \geqslant 1}$ este un șir din $\mathcal{D}$ care va converge (în baza lemei 2) către $(D^k f) \ast g = D^k(f \ast g)$; prin urmare $D^k h_n \to D^k h$ $(n \to \infty)$, uniform, pentru $k = 1, 2, \ldots$

Evident, funcțiile h_n, $n = 1, 2, \ldots$ definite prin (13) vor putea fi utilizate pentru aproximarea convoluției $h = f \ast g$ iar derivatele $D^k h_n$ vor aproxima (uniform) funcția $D^k(f \ast g)$.

Vom încheia acest punct cu unele observații simple privind funcționalele definite pe spații vectoriale normate.

Fie X un spațiu vectorial complex.

Definiția 4. *Prin funcțională definită pe X se înțelege o aplicație $F : X \to \mathbb{C}$.*

Dacă F este liniară, adică pentru orice $f, g \in X$ și orice $a, b \in \mathbb{C}$, avem

$$F(af + bg) = aF(f) + bF(g) \tag{14}$$

atunci vom spune că F este o funcțională liniară sau formă liniară definită pe X.

Dacă în plus X este un spațiu vectorial normat și funcționala F verifică inegalitatea

$$|F(f)| \leqslant M\|f\| \tag{15}$$

pentru un $M \geqslant 0$ și orice $f \in X$ (M este independent de f) atunci F se va numi funcțională mărginită pe X.

Reamintim că aplicația $F : X \to \mathbb{C}$ va fi continuă în punctul $f \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ astfel încît

$$d'(F(g), F(f)) < \varepsilon \text{ îndată ce } d(g, f) < \delta \tag{16}$$

d fiind distanța din spațiul vectorial normat X (deci $d(f, g) = \|f - g\|$) iar d' este distanța din $\mathbb{C}$; așadar, (16) se transcrie

$$|F(g) - F(f)| < \varepsilon \text{ dacă } \|g - f\| < \delta \tag{16'}$$

Între funcționalele (formele) liniare definite pe spațiul vectorial normat X și mărginite pe acest spațiu și funcționalele continue, există o strînsă legătură, precizată prin rezultatul următor:

Teorema 1. *O formă liniară F definită pe spațiul vectorial normat X este continuă dacă și numai dacă F este mărginită pe X.*

Fie $F : X \to \mathbb{C}$, liniară și mărginită; rezultă, utilizînd (14) și (15):

$$d'(F(g), F(f)) = |F(g) - F(f)| = |F(g - f)| \leqslant M\|g - f\| = Md(g, f)$$

presupunînd $d(g, f) = \|g - f\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ (dacă $M > 0$), deoarece dacă $M = 0$ avem întotdeauna $d'(F(g), F(f)) = 0 < \varepsilon$) se deduce $d'(F(g), F(f)) < \varepsilon$. Reciproc, fie $F : X \to \mathbb{C}$ o funcțională liniară și continuă în orice punct $f \in X$: în particular F va fi continuă pentru $f = 0$ și presupunînd $\varepsilon = 1$, va exista $\delta > 0$, astfel încît $d(g, 0) = \|g - 0\| = \|g\| < \delta$ să implice

$$d'(F(g), F(0)) = |F(g) - F(0)| = |F(g - 0)| = |F(g)| < 1.$$

Presupunînd $g_1 \neq 0$, $g_1 \in X$, se poate deduce $g_0 \in X$ cu $g_0 = \dfrac{g_1}{\|g_1\|}$ iar $\|g_0\| = 1$; în acest caz, dacă $g = \delta g_0$ avem $\|g\| = \|\delta g_0\| = \delta\|g_0\| = \delta$, ceea ce antrenează $|F(g)| < 1$, adică $\left| F\left(\delta \dfrac{g_1}{\|g_1\|}\right)\right| < 1$ pentru orice $g_1 \neq 0$, $g_1 \in X$. Avînd în vedere liniaritatea lui F, rezultă $|F(g_1)| < \dfrac{1}{\delta}\|g_1\|$ ceea ce este echivalent cu relația de mărginire a formei liniare F (dacă $g_1 = 0$, evident $F(g_1) = 0$ și avem $|F(g_1)| \leqslant M\|g_1\|$ pentru orice $M > 0$) în care $M = \dfrac{1}{\delta}$.

În teorie și practică este uneori foarte importantă rezolvarea problemelor legate de determinarea funcționalelor liniare și mărginite definite pe un spațiu vectorial normat X; mulțimea acestor funcționale se notează prin X' iar mulțimea formelor liniare definite pe X se notează X^* (evident $X' \subset X^*$). Cu alte cuvinte, dacă $F \in X'$, atunci $F : X \to \mathbb{C}$ iar F verifică (14) și (15) (și în baza teoremei 1, F va fi continuă în orice punct $f \in X$); așadar, pentru orice $f \in X$, avem $F(f) \in \mathbb{C}$ și se obișnuiește uneori să se noteze prin $\langle F, f\rangle$ valoarea formei liniare F pentru $f \in X$, adică

$$F(f) = \langle F, f\rangle \tag{17}$$

Dacă în particular, X este un spațiu Hilbert (deci X este un spațiu vectorial în care norma provine dintr-un produs scalar, $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, $f \in X$, X fiind și complet în raport cu această normă) atunci funcționalele liniare și mărginite definite pe X se vor scrie sub formă de produs scalar, adică

$$F(f) = (f, g)$$

unde $g \in X$ este un element fixat din X (depinzînd evident de forma liniară F) (vezi cap. III).

3. Distribuții periodice

Fie $\mathfrak{D}$ mulțimea funcțiilor indefinit derivabile pe $\mathbb{R}$ (cu valori complexe), periodice, cu perioada 2π definite anterior (vezi punctul 1).

Definiția 1. *Orice funcțională liniară și continuă definită pe spațiul* $\mathfrak{D}$, *se numește distribuție periodică* (vom nota pe scurt DP).

Cu alte cuvinte, F va fi o DP dacă $F \in \mathfrak{D}'$, unde $\mathfrak{D}'$ este mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe mulțimea $\mathfrak{D}$; în baza rezultatelor din punctele anterioare, F va fi o DP dacă verifică următoarele trei condiții:

i. $F : \mathfrak{D} \to \mathbb{C}$

ii. $F(af + bg) = aF(f) + bF(g)$ *pentru orice* $f, g \in \mathfrak{D}$ *și orice* $a, b \in \mathbb{C}$

iii. $F(f_n) \to F(f)$ *pentru orice șir* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *din* $\mathfrak{D}$ *astfel încît* $f_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} f$.

Vom scrie uneori

$$F(f) = \langle F, f\rangle \tag{1}$$

conform cu notațiile introduse la punctul 2.

Mulțimea $\mathfrak{D}'$ a distribuțiilor periodice nu este vidă; de exemplu, $\mathcal{C} \subset \mathfrak{D}'$, $\mathcal{C}$ fiind ca de obicei mulțimea funcțiilor continue pe $\mathbb{R}$ (cu valori complexe) periodice, cu perioada 2π. Într-adevăr, dacă $g \in \mathcal{C}$ să notăm F_g funcționala definită pentru elementele lui $\mathfrak{D}$ prin

$$F_g(f) = \langle F_g . f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)f(x)\mathrm{d}x\,; \tag{2}$$

proprietățile i—iii de mai sus se verifică imediat, utilizînd fapte bine cunoscute din teoria integralei Riemann (de exemplu iii se justifică deoarece dacă f_n converge uniform către f avem $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} g(x)f_n(x)\mathrm{d}x =$

$= \int_0^{2\pi} g(x)[\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} g(x)f(x)\mathrm{d}x$, ceea ce este echivalent cu $F_g(f_n) \to F_g(f)$ $(n \to \infty)$). Dacă $g \in \mathcal{C}$, atunci vom conveni să notăm distribuția F_g definită prin (2) tot prin g.

De asemenea, dacă g este continuă pe porțiuni pe $[0, 2\pi]$ prin F_g definită prin (2) se va obține iarăși o DP; aceste distribuții periodice se vor numi *distribuții periodice de tip funcție* sau *distribuții periodice regulate*. Este ușor de constatat că dacă $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$ și $g_1 \neq g_2$ atunci și distribuțiile periodice corespunzătoare vor defini elemente dis-

tincte din $\mathfrak{D}'$; într-adevăr, dacă se presupune $F_{g_1} = F_{g_2}$ (deși $g_1 \neq g_2$) va trebui să avem $\int_0^{2\pi} g_1(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} g_2(x)f(x)\mathrm{d}x$ pentru orice $f' \in \mathfrak{D}$. Alegînd însă șirul $(f_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathfrak{D}$ astfel încît aceasta să conveargă uniform către $\bar{g}_1 - \bar{g}_2$ (posibil deoarece $\mathfrak{D}$ este dens în $\mathcal{C}$ iar $\bar{g}_1 - \bar{g}_2 \in \mathcal{C}$), va rezulta

$$0 = F_{g_1}(f_n) - F_{g_2}(f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(x)f_n(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_2(x)f_n(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [g_1(x) - g_2(x)]f_n(x)\mathrm{d}x$$

și prin trecere la limită, pentru $n \to \infty$ va rezulta

$$\int_0^{2\pi} |g_1(x) - g_2(x)|^2\mathrm{d}x = 0,$$

ceea ce înseamnă, $g_1 = g_2$, contrar ipotezei; deci $F_{g_1} \neq F_{g_2}$.

Mulțimea distribuțiilor regulate nu epuizează spațiul $\mathfrak{D}'$, existînd DP care nu se pot exprima sub forma integrală (2); cel mai simplu exemplu în acest sens îl constituie *distribuția lui Dirac* δ, definită prin

$$\delta(f) = \langle \delta, f\rangle = f(0),\ f \in \mathfrak{D} \tag{3}$$

și pentru care ipotezele i, ii, iii se verifică imediat. Dacă δ ar fi o distribuție regulată, va trebui să avem

$$\delta(f_n) = f_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(x)\delta(x)\mathrm{d}x \tag{3'}$$

pentru orice $f_n \in \mathfrak{D}$; în particular, luînd $f_n(x) = \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)$, avem $f_n(0) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ iar $f_n(x)$ converge uniform la zero în orice interval $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, $a \neq 0$, $b \neq 2\pi$ și avem $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

Din (3′) rezultă

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\delta(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon_1} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\delta(x)\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon_1}^{2\pi-\varepsilon_2} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\delta(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi-\varepsilon_2}^{2\pi} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\delta(x) \qquad (3'')$$

pentru orice $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ arbitrar de mici; deoarece

$$\left|\int_0^{\varepsilon_1} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\delta(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{\varepsilon_1} |\delta(x)|\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon_1 \max_{x\in[0,\varepsilon_1]} |\delta(x)|$$

$$\int_{\varepsilon_1}^{2\pi-\varepsilon_2} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\delta(x)\mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\left|\int_{2\pi-\varepsilon_2}^{2\pi} \cos^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)\delta(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{2\pi-\varepsilon_2}^{2\pi} |\delta(x)|\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon_2 \max_{x\in[2\pi-\varepsilon_1,2\pi]} |\delta(x)|$$

se deduce că membrul drept din (3″) este oricît de mic (pentru n suficient de mare și ε_1 și ε_2 suficient de mici) și deci nu va fi întotdeauna egal cu 1. Această contradicție arată că DP δ nu este regulată; vom conveni să numim *distribuții periodice singulare*, acele distribuții periodice care nu sînt regulate. Notînd cu $\mathfrak{D}'_r$ mulțimea distribuțiilor periodice regulate și cu $\mathfrak{D}'_s$ mulțimea distribuțiilor periodice singulare, are loc egalitatea

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'_r \cup \mathfrak{D}'_s \qquad (4)$$

Definiția 2. *DP F se spune că are ordinul m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) dacă există $c > 0$, astfel încît să avem*

$$|F(f)| \leqslant c(\|f\| + \|\mathrm{D}f\| + \ldots + \|\mathrm{D}^m f\|) \qquad (5)$$

pentru orice $f \in \mathfrak{D}$.

Exemplu 1. Orice distribuție regulată are ordinul egal cu zero, deoarece din (2) rezultă

$$|F_g(f)| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |g(x)|\,\|f\|$$

și putem lua $c = \|g\|$.

2. Distribuția lui Dirac (3) are de asemenea ordinul zero, deoarece din (3) se deduce

$$|\delta(f)| = |f(0)| \leqslant \|f\|$$

deci aici $c = 1$.

3. Fie $g \in \mathcal{E}$ astfel încît $\mathrm{D}^k g \in \mathcal{E}$, $k > 0$; atunci g va fi o DP de ordinul k.

Într-adevăr, notînd cu F DP corespunzătoare funcției periodice $\mathrm{D}^k g$, avem $F \in \mathcal{D}'$ și deci conform cu (2) se poate scrie

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathrm{D}^k g)(x) f(x) \mathrm{d}x, \quad f \in \mathcal{D} ;$$

rezultă imediat integrînd prin părți și ținînd cont de periodicitatea funcțiilor f, g, f', g', etc. (deci $f(0) = f(2\pi)$, $g(0) = g(2\pi)$ ...)

$$F(f) = \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \mathrm{D}^k f(x) \mathrm{d}x$$

de unde rezultă $|F(f)| \leqslant \max |g(x)| \, \|\mathrm{D}^k f\| \leqslant c(\|f\| + \ldots + \|\mathrm{D}^k f\|)$, $c = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |g(x)|$.

Teorema 1. *Pentru orice DP F există numărul întreg $m_F \geqslant 0$, astfel încît F să aibă ordinul m_F.*

În caz contrar va exista $f_m \in \mathcal{D}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ astfel încît să avem

$$|F(f_m)| \geqslant (m+1)(\|f_m\| + \|\mathrm{D}f_m\| + \ldots + \|\mathrm{D}^m f_m\|)$$

și să notăm $g_m = \dfrac{f_m}{(m+1)(\|f_m\| + \|\mathrm{D}f_m\| + \ldots + \|\mathrm{D}^m f_m\|)} \in \mathcal{D}$; din (6) rezultă imediat $|F(g_m)| \geqslant 1$. Deoarece evident $g_m \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, va trebui (în baza continuității lui F) să avem $\lim\limits_{m \to \infty} F(g_m) = 0$, ceea ce contrazice inegalitatea anterioară $|F(g_m)| \geqslant 1$.

Prin urmare, teorema 1 afirmă că orice DP trebuie să aibă un ordin finit m_F.

Dacă F este o DP și se știe că F are un ordin dat atunci sînt posibile unele precizări relative la F ; astfel dacă de exemplu F are ordinul zero, atunci F poate fi prelungită la o formă liniară și continuă definită pe $\mathcal{E}$ deoarece este valabil rezultatul următor :

Propoziția 1. *Fie $F \in \mathcal{D}'$ o distribuție periodică de ordinul zero ; atunci va exista o formă liniară $F_0 : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ unic determinată astfel încît*

$$F(f) = F_0(f), \text{ pentru orice } f \in \mathcal{D} \qquad (7)$$

Prin ipoteză, există o constantă $c \geqslant 0$ astfel încît pentru orice $f \in \mathcal{X}$ să avem (vezi definiția 2) $|F(f)| \leqslant c\|f\|$: deoarece $\mathcal{X}$ este o submulțime densă din $\mathcal{E}$, va exista un șir $(f_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathcal{X}$, uniform convergent către $f \in \mathcal{E}$. În această situație, se deduce

$$|F(f_n) - F(f_m)| = |F(f_n - f_m)| \leqslant c\|f_n - f_m\| \tag{8}$$

și deoarece orice șir convergent este și un șir fundamental, avem $\|f_n - f_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ ceea ce înseamnă că șirul $(F(f_n))_{n \geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$ este un șir fundamental ; cum $\mathbb{C}$ este un spațiu metric complet va exista $F_0(f) \in \mathbb{C}$, definită prin

$$F_0(f) = \lim_{n \to \infty} F(f_n). \tag{9}$$

F_0 nu depinde de șirul $(f_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathcal{X}$ utilizat pentru definiția lui F_0, deoarece dacă $(g_n)_{n \geqslant 1}$ este un alt șir din $\mathcal{X}$ convergent uniform către f, vom avea $\|f_n - g_n\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f - g_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$ și deci la fel ca la justificarea lui (8) se deduce $|F(f_n) - F(g_n)| \leqslant c\|f_n - g_n\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$, adică $\lim_{n \to \infty} F(g_n) = \lim_{n \to \infty} F(f_n) = F_0(f)$. Utilizînd proprietățile limitei rezultă imediat că forma F_0 definită prin (9) este liniară și cum $|F_0(f)| = |F(\lim_{n \to \infty} f_n)| = |\lim_{n \to \infty} F(f_n)| = \lim_{n \to \infty} |F(f_n)| \leqslant \lim_{n \to \infty} (c\|f_n\|) = c\|f\|$ rezultă că F_0 este o formă liniară mărginită (deci și continuă, în baza teoremei 1 de la punctul 2) definită pe $\mathcal{E}$. Reciproc, fie $F_0^* : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ continuă și să presupunem $F_0^*(f) = F_0(f)$ pentru orice $f \in \mathcal{X}$: pentru orice $f \in \mathcal{E}$, fie $(f_n)_{n \geqslant 1}$ un șir din $\mathcal{X}$ convergent uniform către f. Vom avea $F_0^*(f) = F_0(\lim_{n \to \infty} f_n) = \lim_{n \to \infty} F_0^*(f_n) = \lim_{n \to \infty} F_0(f_n) = F_0(f)$.

Consecința 1. *Din propoziția 1 se deduce că în baza definiției distribuției lui Dirac, egalitatea* (3) *va fi valabilă nu numai pentru* $f \in \mathcal{X}$ *ci și pentru* $f \in \mathcal{E}$

$$\delta(f) = \langle \delta, f \rangle = f(0), \ f \in \mathcal{E}. \tag{10}$$

Exemple 4. Aplicația $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

nu va defini o DP, deoarece pentru $a \in \mathbb{C}$ arbitrar avem $F(af) = a^2F(f) \neq aF(f)$ (aplicația în cauză nu este liniară).

5. Aplicația $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$F(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

va defini evident o DP regulată ; avem $F = 2\pi$.

6. Aplicația $F : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$, definită prin

$$F(f) = \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

va defini o DP o regulată ; avem

$$Fu = u(x) = \begin{cases} \pi & \text{pentru } x = 0 \\ 2\pi & \text{pentru } 0 < x < \pi \\ \pi & \text{pentru } x = \pi \\ 0 & \text{pentru } \pi < x < 2\pi \\ \pi & \text{pentru } x = 2\pi \end{cases}$$

7. Aplicația $F : \mathcal{Q} \to \mathcal{C}$, definită prin

$$F(f) = \int_0^{\pi} f(x)(1 + x)^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

va defini o DP regulată și anume :

$$F_u = u(x) = \begin{cases} \pi & \text{pentru } x = 0 \\ 2\pi(1 + x)^n & \text{pentru } 0 < x < \pi \\ \pi(1 + \pi)^n & \text{pentru } x = \pi \\ 0 & \text{pentru } \pi < x < 2\pi \\ \pi & \text{pentru } x = 2\pi \end{cases}$$

4. Proprietăți ale distribuțiilor periodice

Mulțimea $\mathcal{Q}'$ a distribuțiilor periodice are o structură algebrică naturală de spațiu vectorial complex ; astfel, dacă F, $G \in \mathcal{Q}'$ iar $a \in \mathbb{C}$, vom scrie

$$(F + G)(f) = F(f) + G(f), \quad (aF)(f) = aF(f) \tag{1}$$

și se arată cu ușurință că $F + G \in \mathcal{Q}'$, $aF \in \mathcal{Q}'$.

Dacă $(F_n)_{n \geq 1}$ este un șir din $\mathcal{Q}'$, vom spune că acest șir este convergent și are limita $F \in \mathcal{Q}'$ (notație : $F_n \xrightarrow{\mathcal{Q}'} F$) dacă pentru orice $f \in \mathcal{Q}$ avem

$$\lim_{n \to \infty} F_n(f) = F(f) \tag{2}$$

(aici este vorba de convergența unor șiruri din $\mathbb{C}$).

Pentru a se obține proprietăți ale distribuțiilor periodice se utilizează relația (4) de la punctul 3 în sensul următor : DP regulate (adică elementele $F \in \mathcal{Q}'$ definite prin relația (2) de la punctul 3) provenind din funcții u ale căror proprietăți sînt cunoscute, vor conduce, pentru o anumită proprietate a funcției u la o egalitate de forma (2) de la punctul 3. Această egalitate (valabilă pentru elementele lui $\mathcal{Q}'_r$) se

postulează apoi și pentru elementele lui $\mathcal{D}'_s$, definind astfel o proprietate valabilă pentru orice element $F \in \mathcal{D}'$, verificînd evident faptul că F este o funcțională liniară și continuă.

În continuare, vom utiliza acest procedeu pentru a obține unele definiții și proprietăți pentru DP.

4.1. Operația de complex – conjugare

Dacă $F \in \mathcal{D}'$, DP *complex-conjugată atașată lui* F și notată prin $\bar{F}$ se va defini prin

$$\bar{F}(f) = \overline{F(\bar{f})} \tag{3}$$

Într-adevăr, dacă $u = F_u$ este o DP regulată, avem

$$F_u(f) = u(f) = \langle u, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) f(x) \mathrm{d}x, \; f \in \mathcal{D} \; ;$$

calculînd $F_{\bar{u}}(f)$ rezultă

$$F_{\bar{u}}(f) = \bar{u}(f) = \langle \bar{u}, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}(x) f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_0^{2\pi} u(x) \bar{f}(x) \mathrm{d}x} = \overline{\langle u, \bar{f} \rangle}$$

ceea ce conduce la definiția (3).

4.2. Operația de simetrie

Pentru $u \in \mathcal{E}$, vom nota

$$\check{u}(x) = u(-x) \tag{4}$$

iar dacă F este o DP, distribuția $\check{F} \in \mathcal{D}'$ se va defini prin

$$\check{F}(f) = F(\check{f}), f \in \mathcal{D} \tag{5}$$

Într-adevăr, dacă $u \in \mathcal{E}$ putem scrie

$$\langle \check{u}, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{u}(x) f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(-x) f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) f(-x) \mathrm{d}x$$

(ultima egalitate rezultînd din schimbarea de variabilă $-x \to x$) ceea ce coincide cu (5).

4.3. Operația de translație

Dacă $u \in \mathcal{C}$ și $t \in \mathbb{R}$, translația lui u prin t se definește prin $(T_t u)(x) = u(x - t)$ (vezi definiția 1 de la punctul 2). Dacă $F \in \mathcal{D}'$, DP translatată $T_t F$ se va defini prin relația

$$(T_t F)(f) = F(T_{-t} f),\ f \in \mathcal{D} \tag{6}$$

Într-adevăr, dacă u este o DP regulată, se poate scrie șirul de egalități

$$(T_t u)(f) = \langle T_t u, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (T_t u)(x) f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x-t) f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x) f(x+t)\mathrm{d}x$$

care coincide cu (6); pentru a obține ultima egalitate de mai sus se face schimbarea de variabilă $x - t \to y (\mathrm{d}x = \mathrm{d}y)$ și se ține seama că produsul $u(y)f(y + t)$ este o funcție periodică, cu perioada 2π în raport cu y, deci

$$\int_{-t}^{2\pi - t} u(y) f(y + t)\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} u(y) f(y + t)\mathrm{d}y$$

4.4. Operația de derivare

Pentru orice DP F, există derivata $\mathrm{D}F$ care este de asemeni o DP, elementul $\mathrm{D}F \in \mathcal{D}'$ definindu-se prin

$$(\mathrm{D}F)(f) = -F(\mathrm{D}f),\ f \in \mathcal{D} \tag{7}$$

(relația (7) se va utiliza uneori și sub forma

$$F'(f) = -F(f') \text{ sau } \langle F', f\rangle = -\langle F, f'\rangle,\ f \in \mathcal{D}, \tag{7'}$$

dacă se folosește notația $\mathrm{D}F = F'$).

Într-adevăr, fie $u (= F_u)$ o DP regulată ($F_u \in \mathcal{D}'_r$) astfel încît există derivata $\mathrm{D}u = u'$; în acest caz, se poate scrie

$$\langle \mathrm{D}u, f\rangle = \langle \mathrm{D}F_u, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(x) f(x)\mathrm{d}x.$$

Integrînd prin părți, avem

$$\langle \mathrm{D}u, f\rangle = \frac{1}{2\pi} u(x)f(x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)f'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)(\mathrm{D}f)(x)\mathrm{d}x = -\langle u, \mathrm{D}f\rangle \qquad (7''),$$

deoarece produsul uf fiind o funcție periodică, cu perioada 2π, avem $(uf)(0) = (uf)(2\pi)$; este acum evident că definiția (7) provine din (7'').

4.5. Derivate de ordin superior

Prin inducție, din (7) rezultă definiția derivatei de ordin $k > 1$ a DP $F \in \mathcal{D}'$:

$$(\mathrm{D}^k F)(f) = (-1)^k F(\mathrm{D}^k f),\ f \in \mathcal{D},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

sau

$$F^{(k)}(f) = (-1)^k F(f^{(k)}), f \in \mathcal{D},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (8')$$

sau

$$\langle F^{(k)}, f\rangle = (-1)^k \langle F, f^{(k)}\rangle \text{ sau } \langle \mathrm{D}^k F, f\rangle =$$

$$= (-1)^k \langle F, \mathrm{D}^k f\rangle, f \in \mathcal{D},\ k = 1,2, \ldots \qquad (8'')$$

Se verifică imediat că prin relațiile (5)—(8) se definesc elemente din $\mathcal{D}'$: de exemplu, fie DP $\mathrm{D}^k F$, $k = 1, 2, \ldots$. definită prin (8). Membrul stîng din (8) este o formă liniară definită pe $\mathcal{D}$, deoarece pentru $f, g \in \mathcal{D}$ și $a, b \in \mathbb{C}$ putem scrie:

$$(\mathrm{D}^k F)(af + bg) = (-1)^k F[\mathrm{D}^k(af + bg)] = (-1)^k F(a\mathrm{D}^k f + b\mathrm{D}^k g) =$$

$$= (-1)^k [aF(\mathrm{D}^k f) + bF(\mathrm{D}^k g)] = a[(-1)^k F(\mathrm{D}^k f)] + b[(-1)^k F(\mathrm{D}^k g)] =$$

$$= a\mathrm{D}^k F(f) + b\mathrm{D}^k F(g);$$

de asemenea, $\mathrm{D}^k F$ este o formă continuă pe mulțimea $\mathcal{D}'$, deoarece dacă $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir din $\mathcal{D}$, convergent în $\mathcal{D}$ către $f \in \mathcal{D}$, vom avea (vezi definiția 4 de la pct. 1) $\|\mathrm{D}^k f_n - \mathrm{D}^k f\| \to 0$ $(n \to \infty)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ și deci

$$(\mathrm{D}^k F)(f_n) = (-1)^k F(\mathrm{D}^k f_n) \to (-1)^k F(\mathrm{D}^k f) = (\mathrm{D}^k F)(f),$$

adică $\mathrm{D}^k F(f_n) \xrightarrow{\mathcal{D}'} (\mathrm{D}^k F)(f)$ $(n \to \infty)$, $k = 1, 2, \ldots$

În baza operațiilor 4.4 și 4.5 definite și explicate anterior, se poate enunța următorul rezultat:

Teorema 1. *Orice DP F admite derivate de orice ordin, fiecare derivată fiind iarăși o DP.*

Cu alte cuvinte, teorema 1 afirmă că dacă $F \in \mathcal{D}'$, atunci există $\mathrm{D}^k F = F^{(k)}$ pentru $k = 1, 2, \ldots$ iar $\mathrm{D}^k F \in \mathcal{D}'$; rezultă că și orice funcție $u \in \mathcal{E}$, fiind un element din $\mathcal{D}'$ va admite derivate de orice ordin (cu diferența că aceste derivate sînt în general DP și nu funcții : prin $u^{(k)} = \mathrm{D}^k u$ se va înțelege forma liniară și continuă $u^{(k)}(f) = (-1)^k u(f^{(k)})$).

Definiția 1. a. DP F *va fi reală dacă* $F = \bar{F}$ ($\bar{F}$ *fiind definit prin* (3))

b. DP F *se va numi pară dacă* $\check{F} = F$.

c. DP F *se va numi impară dacă* $\check{F} = -F$.

(distribuția $\check{F}$ este definită prin (5))

Exemple 8. Distribuția lui Dirac este reală și pară. Într-adevăr, deoarece această distribuție se definește prin relația

$$\delta(f) = \langle \delta, f \rangle = f(0)$$

va rezulta $\check{\delta}(f) = \delta(\check{f}) = \check{f}(0) = f(0)$ și deci $\delta = \check{\delta}$, ceea ce înseamnă că δ este o DP pară.

Utilizînd acum (3), rezultă $\bar{\delta}(f) = \overline{\delta(\bar{f})} = (\bar{f}(0)) = f(0) = \delta(f)$, deci $\bar{\delta} = \delta$ și δ va fi deci o DP reală.

9. Să calculăm $\delta^{(k)}$: utilizînd definiția (8) rezultă

$$\delta^{(k)}(f) = (-1)^k\, \delta(f^{(k)}) = (-1)^k\, f^{(k)}(0)$$

adică au loc egalitățile

$$(\mathrm{D}^k\, \delta)(f) = (-1)^k\, (\mathrm{D}^k f)\,(0),\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ f \in \mathcal{E}. \tag{9}$$

10. Notînd $T_{x_0}\delta = \delta_{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, unde T definește operația de translație, să calculăm δ_{x_0} ; din (6) rezultă

$$\delta_{x_0}(f) = \delta(f(x + x_0)) = f(x + x_0)|_{x=0} = f(x_0),$$

adică avem

$$(T_{x_0}\delta)(f) = \delta_{x_0}(f) = f(x_0),\ f \in \mathcal{E},\ x_0 \in \mathbb{R} \tag{10}$$

În baza unui rezultat anterior (vezi Consecința 1 de la pct. 3) se poate face observația că egalitatea (10) este valabilă și pentru $f \in \mathcal{C}$ (deci nu neapărat $f \in \mathcal{E}$) : în plus, deoarece $|f(x_0)| \leqslant \|f\|$, se deduce $|\delta_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leqslant \|f\|$ și deci δ_{x_0} este o distribuție de ordin zero.

11. Aplicația $F : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ definită prin

$$F(f) = \int_0^{2\pi} |u(x)|\, (\mathrm{D}^k f)(x)\, \mathrm{d}x,\ f \in \mathcal{E},\ u \in \mathcal{C},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

determină o DP care este regulată pentru $k = 0$ (cînd avem $F_{|u|} = 2\pi\,|u|$), iar pentru $k > 0$ avem $F = (-1)^k\, 2\pi \mathrm{D}^k(|u|)$, deci F este derivata de ordin k a unei DP regulate.

12. Aplicația $F : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$F(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \ldots a_n f(x_n),\ a_j \in \mathcal{C},\ x_j \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots, n$$

determină o DP de ordin zero, deoarece în baza exemplului 10 de mai sus se poate scrie

$$F = a_0\delta_{x_0} + a_1\delta_{x_1} + \ldots + a_n\delta_{x_n}$$

iar orice combinație liniară de DP de ordin zero este iarăși o DP de ordin zero.

13. Aplicația $F : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$F(f) = a_0 f(x_0) + a_1(\mathrm{D}f)(x_1) + \ldots + a_n(\mathrm{D}^n f)(x_n),\ a_j \in \mathbb{C},\ x_j \in \mathbb{R},$$
$$j = 0, 1, \ldots, n,$$

determină o DP de ordinul n, deoarece se verifică imediat liniaritatea și continuitatea lui F iar din $|(\mathrm{D}^k)f(x_k)| \leqslant \|\mathrm{D}^k f\|$, avem

$$|F(f)| \leqslant c(\|f\| + \|\mathrm{D}f\| + \ldots + \|\mathrm{D}^n f\|) \text{ cu } c = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots |a_n|\}$$

14. Dacă δ_{x_0} este distribuția lui Dirac translatată, avem

$$(\mathrm{D}^k\delta_{x_0})(f) = (-1)^k f^{(k)}(x_0)$$

Într-adevăr, utilizînd (8) și exemplul 10, avem

$$\mathrm{D}^k\,\delta_{x_0}(f) = (-1)^k\,\delta(\mathrm{D}^k f) = (-1)^k(\mathrm{D}^k f)(x_0);$$

deoarece $|\mathrm{D}^k\,\delta_{x_0}(f)| \leqslant \|\mathrm{D}^k f\|$ rezultă în plus că distribuția $\mathrm{D}^k\,\delta_{x_0}$ are ordinul k pentru orice $x_0 \in \mathrm{R}$.

15. Folosind exemplele 13 și 14 se constată imediat că DP F definită prin exemplul 13 se poate exprima cu ajutorul distribuției δ și a derivatelor ei sub forma

$$F = a_0\delta_{x_0} - a_1\delta_{x_1} + \ldots + (-1)^n\,a_n\,\delta^{(n)}_{x_n} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,a_j\mathrm{D}^j\delta_{x_j}$$

16. Să calculăm $\mathrm{D}^k F$ dacă F este DP definită prin exemplul 5. Dacă

$$F(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

rezultă $\mathrm{D}^k F$ dată de

$$(\mathrm{D}^k F)(f) = (-1)^k\,F(\mathrm{D}^k f) = (-1)^k \int_0^{2\pi} (\mathrm{D}^k f)(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^k\,(\mathrm{D}^{k-1} f)(x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = 0$$

dacă se presupune $k = 1, 2, \ldots$ (deoarece $(\mathrm{D}^{k-1} f)(0) = (\mathrm{D}^{k-1}f)(2\pi)$ în baza periodicității lui f și a derivatelor sale).

17. Să calculăm $\mathrm{D}f$ dacă F este DP definită prin exemplul (7) cu $n > 1$. Dacă

$$F(f) = \int_0^{\pi} f(x)(1 + x)^n\,\mathrm{d}x$$

va rezulta din (7),

$$(\mathrm{D}F)(f) = -F(\mathrm{D}f) = -\int_0^{\pi} f'(x)(1 + x)^n\,\mathrm{d}x;$$

integrînd prin părți, se deduce

$$(DF)(f) = f(0) - (1 + \pi)^n f(\pi) + n\int_0^{\pi} f(x)(1 + x)^{n-1}\,dx =$$

$$= \delta(f) - (1 + \pi)^n\,\delta_{\pi}(f) + n\int_0^{\pi} f(x)(1 + x)^{n-1}\,dx.$$

18. Fie $v \in C^1(]0,2\pi[)$ și $|v(0+)| < \infty$, $|v(2\pi-)| < \infty$, $D|v(0+)| < \infty$, $|Dv(2\pi-)| < \infty$; atunci are loc egalitatea

$$Dv = [v(0+) - v(2\pi-)]\delta + \{v'\} \tag{11}$$

unde $\{v'\}$ este DP definită prin

$$\{v'\}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (Dv)(x)\, f(x)\,dx.$$

Într-adevăr, din (7) avem, notînd ca de obicei în cazul DP regulate $v = F_v$:

$$DF_v(f) = -F_v(Df) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} v(x)(Df)(x)\,dx;$$

integrînd prin părți, rezultă (folosind periodicitatea lui f):

$$DF_v(f) = \frac{1}{2\pi}\,v(0+)f(0+) - \frac{1}{2\pi}\,v(2\pi-)f(2\pi-) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v'(x)f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,[v(0+) - v(2\pi-)]\,f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v'(x)\,f(x)\,dx$$

ceea ce coincide cu (11).

În particular, dacă $\{v'\} = 0$ iar $v(0+) - v(2\pi-) = 1$, se deduce $Dv = \delta$.

19. Dacă $v \in C^1(]0, x_0[\cup]x_0, 2\pi[)$ iar $v(0+)$, $v'(0+)$, $v(x_0+)$, $v(x_0-)$, $v'(x_0+)$, $v'(x_0-)$, $v(2\pi-)$, $v'(2\pi-)$ există și sînt finite, $0 < x_0 < 2\pi$, atunci

$$Dv = [v(0+) - v(2\pi-)]\delta + [v(x_0+) - v(x_0-)]\delta_{x_0} + \{v'\}. \tag{12}$$

unde $\{v'\}$ are aceeași semnificație ca la exemplul 18. Egalitatea (12) se obține scriind

$$DF_v(f) = -F_v(Df) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{x_0} (Df)(x)\,v(x)\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{2\pi} (Df)(x)\,dx$$

și integrînd prin părți.

În particular, dacă v este funcție periodică, deci avem $v(0+) = v(2\pi-)$, rezultă egalitatea

$$Dv = [v(x_0+) - v(x_0-)]\delta_{x_0} - \{v'\} \tag{12'}$$

iar dacă, în plus $v(x_0+) - v(x_0-) = 1$ și $\{v'\} = 0$, din (12') se deduce

$$Dv = \delta_{x_0} \tag{13}$$

o astfel de funcție v se poate construi imediat scriind

$$v(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } & 0 < x < x_0 \\ 1 \text{ pentru } & x_0 < x < 2\pi \end{cases}$$

pentru care $v(0+) = 0$, $v'(0+) = 0$, $v(x_0-) = 0$, $v(x_0+) = 1$, $v'(x_0-) = v'(x_0+) = v(2\pi-) = v'(2\pi-) = 0$.

20. Să calculăm DF_v și D^2F_v dacă $v(x) = |\sin x|$. Deoarece $v \in \mathcal{C}$, avem $F_v = v$; apoi calculînd $DF_v(f) = -F_v(Df)$, găsim :

$$DF_v(f) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (Df)(x)\,|\sin x|\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\sin x\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f'(x)\sin x\,dx$$

adică, integrînd prin părți

$$DF_v(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx\,; \quad \text{așadar}$$

$$F_v' = \begin{cases} \cos x \text{ pentru } & 0 < x < \pi \\ -\cos x \text{ pentru } & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Calculînd $D^2F_v(f) = F_v(D^2f)$ avem

$$D^2F_v(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (D^2f)(x)\,|\sin x|\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f''(x)\sin x\,dx,$$

iar după două integrări prin părți, se obține $D^2F_v(f) = \frac{1}{\pi}f(\pi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin x|\,dx$

și deci $D^2v = -v + 2\delta_{\pi}$.

Se verifică astfel faptul că derivatele funcțiilor continue periodice sînt DP care în general, nu sînt distribuții regulate.

Observația 1. În baza definiției 1, a), DP F va fi reală dacă se verifică egalitatea

$$\overline{F}(f) = \overline{F(\bar{f})}; \tag{14}$$

de aici nu se deduce că valorile lui F sînt neapărat reale după cum ne arată exemplul distribuției lui Dirac definită prin

$$\delta(f) = f(0),$$

iar $f(0) \in \mathbb{C}$ deși s-a văzut că δ este o distribuție reală (exemplul 8); este ușor de observat că pentru orice DP F se pot defini DP $F_1 = \mathrm{Re}F$ și $F_2 = \mathrm{Im}F$ astfel încît F_1 și F_2 sînt DP reale, iar $F = F_1 + \mathrm{i}F_2$; într-adevăr, deoarece $F(f) \in \mathbb{C}$ pentru orice $f \in \mathcal{D}$, avem $F(f) = F_1(f) + \mathrm{i}F_2(f)$ și rezultă

$$\overline{F(\bar{f})} = \overline{F_1(\bar{f}) + \mathrm{i}F_2(\bar{f})} = \overline{F_1(\bar{f})} - \overline{\mathrm{i}F_2(\bar{f})},$$

iar egalitatea (14) conduce la egalitățile

$$\overline{F_1(\bar{f})} = \overline{F}_1(f), \ \overline{F}_2(\bar{f}) = \overline{F}_2(f)$$

deoarece $\overline{F} = F_1 - \mathrm{i}F_2$.

În particular, dacă F este o DP reală iar $f \in \mathcal{D}$, f avînd valori reale, atunci neapărat $F(f) \in \mathbb{R}$, deoarece în acest caz, din (14) se deduce $\overline{F}(f) = \overline{F(f)}$ (avînd în vedere că $\bar{f} = f$), iar deoarece $\overline{F}(f) = F_1(f) - \mathrm{i}F_2(f)$ rezultă egalitatea $F_1(f) + \mathrm{i}F_2(f) = F_1(f) - \mathrm{i}F_2(f)$ care antrenează $F_2(f) = 0$ (și deci $F(f) = F_1(f) \in \mathbb{R}$).

Dacă $F \in \mathcal{D}'$, conform cu cele de mai sus se poate scrie

$$F = F_1 + \mathrm{i}F_2$$

DP F_1, F_2 fiind reale ($F_1 = \mathrm{Re}\,F$, $F_2 = \mathrm{Im}\,F$); deoarece avem $\overline{F} = F_1 - \mathrm{i}F_2$ rezultă

$$F_1 = \mathrm{Re}F = \frac{1}{2}(F + \overline{F}), \ F_2 = \mathrm{Im}F = \frac{1}{2\mathrm{i}}(F - \overline{F})$$

De asemenea, dacă $F \in \mathcal{D}'$, este valabilă descompunerea

$$F = G + H$$

$F, G \in \mathcal{D}'$, iar F este pară și G este impară (conform cu b și c din definiția 1) unde

$$G = \frac{1}{2}(F + \check{F}), \quad H = \frac{1}{2}(F - \check{F})$$

$\check{F}$ fiind DP definită prin (5) adică $\check{F}(f) = F(\check{f}), f \in \mathcal{D}$, iar $\check{f}(x) = f(-x)$.

5. Convoluția distribuțiilor periodice

La punctul 2 s-a definit operația de convoluție a funcțiilor continue periodice f, g prin $f \divideontimes g : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, unde

$$(f \divideontimes g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (T_t f)(x)\, g(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

cu $T_t(f)(x) = f(x-t)$. Ținînd acum seama de faptul că DP regulate $u \in \mathcal{D}'_r$ se definesc prin relația

$$F_u(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, u(x)\,\mathrm{d}x,\ f \in \mathcal{D} \tag{2}$$

comparînd (1) cu (2) rezultă că dacă $u \in \mathcal{D}$ și $f \in \mathcal{D}$ se pot scrie egalitățile (reamintind că $\check{f}(x) = f(-x)$)

$$(u \divideontimes f)(x) = (f \divideontimes u)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \check{f}(t-x)u(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (T_x \check{f})(t)\, u(t)\,\mathrm{d}t = F_u(T_x \check{f})$$

ceea ce permite definirea în mod natural a convoluției dintre DP F și funcția $f \in \mathcal{D}$ prin

$$(F \divideontimes f)(x) = F(T_x \check{f}) \tag{3}$$

(se verifică imediat că (3) definește un element din $\mathcal{D}'$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$).

Convoluția $(F \divideontimes f)(x)$ definită prin (3) are proprietăți complet asemănătoare proprietăților convoluției (1) stabilite la punctul 2, și pe care le reamintim sub forma următoarei propoziții : (în care vom omite scrierea variabilei x)

Propoziția 1. *Dacă* $F \in \mathcal{D}'$ *și* $f \in \mathcal{D}$ *atunci* :

i. $(F \divideontimes f) \in \mathcal{D}$

i. $(aF) \divideontimes f = a(F \divideontimes f) = F \divideontimes (af),\ a \in \mathbb{C}$

iii. $(F + G) \divideontimes f = F \divideontimes f + G \divideontimes f,\ F, G \in \mathcal{D}'$

iv. $F \divideontimes (f_1 + f_2) = F \divideontimes f_1 + F \divideontimes f_1,\ f_1, f_2 \in \mathcal{D}$

v. $T_t(F \divideontimes f) = (T_t F) \divideontimes f = F \divideontimes (T_t f),\ t \in \mathbb{R}$

vi. $\mathrm{D}^k(F \divideontimes f) = (\mathrm{D}^k F) \divideontimes f = F \divideontimes (\mathrm{D}^k f),\ k = 1, 2, \ldots$

Proprietățile ii—iv sînt evidente, decurgînd direct din definiția (3) și ipotezele impuse lui F și f) ; v rezultă din următorul calcul :

$$T_t(F*f)(x) = (F*f)(x-t) = F(T_{x-t}\check{f}) = F(T_{-t}T_x\check{f}) =$$

$$= (T_tF)(T_x\check{f}) = [(T_t\,F)*f](x)$$

obținîndu-se prima egalitate din v ; apoi,

$$F(T_{x-t}\,f) = F[T_x(T_{-t}\,f)] = F[T_x(T\check{f})] = [F*(T_t\,f)](x)$$

și s-a dedus a doua egalitate v).

Proprietățile i. și vi. sînt legate între ele, așa că le vom justifica împreună.

În primul rînd convoluția $F*u$ este o funcție periodică deoarece $(F*f)(x+2\pi) = F(T_{x+2\pi}\check{f}) = F(T_x\check{f}) = (F*f)(x)$, $\check{f}$ și f fiind periodice (cu perioada 2π).

În al doilea rînd avem

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_{-t}\,F - F) = DF \tag{4}$$

limita fiind considerată în sensul convergenței din $\mathcal{D}'$ (vezi (2) de la punctul 4) ; relația (4) se mai poate scrie și sub forma

$$\frac{1}{t}(T_{-t}\,F - F) \xrightarrow{\mathcal{D}'} DF \quad (t\to 0) \tag{4'}$$

și pentru a o justifica fie $(t_n)_{n\geqslant 1}$ un șir oarecare din $\mathbb{R}$, $t_n \to 0$ $(n\to\infty)$. Cum

$$\frac{1}{t_n}(T_{-t_n}F - F)(f) = \frac{1}{t_n}[(T_{-t_n}F)(f) - F(f)] = \frac{1}{t_n}[F(T_{t_n}f) - F(f)]$$

utilizînd definiția translației unei DP $[(T_t\,F)(f) = F(T_{-t}\,f)]$; deoarece $(T_{t_n}f)(x) = f(x-t_n)$, avem în continuare

$$\frac{1}{t_n}(T_{-t_n}F - F)(f) = F\left[\frac{f(x-t_n)-f(x)}{t_n}\right]$$

și cum $\dfrac{f(x-t_n)-f(x)}{t_n} \to -Df(x)$ cînd $n\to\infty$, în baza continuității lui F se deduce

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}(T_{-t_n}F - F)(f) = \lim_{n\to\infty}F\left[\frac{f(x-t)-f(x)}{t_n}\right] =$$

$$= F\left[\lim_{n\to\infty}\frac{f(x-t_n)-f(x)}{t_n}\right] = F(-Df) = -F(Df) = DF\,(f).$$

În baza faptului că șirul $(t_n)_{n\geqslant 1}$ este arbitar, egalitatea (4) este justificată : are loc relația (4') dacă notăm $G_n = \dfrac{1}{t_n}(T_{-t_n}F - F)$ și s-a dedus că $G_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} G = DF$.

În baza acestui rezultat, să arătăm că $F\ast f$ este derivabilă în orice punct $x\in\mathbb{R}$, iar derivata este egală cu $(DF)\ast u$; într-adevăr

$$\frac{1}{t}[(F\ast f)(x+t)-(F\ast f)(x)]=\frac{1}{t}[T_{-t}(F\ast f)(x)-(F\ast f)(x)]=$$

$$=\frac{1}{t}(T_{-t}F-F)(T_x f)\to(DF)(T_x f)=[(DF)\ast f](x)\ \text{cînd}\ t\to 0.$$

Din aproape în aproape, va rezulta că are loc egalitatea $D^k(F\ast f)=(D^kF)\ast f$ $k=1,2,\ldots$ adică $F\ast f\in\mathcal{S}$ și propoziția 1 va fi complet demonstrată dacă se arată ultima egalitate din vi; pentru aceasta se utilizează proprietatea v, și vom putea scrie

$$\frac{1}{t}[(F\ast f)(x+t)-(F\ast f)(x)]=F\ast\left[\frac{1}{t_n}(T_{-t}f-f)\right](x)=$$

$$=F\left(T_x\left\{\frac{1}{t}[T_{-t}\hat{f}-f]\right\}\right)\to F(T_x D\check{f})=(F\ast[D\check{f}])(x)\ (t\to 0),$$

iar prin inducție va rezulta $D^k(F\ast f)=F\ast(D^k f)$, $k=1,2,\ldots$

Exemple 1. Să calculăm $\delta\ast f$, unde $\delta\in\mathcal{S}'$ este distribuția lui Dirac, iar $f\in\mathcal{S}$. În baza lui (3) avem

$$(\delta\ast f)(x)=\delta(T_x\check{f})=<\delta(t),\ f(x-t)>=f(x)$$

și deci are loc egalitatea

$$\delta\ast f=f,\ f\in\mathcal{S} \tag{5}$$

2. Să calculăm $(D^k\ast\delta)f$, $f\in\mathcal{S}$, $k=1,2,\ldots$

Folosind (5) și vi din propoziția 1, se poate scrie $(D^k\delta)\ast f=D^k(\delta\ast f)=D^k f$, rezultînd egalitatea

$$(D^k\delta)\ast f=D^k f,\ f\in\mathcal{S},\ k=1,2,\ldots \tag{5'}$$

Pentru a defini produsul de convoluție a două DP F și G, se presupune inițial că ele sînt DP regulate, corespunzînd funcțiilor $u, v\in\mathcal{C}$ (deci $u=F_u$, $v=G_v$) și să calculăm valoarea funcționalei $(F_u\ast G_v)(f)$, $f\in\mathcal{D}$; deoarece

$$(F_u\ast G_v)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(t)\,v(x-t)\,dt$$

rezultă

$$(F_u\ast G_v)(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}u(t)\,v(x-t)f(x)\,dt\,dx \tag{6}$$

Cum $\check{G}_v \dot{*} f \in \mathcal{C}$ (conform cu i din Propoziția 1) are sens $F_u(\check{G}_v \dot{*} f)$, iar

$$F_u(\check{G}_v \dot{*} f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\,(\check{G}_v \dot{*} f)(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\, v(t-x) f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,; \tag{6'}$$

comparînd (6) cu (6') se deduce egalitatea $(F_u \dot{*} G_v)(f) = F_u(\check{G}_v \dot{*} f)$, valabilă pentru orice $f \in \mathcal{D}$ și orice distribuții regulate F_u, G_v și de aceea, în baza principiului stabilit la începutul punctului 4, vom da definiția următoare :

Definiția 1. *Prin convoluția distribuțiilor periodice F și G se înțelege aplicația $F \dot{*} G : \mathcal{D}' \times \mathcal{D}' \to \mathbb{C}$ definită prin*

$$(F \dot{*} G)(f) = F(\check{G} \dot{*} f),\ (\forall) f \in \mathcal{D} \tag{7}$$

unde $\check{G}(f) = G(\check{f}), \check{f}(x) = f(-x)$.

Definiția 1 este justificată prin faptul că în cazul DP regulate, ea coincide cu definiția standard (vezi punctul 2) și mai rămîne de arătat că membrul drept a lui (7) definește o funcțională liniară și continuă pe $\mathcal{D}$ (în consecință, $F \dot{*} G$ va fi o funcțională liniară și continuă definită pe $\mathcal{D}$).

Liniaritatea aplicației $F \dot{*} G$ fiind evidentă, rămîne de arătat că pentru orice șir $(f_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathcal{D}$ astfel încît $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ avem $(F \dot{*} G)(f_n) \to (F \dot{*} G)(f)$; pentru aceasta fie $k = k_G$ ordinul distribuției G (vezi teorema 1 de la punctul 3) și vom deduce :

$$|(\check{G} \dot{*} f_n)(x) - (\check{G} \dot{*} f)(x)| = |[\check{G} \dot{*} (f_n - f)](x)| =$$

$$= |\check{G}[T_x(\check{f}_n - f)]| \leqslant c[\|T_x(f_n - f)\| + \|\mathrm{D}T_x(f_n - f)\| +$$

$$+ \ldots + \|\mathrm{D}^k T_x(f_n - f)\|]$$

Rezultă $\check{G} \dot{*} f_n \to \check{G} \dot{*} f\ (n \to \infty)$, convergența fiind uniformă și în mod analog se arată că $\mathrm{D}^j(\check{G} \dot{*} f_n) \to \mathrm{D}^j(\check{G} \dot{*} f)\ (n \to \infty)$ uniform (avem $\mathrm{D}^j(\check{G} \dot{*} f_n) = \check{G} \dot{*} (\mathrm{D}^j f_n)$), $j = 1, 2, \ldots$, așadar $\check{G} \dot{*} f_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \check{G} \dot{*} f (n \to \infty)$

și deoarece $(\check{G}*f_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir din $\mathcal{Q}$, iar F este o funcțională liniară și continuă definită pe $\mathcal{Q}$, vom putea scrie

$$\lim_{n\to\infty} F(\check{G}*f_n) = F(\check{G}*f) = F[\lim_{n\to\infty}(\check{G}*f_n)].$$

Prin urmare prin (7) se definește un element din $\mathcal{Q}'$ pentru orice $F,\ G\in\mathcal{Q}'$.

Exemple 3. Să calculăm

$$\delta*F,\ F*\delta,\ F\in\mathcal{Q}',$$

δ fiind distribuția lui Dirac.

În baza definiției 7, avem

$$(\delta*F)(f) = \delta(\check{F}*f) = (\check{F}*f)(0) = F(f)$$

ultima egalitate rezultînd din (3) (deoarece $(F*f)(0) = F(T_0\check{f}) = F(\check{f})$, rezultă $(\check{F}*f)(0) = F(\check{f}) = F(f)$) ; așadar, avem egalitatea

$$\delta*F = F,\ \text{pentru orice}\ F\in\mathcal{Q}'$$

Apoi

$$(F*\delta)(f) = F(\check{\delta}*f) = F(\delta*f) = F(f)$$

deoarece δ este o distribuție pară (deci $\check{\delta}=\delta$) și conform exemplului 1 avem $\delta*f = f$; așadar,

$$F*\delta = F,\ \text{pentru orice}\ F\in\mathcal{Q}'$$

Din acest exemplu, rezultă egalitățile

$$F*\delta = \delta*F = F,\ \text{pentru orice}\ F\in\mathcal{Q}'. \tag{8}$$

Proprietățile produsului de convoluție, al DP F, G sînt analoage proprietăților convoluțiilor funcțiilor periodice ; le vom exprima în propoziția 3 după ce vom demonstra următoarea teoremă relativă la posibilitatea aproximării DP prin DP regulate.

Teorema 1. *Dacă $F\in\mathcal{Q}'$, există un șir $(F_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathcal{Q}'_r$ astfel încît*

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{Q}} F.$$

Fie $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din $\mathcal{Q}$ care aproximează unitatea (vezi definiția 3 de la punctul 2) și să notăm $f_n = F*\varphi_n$. Conform celor expuse la începutul acestui punct șirul $(f_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir din $\mathcal{Q}$, iar funcțiile f_n pot fi interpretate ca fiind DP ; vom scrie, ca de obicei $F_n = F_{f_n} = f_n$, F_n fiind DP (regulată) atașată lui f_n. În această situație, pentru un $f\in\mathcal{Q}$ arbitrar, avem, utilizînd definiția (7) a convoluției

$$F_n(f) = \langle F_n, f\rangle = (F*\varphi_n)(f) = F(\check{\varphi}_n*f)$$

iar dacă în plus $\check{\varphi}_n = \varphi_n$ (ceea ce se întîmplă, de pildă, în cazul şirului particular de la exemplul 1, punctul 2), avem

$$F_n(f) = F(\varphi_n * f),\ f \in \mathcal{D}$$

Deoarece $\varphi_n * f \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ (lema 1, punctul 2) avem $\lim_{n\to\infty} F_n(f) = \lim_{n\to\infty} F(\varphi_n * f) = F(\lim_{n\to\infty} \varphi_n * f) =$ $= F(f)$, adică $F_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$.

Observaţia 1. Presupunînd $\varphi_n(x) = c_n(1 + \cos x)^n$ (exemplul 1, punctul 2), φ_n va fi un polinom trigonometric, deci se va putea scrie sub forma complexă $\varphi_n(x) = t_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \operatorname{cis}(kx) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$; rezultă, în baza lui (3)

$$(F * \varphi_n)(x) = F(T_x \check{\varphi}_n) = F\left[\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik(x-t)}\right] = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k F[e^{ik(x-t)}] =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k F(e^{ikx} \cdot e^{ikt}) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx} F(e^{ikt}) = \sum_{k=-n}^{n} \beta_k e^{ikx}$$

cu $\beta_k = \alpha_k F(e^{ikt}) \in \mathbb{C}$. Aşadar, în baza teoremei 1, polinomul trigonometric $\sum_{k=-n}^{n} \beta_k e^{ikx}$ va converge către F (în sensul convergenţei din $\mathcal{D}'$); cu alte cuvinte, pentru orice DP F, există cel puţin un şir de polinoame trigonometrice care converge (în sensul convergenţei din $\mathcal{D}'$) către F (evident fiecare polinom trigonometric din şirul considerat se interpretează ca fiind o DP regulată).

Teorema 1 arată că toate proprietăţile convoluţiei funcţiilor periodice se transferă (prin trecere la limită) la convoluţia distribuţiilor periodice; vom scrie aceste proprietăţi sub forma unei propoziţii:

Propoziţia 3. *Fie* $F, G, H \in \mathcal{D}'$, $a \in \mathbb{C}$; *atunci*:

i. *Dacă* $(f_n)_{n\geqslant 1}$, $(g_n)_{n\geqslant 1}$ *sînt şiruri din* $\mathcal{D}$ *astfel încît* $F_n = F_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$, $G_n = G_{g_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} G$, *atunci* $F_n * G \xrightarrow{\mathcal{D}'} F * G$ *şi* $F * G_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} F * G$

ii. $F * G = G * F$.

iii. $(aF) * G = F * (aG) = a(F * G)$

iv. $(F + G) * H = F * H + G * H$

v. $(F * G) * H = F * (G * H)$.

vi. $T_t(F * G) = (T_t F) * G = F * (T_t G)$, $t \in \mathbb{R}$.

Demonstraţiile se realizează cu uşurinţă în baza celor expuse mai sus, aproximînd F, G, H prin DP regulate şi trecînd apoi la limită.

6. Spațiul Hilbert L_2 al distribuțiilor periodice

Fie $\mathcal{C}$ spațiul funcțiilor periodice definite la punctul 1; este ușor de verificat că aplicația $P : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$P(u, v) = (u, v)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\, \bar{v}(x)\, dx \tag{1}$$

determină un produs scalar în $\mathbb{C}$ (vezi A.M. Cap. II, punctul 1); vom nota prin $\|u\|_0$ norma dedusă din acest produs scalar, adică

$$\|u\|_0 = \sqrt{P(u, u)} = \sqrt{(u, u)_0} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x)|^2\, dx}. \tag{2}$$

Definiția 1. *Prin L_2 vom desemna mulțimea* DP $F \in \mathcal{D}'$ *având proprietatea următoare: dacă $F \in L_2$, atunci există un șir $(u_n)_{n \geq 1}$ din $\mathcal{C}$, fundamental în norma* (2) *astfel încît*

$$F_{u_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$$

În aceste condiții vom spune că șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ converge către $F \in \mathcal{D}'$ în sensul lui L^2 și vom scrie

$$u_n \xrightarrow{L_2} F \tag{3}$$

Cu alte cuvinte, relația (3) va avea loc dacă există un șir $(u_n)_{n \geq 1}$ din $\mathcal{C}$ astfel încît $\|u_n - u_m\| \to 0$, dacă $n, m \to \infty$, iar $F_{u_n}(f) \to F(f)$ $(n \to \infty)$ pentru orice $f \in \mathcal{D}$.

Observația 1. *Convergența $F_{u_n}(f) \to F(f)$ $(n \to \infty)$ se transcrie sub forma*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(x) f(x)\, dx \to F(f) = \langle F, f \rangle, \quad (n \to \infty), f \in \mathcal{D} \tag{4}$$

sau, utilizînd produsul scalar (1), sub forma

$$(u_n, \bar{f})_0 \to F(f), \quad (n \to \infty), f \in \mathcal{D}. \tag{4'}$$

Teorema 1. *Dacă $(u_n)_{n \geq 1}$ este un șir fundamental din $\mathcal{C}$ în sensul normei $\|\cdot\|_0$ definită prin* (2) *atunci șirul $(F_n)_{n \geq 1}$ din $\mathcal{D}'$ definit prin $F_n = F_{u_n}$ converge, în sensul convergenței din $\mathcal{D}'$, către o* DP *de ordin zero.*

Șirul $(F_n(f))_{n\geqslant 1}$ este un șir fundamental din $\mathbb{C}$, deoarece

$$|F_n(f) - F_m(f)| = |(u_n, \bar{f})_0 - (u_m, \bar{f})_0| = |(u_n - u_m, \bar{f})_0| \leqslant \|u_n - u_m\|_0 \|\bar{f}\|_0 \to 0 (n, m \to \infty)$$

ultima inegalitate obținîndu-se prin aplicarea inegalității lui Schwartz ; deci acest șir va avea limită în $\mathbb{C}$, pe care o vom nota $F(f)$. Așadar,

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F_n(f)$$

și evident $F : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$ va fi o formă liniară (deoarece fiecare F_n este o formă liniară). Rămîne de arătat că F este continuă ; pentru aceasta fie $N \in \mathbb{N}$ suficient de mare pentru a avea $\|u_n - u_m\|_0 \leqslant 1$, dacă $n, m \geqslant N$ (posibil, deoarece șirul $(u_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathfrak{C}$ este fundamental) și fie $M = 1 + \max\{\|u_1\|_0, \ldots, \|u_N\|_0\}$.

Pentru $n = 1, 2, \ldots, N$ avem deci $\|u_n\|_0 \leqslant M$, iar dacă $n > N$ avem

$$\|u_n\|_0 = \|u_n - u_N + u_N\|_0 \leqslant \|u_n - u_N\|_0 + \|u_N\|_0 \leqslant 1 + \|u_N\|_0 \leqslant M$$

De aceea, aplicînd încă o dată inegalitatea lui Schwartz. se deduce

$$|F_n(f)| = |(u_n, \bar{f})_0| \leqslant \|u_n\|_0 \|\bar{f}\|_0 = \|u_n\|_0 \|f\|_0 \leqslant M\|f\|_0 ; \tag{5}$$

ținînd seama că la punctul 1 s-a definit norma $\|f\| = \max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f(x)|$ rezultă

$$\|f\|_0^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \leqslant \|f\|^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = \|f\|$$

adică $\|f\|_0 \leqslant \|f\|$ (deci norma $\|\cdot\|_0$ este dominată prin norma $\|\cdot\|$). Revenind la (5) se deduce inegalitatea

$$|F_n(f)| \leqslant M\|f\|$$

care rămîne valabilă și după trecere la limită ($\lim_{n\to\infty} |F_n(f)| = |\lim_{n\to\infty} F_n(f)| = |F(f)|$ rezultînd relația

$$|F(f)| \leqslant M\|f\|, \quad f \in \mathfrak{F}$$

care arată că forma liniară F este o DP de ordinul zero.

Teorema 2. *Dacă* $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *sînt șiruri din* $\mathfrak{C}$ *astfel încît*

$$u_n \overset{L_2}{\to} F, \; v_n \overset{L_2}{\to} G$$

atunci $F = G$ *dacă și numai dacă* $\|u_n - v_n\|_0 \to 0$ $(n \to \infty)$.

Condiția este suficientă : într-adevăr, dacă $\|u_n - v_n\|_0 \to 0$ $(n \to \infty)$, se poate scrie

$$|F_n(f) - G_n(f)| = |(F_n - G_n)(f)| = |(u_n - v_n, \bar{f})_0| \leqslant \|u_n - v_n\|_0 \|f\|_0 \to 0$$

$(n \to \infty)$ și deci $\lim_{n\to\infty} [F_n(f) - G_n(f)] = 0$; cum $\lim_{n\to\infty} F_n(f) = F(f)$, $\lim_{n\leftarrow\infty} G_n(f) = G(f)$, rezultă $F(f) = G(f)$, pentru orice $f \in \mathfrak{F}$.ceea ce înseamnă $F = G$. Condiția este necesară : să presupunem $F = G$, adică $F(f) = \lim_{n\to\infty} F_n(f) = \lim_{n\to\infty} G_n(f) = G(f)$, deci $\lim_{n\to\infty} [F_n(f) - G_n(f)] = 0$.

Fie $\varepsilon > 0$ dat și să presupunem $N \in \mathbb{N}$ suficient de mare, astfel încît dacă $n \geqslant N$, $m \geqslant N$

să rezulte $\| (u_n - u_m) - (v_n - v_m) \|_0 < \varepsilon$; să-l fixăm pe $m \geqslant N$ și atunci pentru n arbitrar, $n \geqslant N$, din inegalitatea anterioară rezultă

$$\| u_n - v_n \|_0^2 = (u_n - v_n, u_n - v_n)_0 = (u_m - v_m, u_m - v_m - u_n + v_n)_0 +$$

$$+ (u_m - v_m, u_n - v_n)_0 = (u_m - v_m, u_m - v_m - u_n + v_n)_0 +$$

$$+ (F_n - G_n)(u_m - v_m) \leqslant \| u_m - v_m \|_0 \| (u_m - v_m) +$$

$$+ (v_n - u_n) \|_0 + | F_n - G_n) (u_m - v_m) | \leqslant \varepsilon \| u_m - v_m \|_0 +$$

$$+ |(F_n - G_n)(u_m - v_m)| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

deci $\| u_n - v_n \| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Teorema 3. *L_2 este un subspațiu al spațiului distribuțiilor periodice $\mathfrak{D}'$ (în sensul spațiilor vectoriale) care este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar*

$$(F, G)_0 = \lim_{n \to \infty} (u_n, v_n)_0 \tag{6}$$

dacă $u_n \overset{L_2}{\to} F$, $v_n \overset{L_2}{\to} G$.

Fie șirurile $(au_n)_{n \geqslant 1}$, $a \in \mathbb{C}$, $(u_n + v_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$; ele vor fi fundamentale în $\mathbb{C}$ odată cu șirurile $(u_n)_{n \geqslant 1}$ și $(v_n)_{n \geqslant 1}$ și deci vor exista în L_2 elementele U, V astfel încît $\lim\limits_{n \to \infty} (au_n) = U$, $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n + v_n) = V$; în baza proprietăților limitei avem $\lim (au_n) = a \lim\limits_{n \to \infty} u_n = aF$ și $\lim (u_n + v_n) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n + \lim\limits_{n \to \infty} v_n = F + G$, deci $U = aF$ și $V = F + G$, iar L_2 va fi un spațiu vectorial complex.

Fie șirul $(a_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$, cu $a_n = (u_n, v_n)_0$; acest șir este fundamental deoarece $a_m - a_n = (u_m, v_m)_0 - (u_n, v_n)_0 = (u_n - u_m, v_n - v_m)_0 + (u_n, v_n - v_m)_0 - (u_n - u_m, v_n)_0$ și aplicînd inegalitatea triunghiului, apoi inegalitatea lui Schwartz se deduce

$$| a_m - a_n | \leqslant \| u_n - u_m \|_0 \| v_n - v_m \|_0 + \| u_n \|_0 \| v_n - v_m \|_0 + \| v_n \|_0 \| u_n - u_m \|_0 \to$$

$$\to 0 \ (n, m \to \infty)$$

(din demonstrația teoremei 1 rezultă că $\| u_n \|_0 \leqslant M$, $\| v_n \|_0 \leqslant M$). Prin urmare există $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} (u_n, v_n) \in \mathbb{C}$, iar această limită va fi notată prin $(F, G)_0$, conform cu (6); rămîn de verificat axiomele produsului scalar. Or avem

$$(G, F)_0 = \lim_{n \to \infty} (v_n, u_n)_0 = \lim_{n \to \infty} \overline{(u_n, v_n)}_0 = \overline{\lim_{n \to \infty} (u_n, v_n)_0} = \overline{(F, G)_0}$$

$$(aF, G)_0 = \lim_{n \to \infty} (au_n, v_n)_0 = a \lim_{n \to \infty} (u_n, v_n)_0 = a(F, G)_0,$$

$$(F_1 + F_2, G)_0 = \lim_{n \to \infty} (u_n' + u_n'', v_n)_0 = \lim_{n \to \infty} [(u_n', v_n)_0 + (u_n'', v_n)_0] = (F_1, G)_0 + (F_2, G)_0$$

(dacă $u_n' \xrightarrow{L_2} F_1$, $u_n'' \xrightarrow{L_2} F_2$), iar

$$(F, F)_0 = \lim_{n\to\infty} (u_n, u_n)_0 \geqslant 0,$$

deoarece $(u_n, u_n)_0 \geqslant 0$; presupunînd $(F, F)_0 = 0$ rezultă $\lim_{n\to\infty} (u_n, u_n)_0 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_0^2 = 0$, adică $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_0 = 0$, deci $F = 0$. Așadar (6) definește un produs scalar în L_2 și de remarcat că în baza teoremei 2 limita din (6) nu depinde de șirurile particulare din $\mathcal{E}$ care converg către F respectiv G (dacă $u_n' \xrightarrow{L_2} F$ și $v_n' \xrightarrow{L_2} G$, se deduce $\lim_{n\to\infty} (u_n, v_n)_0 = \lim_{n\to\infty} (u_n', v_n')_0 = (F, G)_0$). Demonstrația teoremei se va încheia dacă arătăm că L_2 este complet în raport cu norma $\|F\|_0 = \sqrt{\lim_{n\to\infty} (u_n, u_n)_0}$; fie $(F_n)_{n\geqslant 1}$ un șir fundamental din L_2, adică $\|F_n - F_m\|_0 \to 0$ $(n, \to \infty)$. Cum $u_n \xrightarrow{L_2} F$, dacă $v \in \mathcal{E}$ și F_v este DP regulată atașată lui v, avem $F_v \in L_2$ (deoarece șirul $(v_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathcal{E}$ cu $v_n = v$ este fundamental iar $\lim_{n\to\infty} v_n = F_v$) și deci

$$\|F_v - F\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|v_n - u_n\|_0^2 = \lim_{n\to\infty} \|v - u_n\|_0 ;$$

rezultă că pentru $v = u_n$ avem $\|F_{u_n} - F\| \to 0$ $(n \to \infty)$ ceea ce înseamnă că $F \in L_2$ poate fi aproximat prin funcții din $\mathcal{E}$. Prin urmare, pentru $n = 1, 2, \ldots$ se poate găsi $v_n \in \mathcal{E}$ cu proprietatea $\|F_n - F_{v_n}\|_0 < \frac{1}{n}$ și atunci șirul $(v_n)_{n\geqslant 1}$ din φ va fi fundamental în norma $\|\cdot\|_0$ deoarece

$$\|v_n - v_m\|_0 = \|F_{v_n} - F_{v_m}\|_0 \leqslant \|F_{v_n} - F_n\| + \|F_n - F_m\|_0 + \|F_m - F_{v_m}\|_0 <$$

$$< \|F_n - F_m\|_0 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0 \ (n, m \to \infty).$$

Așadar, va exista $F \in L_2$ astfel încît $\|F_n - F\|_0 \to 0$ $(n \to \infty)$ dacă șirul $(F_n)_{n\geqslant 1}$ din L_2 este fundamental în norma dedusă din produsul scalar (6), deoarece $\|F_n - F\|_0 \leqslant \|F_n -$

$$- F_{v_n}\|_0 + \|F_{v_n} - F\|_0 < \frac{1}{n} + \|F_{v_n} - F\|_0 \to 0, \ (n \to \infty).$$

Exemple. 1. Fie $u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ astfel încît dacă $0 < a < b < 2\pi$ să avem $u(x) = 1$ dacă $x \in [a, b[$ și $u(x) = 0$, dacă $x \in [0, a[\cup [b, 2\pi]$; să definim distribuția regulată F_u prin

$$F_u(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(x)\, dx, \ f \in \mathcal{D}.$$

Avem $F_u \in L_2$, deoarece șirul $u_n(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^n$ pentru $0 \leqslant x < a$, $u_n(x) = 1$ pentru $a \leqslant$ $\leqslant x < b$, $u_n(x) = \left(\frac{2\pi - x}{2\pi - b}\right)^n$ pentru $b < x < 2\pi$ este un șir din $\mathcal{E}$ (după prelungi-

rea prin perioridicitate, cu perioada 2π), fundamental în norma $\|\cdot\|_0$ (deoarece se verifică ușor că $\|u_n - u_m\|_0^2 = \frac{1}{2}\int_0^a \left[\left(\frac{x}{a}\right)^n - \left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^2 dx + \frac{1}{2\pi}\int_b^{2\pi}\left[\left(\frac{2\pi - x}{2\pi - b}\right)^n - \left(\frac{2\pi - x}{2\pi - b}\right)^m\right]^2 dx$ tinde la zero cînd $n, m \to \infty$, iar

$$F_n(f) = F_{u_n}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^n f(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_b^{2\pi}\left(\frac{2\pi - x}{2\pi - b}\right)^n dx \to$$

$$\to \frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\,dx,$$

pentru că $\left(\frac{x}{a}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{2\pi - x}{2\pi - b}\right)^n \to 0$ (uniform) cînd $n \to \infty$ pe intervalul $]0, a[$ respectiv $]2\pi - b, b[$ și se poate trece la limită sub semnul integral la prima și a treia integrală).

2. Dacă $u : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ este constantă pe porțiuni, atunci distribuția regulată corespunzătoare F_u este un element din L_2; aici

$$F_u(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{x_1} c_1 f(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} c_2 f(x) + \ldots + \frac{1}{2\pi}\int_{x_{n-1}}^{2\pi} c_n f(x)\,dx,\ f \in \mathcal{D}$$

dacă $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2\pi$, iar $f(x) = c_j \in \mathbb{C}$ pentru $x \in]x_{j-1} x_j[$.

Justificarea se poate face cu ajutorul exemplului 1 luînd în considerație termenul $\frac{1}{2\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j} c_j f(x)\,dx = \frac{c_j}{2\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$, iar $F_u(f)$ se obține adunînd acești termeni.

3. Distribuția δ (distribuția lui Dirac) nu este un element din L_2, justificarea realizîndu-se în același mod prin care s-a arătat că $\delta \notin \mathcal{D}_r$ (vezi punctul 3).

7. Spații Sobolev

Spațiile Sobolev sînt spații Hilbert utile în multe probleme teoretice și practice; ele vor fi folosite ulterior, iar aici se va realiza o scurtă introducere în teoria acestor spații, după modelul expus la punctul 1.

Fie $\mathcal{D}$ spațiul funcțiilor periodice indefinit derivabile definit la punctul 1. Aplicația $P : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$P(u, v) = (u,v)_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(x)\bar{v}(x) + \mathrm{D}u(x) \cdot \mathrm{D}\bar{v}(x) + \ldots +$$

$$+ \mathrm{D}^m u(x) \cdot \mathrm{D}^m \bar{v}(x)]\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

determină un produs scalar în $\mathcal{C}$ pentru $m = 0, 1, 2, \ldots$ (se verifică ușor axiomele produsului scalar), iar norma dedusă din acest produs scalar, va fi notată prin $\| u \|_m$; prin urmare, avem

$$\| u \|_m = \sqrt{P(u, u)} = \sqrt{(u, u)_m} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [|u(x)|^2 + |\mathrm{D}u(x)|^2 + \ldots |\mathrm{D}^m u(x)|^2]\, \mathrm{d}x} \tag{2}$$

Definiția 1. *Prin spațiul Sobolev H_m vom înțelege mulțimea distribuțiilor periodice $F \in \mathcal{D}'$ cu proprietatea următoare: dacă $F \in H_m$ atunci există un șir $(u_n)_{n \geq 1}$ din $\mathcal{D}$, fundamental în norma (2)* (deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încît $\| u_n - u_k \|_m < \varepsilon$ dacă $n, k \geq N$) *astfel încît*

$$F_{u_n} \overset{\mathcal{D}'}{\to} F$$

În aceste condiții, vom spune că șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ din $\mathcal{D}$ converge către $F \in \mathcal{D}'$ în sensul lui H_m și vom scrie

$$u_n \overset{Hm}{\to} F \tag{3}$$

Cu alte cuvinte, relația (3) va fi îndeplinită dacă există un șir $(u_n)_{n \geq 1}$ din $\mathcal{D}$ astfel încît $\| u_n - u_k \|_m \to 0$ $(n, k \to \infty)$, iar $F_{u_n}(f) = \langle F_{u_n}, f \rangle \to F(f)$ $(n \to \infty)$ pentru orice $f \in \mathcal{D}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Observația 1. Comparînd definițiile 1 de la punctele 6 și 7, rezultă

$$H_0 = L_2$$

Observația 2. *Limita $F_{u_n}(f) \to F(f)$ $(n \to \infty)$ există (pentru $F \in H_m$) dacă $\| u_n - u_k \|_m \to 0$ $(n, k \to \infty)$, deci dacă și numai dacă $\| u_n - u_k \|_0 \to 0$, $\| \mathrm{D}u_n - \mathrm{D}u_k \|_0 \to 0, \ldots, \| \mathrm{D}^m u_n - \mathrm{D}^m u_k \|_0 \to 0$ $(n, k \to \infty)$ unde $\| \cdot \|_0$ se deduce din (1) pentru $m = 0$ și este norma utilizată la punctul anterior.*

Într-adevăr, din (2) rezultă imediat

$$\|u\|_m^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(x)|^2\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |Du(x)|^2\,dx + \ldots + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D^m u(x)|^2 dx =$$

$$= \|u\|_0^2 + \|Du\|_0^2 + \ldots + \|D^m u\|_0^2 \qquad (2')$$

iar din (2)′ rezultă inegalitățile

$$\|D^j u\|_0 \leqslant \|u\|_m,\ j = 0, 1, \ldots, m \qquad (4)$$

din care se deduce că dacă $F \in H_m$ atunci F împreună cu derivatele ei (în sensul teoriei distribuțiilor) de ordinul $1, 2, \ldots, m$ sînt elemente ale spațiului L_2 definit la punctul anterior. În acest mod, se obține o definiție echivalentă pentru spațiile Sobolev H_m ale distribuțiilor periodice și anume:

Definiția 1′. *Spațiul Sobolev* H_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ *este format din mulțimea distribuțiilor* $F \in \mathcal{D}'$ *cu proprietatea* $F, DF, \ldots, D^m F \in L_2$. Într-adevăr, avem $(D^j F)(f) = (-1)^j F(D^j f)$, iar cum $F(f) = \lim_{n\to\infty} F_{u_n}(f)$, rezultă $(D^j F)(f) = (-1)\lim_{n\to\infty} F_{u_n}(D^j f) = [\lim_{n\to\infty} D^j F_{u_n}(f)]$, ultima limită existînd în L_2 deoarece $\|D^j u_n - D^j u_k\|_0 \to 0$ $(n, k \to \infty)$, deci $(D^j u_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir fundamental din spațiul Hilbert L_2 pentru $j = 0, 1, \ldots, m$.

Teoremele 2 și 3 de la punctul 6 au loc și în cazul spațiilor Sobolev H_m, deci avem $F = G$, $F, G \in H_m$ dacă și numai dacă există șirurile $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathcal{D}$ astfel încît $\|u_n - v_n\|_m \to 0$ $(n \to \infty)$ $(u_n \overset{H_m}{\to} F,\ v_n \overset{H_m}{\to} G$, iar H_m este un subspațiu vectorial al lui L_2, care este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar

$$(F, G)_m = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n)_m,\ u_n \overset{H_m}{\to} F,\ v_n \overset{H_m}{\to} G. \qquad (5)$$

Demonstrațiile fiind adaptări convenabile ale demonstrațiilor teoremelor 2 și 3 de la punctul 6 nu le mai reluăm.

Au loc incluziunile

$$\mathcal{D}' \supset L_2 = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_j \supset \ldots$$

care rezultă evident din (4).

În afară de spațiile Sobolev H_m sînt utilizate și spațiile Sobolev $\overset{\circ}{H}_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ care se definesc în mod analog cu spațiile Sobolev H_m cu singura diferență că locul spațiului $\mathcal{D}$ este luat de spațiul

$\mathring{\mathcal{C}}$, iar locul spațiului $\mathcal{D}$ este luat de spațiul $\mathring{\mathcal{D}}$, unde $\mathring{\mathcal{C}}$ și $\mathring{\mathcal{D}}$ se definesc în modul următor:

Definiția 2. *Prin* $\mathring{\mathcal{C}}$ *se înțelege mulțimea funcțiilor continue pe* $\mathbb{R}$, *periodice, cu perioada standard* 2π, *nule în punctele* $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *iar prin* $\mathring{\mathcal{D}}$ *se va înțelege mulțimea funcțiilor periodice pe* $\mathbb{R}$, *indefinit derivabile pe* $\mathbb{R}$, *nule în vecinătatea punctelor* $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

După cum s-a specificat la punctul 1, utilizarea intervalului $[0, 2\pi]$ se face din motive de simplitate a calculelor, acest interval putînd fi înlocuit cu orice alt interval $[a, b]$ avînd lungimea finită.

Exemple. 1. Fie $u : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^k(2\pi - x)^l$, $k, l = 1, 2, \ldots$; avem $u(0) = u(2\pi) = 0$. iar prelungirea pe $\mathbb{R}$ prin periodicitate, cu perioada 2π conduce la funcția $\tilde{u} \in \mathring{\mathcal{C}}$.

2. Fie $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = 0$ pentru $x \leqslant 0$, $v(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) = e^{-\frac{1}{x}}$, pentru $x > 0$ se știe (vezi A.M. punctul 3 de la cap. I) că $v \in C^\infty(\mathbb{R})$. Funcțiile translatate $v_a(x) = (T_a v)(x) = v(x-a)$, $v_b(x) = (T_{-b}\check{v})(x) = v(b-x)$ vor fi de asemenea indefinit derivabile pe $\mathbb{R}$ dar $v_a(x) = 0$ pentru $x < a$, iar $v_b(x) = 0$ pentru $x > b$; de aceea funcția

$$u_{a,b}(x) = v_a(x)v_b(x) \tag{6}$$

va rezulta indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind nulă atît pentru $x < a$ cît și pentru $x > b$. Prin urmare, cu $a = 0$, $b = 2\pi$ funcția $\tilde{u}_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ va fi periodică, cu perioada 2π, $\tilde{u}_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$, iar $\tilde{u}_{a,b}(a) = 0$, $\tilde{u}_{a,b}(2\pi) = 0$ ($\tilde{u}$ este, ca de obicei, prelungirea prin periodicitate a funcției u) și $\tilde{u}_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Așadar, $\tilde{u}_{a,b} \in \mathcal{D}$.

Prin exemplele 1 și 2 s-a arătat că mulțimile $\mathring{\mathcal{C}}$ și $\mathring{\mathcal{D}}$ nu sînt vide : în plus, ele sînt suficient de bogate în elemente, deoarece dacă $w \in C^\infty(\mathbb{R})$ avem $\tilde{u} \cdot w \in \mathring{\mathcal{C}}$, dacă $\tilde{u}$ este funcția de la exemplul 1, iar $\tilde{u}_{a,b} \cdot w \in \mathring{\mathcal{D}}$, dacă $\tilde{u}_{a,b}$ este funcția de la exemplul 2.

Definiția 3. *Suportul unei funcții* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *notat* $\operatorname{supp}(u)$ *este mulțimea*

$$\operatorname{supp}(u) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ u(x) \neq 0\}^- \tag{7}$$

unde A^- este ca de obicei închiderea mulțimii A (vezi A.M. cap. II punctul 1).

Cu alte cuvinte $x_0 \notin \operatorname{supp}(u)$ dacă și numai dacă există $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, astfel încît $u(x) = 0$ pentru $x \in]x_0 - \varepsilon_1,\ x_0 + \varepsilon_2[$, iar $\operatorname{supp}(u)$ este o mulțime închisă.

Exemple 3. Pentru funcția $u : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definită prin exemplul 1 avem $\operatorname{supp}(u) = [0,2\pi]$; pentru funcția v de la exemplul 2 avem $\operatorname{supp}(v) = [0, \infty]$. De asemenea,

$$\operatorname{supp}(v_a) = [a, \infty],\ \operatorname{supp}(v_b) = [-\infty\ b,],\ \operatorname{supp}(u_{a,b}) = [a.\ b].$$

Lema 1. *Spațiul* $\mathring{\mathcal{C}}$ *este dens în spațiul* $\mathcal{C}$, *iar spațiul* $\mathring{\mathcal{Z}}$ *este dens în spațiul* $\mathcal{Z}$ *(în sensul convergenței uniforme).*

Este suficient să arătăm că spațiul $\mathcal{Z}$ este dens în spațiul $\mathcal{Z}$, deoarece se știe că $\mathcal{Z}$ este dens în $\mathcal{C}$; va rezulta că $\mathcal{Z}$ este dens în spațiul $\mathcal{C}$ și cum $\mathring{\mathcal{Z}} \subset \mathring{\mathcal{C}}$, se deduce că $\mathring{\mathcal{C}}$ este dens în $\mathcal{C}$. Vom nota prin u_δ funcția $\frac{1}{\delta} u_{a,b}\left(\frac{x}{\delta}\right)$, funcția $u_{a,b}$ definită în exemplul 2 având în plus proprietatea $\frac{1}{2\pi}\int_a^b u_{a,b}(x)\,dx = 1$*) și să calculăm integrala cu parametru

$$f_\delta(x) = \frac{1}{2\pi\delta}\int_\alpha^\beta u_{a,b}\left(\frac{x-t}{\delta}\right) f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta u_\delta(x-t) f(t)\,dt \tag{8}$$

unde $[\alpha, \beta] \subset [0,2\pi]$; dacă $0 < \delta < \frac{2\pi - \alpha}{b}$ rezultă $f_\delta(x) = 0$, dacă $x \in [0, \beta + a\delta] \cup$ $\cup [\alpha + b\delta, 2\pi]$ cu $0 < \delta < \frac{\beta - \alpha}{b - a}$ și evident $f_\delta(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ (în baza teoriei integralelor cu parametru). Să arătăm că $\| f_\delta(x) - f(x) \|_0 \to 0\ (\delta \to 0)$: pentru aceasta, cu schimbarea de variabilă $t \to s$, $x - t = s\delta$, rezultă

$$f_\delta(x) = \frac{1}{2\pi\delta}\int_\alpha^\beta u_{a,b}\left(\frac{x-t}{\delta}\right) f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{x-\beta}{\delta}}^{\frac{x-\alpha}{\delta}} u_{a,b}(s) f(x - \delta s)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_a^b u_{a,b}(t)(x - \delta t)\,dt \tag{8'},$$

ultima egalitate rezultînd din faptul că pentru $x \in [0,2\pi]$ și $\delta > 0$ suficient de mic, intervalul de integrare $\left[\frac{x-\beta}{\delta}, \frac{x-\alpha}{\delta}\right]$ va avea lungimea mai mare decît intervalul

---

*) Cum $u_{a,b}(x) \geqslant 0$, avem $\int_a^b u_{a,b}(x)\,dx \neq 0$ și scriind $cu_{a,b}$ în loc de $u_{a,b}$ cu $c = \frac{1}{\frac{1}{2x}\int_a^b u_{a,b}(x)\,dx}$ funcția $u_{a,b}$ are proprietatea cerută.

$[a, b]$, iar în afara acestui ultim interval $u_{a,b}(x) = 0$. Deoarece $\frac{1}{2\pi}\int_a^b u_{a,b}(t)\,dt = 1$, din (8′) se deduce

$$|f_\delta(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_a^b u_{a,b}(t) f(x - \delta t)\,dt - f(x)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_a^b u_{a,b}(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_a^b u_{a,b}(t)\,|f(x - \delta t) - f(x)|\,dt.$$

Cum f este continuă pe $[a, b]$, va fi uniform continuă pe acest interval, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît să avem $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, de îndată ce $|y - x| < \eta$; pentru $y = x - \delta t$ se deduce $\delta|t| < \eta$ (inegalitate realizabilă deoarece $|t| \leqslant 2\pi$) și se deduce $|f_\delta(x) - f(x)| < \varepsilon\int_a^b \frac{1}{2\pi} u_{a,b}(t)\,dt = \varepsilon$ pentru $\delta > 0$ suficient de mic, ceea ce înseamnă $\lim_{\delta\to 0} f_\delta(x) = f(x)$, uniform în raport cu $x \in [0, 2\pi]$. Faptul că $D^j f_\delta \to D^j f$ se justifică în mod analog, ținînd seama că din (8′) se deduce $D^j f_\delta(x) = \frac{1}{2\pi\delta}\int_a^b D^j u_{a,b}\left(\frac{x-t}{\delta}\right) f(t)\,dt =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_a^b u_{a,b}(t) D^j f(x - t\delta)\,dt, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Observația 3. Deoarece norma $\|\cdot\|_0$ din L_2 este dominată de norma uniformă $\|\cdot\|$, va rezulta că spațiul $\mathring{\mathfrak{D}}$ este dens (în sensul metricei din L_2) în spațiul L_2; va rezulta deci $L_2 = H_0$ și cum $H_0 = \mathring{H}_0$ avem

$$L_2 = H_0 = \mathring{H}_0$$

Observația 4. Dacă $F \in \mathring{H}_1$, atunci $F \in \mathfrak{D}'_r$.

Într-adevăr în ipoteza $F \in \mathring{H}_1$, va exista un șir $(u_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathring{\mathfrak{D}}$ astfel încît $u_n \overset{H_1}{\to} F$, deci $\|u_n - u_k\|_1 \to 0$ $(n, k \to \infty)$ și $F_{u_n}(f) \to F(f)$ $(n \to \infty)$. Or, $u_n \overset{H_1}{\to} F$, înseamnă $\|u_n - u_k\|_0 \to 0$, $\|Du_n - Du_k\|_0 \to 0$ și deoarece $w_{n,k}(x) - w_{n,k}(0) = \int_0^x w'_{n,k}(t)\,dt$, avem

$w_{n,k}(0) = 0$ și deci $|w_{n,k}(x)| \leqslant \int_0^{2\pi} w'_{n,k}(t)\,dt \leqslant \sqrt{\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} w'^2_{n,k}(t)dt}$ (cu $w_{n,k} =$

$= u_n - u_k$), adică $|u_n(x) - u_k(x)| \leqslant C_1 \|u_n - u_k\|_1$, $x \in [0, 2\pi]$. Așadar șirul $(u_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathring{\mathfrak{A}}$ va fi uniform convergent iar limita sa va fi neapărat o funcție continuă.

8. Distribuții periodice de mai multe variabile

Pînă acum s-au avut în vedere DP de o singură variabilă; teoria distribuțiilor periodice de mai multe variabile se construiește cu ușurință pe baza considerentelor din punctele anterioare înlocuind mulțimea $\mathcal{C}$ prin mulțimea $\mathcal{C}^n$, $n > 1$ a funcțiilor continue pe $\mathbb{R}^n$, periodice cu perioada 2π în raport cu toate variabilele, iar $\mathfrak{A}$ se va înlocui prin $\mathfrak{A}^n$, mulțimea funcțiilor indefinit derivabile de n variabile, periodice, cu perioada 2π în toate variabilele sale (rolul intervalului $[0.\ 2\pi]$ este jucat aici de către cubul n-dimensional $[0, 2\pi]^n = \underbrace{[0,2\pi]\times[0,2\pi] \times \ldots \times [0,2\pi]}_{n \text{ ori}}$, iar $f : [0,2\pi]^n \to \mathbb{C}$). Norma lui f se definește în mod analog,

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,2\pi]^n} |f(x)|,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

iar derivatele $D^k f$ trebuie înlocuite prin derivate parțiale:

$$D^k f = D^{k_1}_{x_1} D^{k_2}_{x_2} \ldots D^{k_n}_{x_n} f,\ k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k,\ k_j = 0, 1, \ldots, k,$$
$$j = 1, \ldots, n.$$

Dacă $f, g \in \mathcal{C}^n$, convoluția acestor funcții $f \dot{*} g$ se definește în mod similar cazului unei singure variabile

$$(f \dot{*} g)(x) = \int_{[0,2\pi]^n} f(x - t)g(t)\,dt \left[= \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(x_1 - t_1, \ldots,\right.$$

$$\left. \ldots, x_n - t_n)(g(t_1, \ldots t_n)\,dt_1 \ldots dt_n \right],$$

iar proprietățile convoluției din cazul $n = 1$ se extind și pentru $n > 1$. O *distribuție periodică* din $\mathbb{R}^n$ va fi, prin definiție, o funcțională liniară și continuă definită pe spațiul $\mathfrak{A}^n$; notînd cu $F(f) =$

$= <F, f>$, $f \in \mathcal{D}^n$ valoarea distribuției F pentru funcția f, vor trebui verificate cele trei condiții:

i. $F(f) \in \mathbb{C}$, pentru orice $f \in \mathcal{D}^n$

i. $F(af + bg) = aF(f) + bF(g)$ pentru orice $f, g \in \mathcal{D}^n$ și orice $a, b \in \mathbb{C}$

iii. $F(f_j) \to F(f)$, pentru orice șir $(f_j)_{j \geqslant 1}$ din $\mathcal{D}^n$ astfel încît $f_j \xrightarrow{\mathcal{D}^n} f$ însemnă $\| D^k f_j - D^k f \| \to 0$, $(j \to \infty)$, pentru orice $k = 0, 1, \ldots)$

Vom scrie $F \in (\mathcal{D}^n)'$, iar toate operațiile definite pentru DP unidimensionale vor avea un corespondent și pentru DP n-dimensionale; de exemplu, dacă $F \in (\mathcal{D}^n)'$ atunci F admite derivate de orice ordin, regula de derivare fiind aceeași

$$D^k F(f) = (-1)^k F(D^k f) \quad \text{care înseamnă} \quad D^{k_1}_{x_1} D^{k_2}_{x_2} \ldots D^{k_n}_{x_n} F(f) =$$

$$= (-1)^{k_1 + k_2 + \ldots, k_n} F(D^{k_1}_{x_1} D^{k_2}_{x_2} \ldots D^{k_n}_{x_n} f)$$

și evident ordinea de derivare este indiferentă (deoarece f fiind indefinit derivabilă, ordinea de derivare se poate realiza în mod convenabil). Ne oprim aici cu considerațiile privind DP n-dimensionale cu mențiunea că dacă vor fi necesare anumite proprietăți ale acestora, ele vor fi justificate la momentul corespunzător.

9. Distribuțiile lui Schwartz și distribuțiile periodice

Vom utiliza acum notațiile introduse de L. Schwartz prin care $\mathcal{D}$ este mulțimea funcțiilor-test (adică a funcțiilor indefinit derivabile în $\mathbb{R}^n$ avînd suportul compact), iar prin D_K se înțelege mulțimea funcțiilor test φ, avînd proprietatea $\text{supp}\,(\varphi) \subset K$, $K \subset \mathbb{R}^n$ fiind o mulțime mărginită oarecare.

Funcționalele (formele) liniare și continue pe $\mathcal{D}$ vor defini mulțimea distribuțiilor $\mathcal{D}'$ iar funcționalele (formele) liniare și continue pe $\mathcal{D}_K$ vor forma mulțimea distribuțiilor D'_K. Deoarece prin transformări simple putem presupune întotdeauna $K \subset [0, 2\pi]^n$, se deduce că mulțimea distribuțiilor $\mathcal{D}'_K$ poate fi identificată cu mulțimea distribuțiilor periodice $(\mathcal{D}_n)'$; de aceea doar teoria distribuțiilor din $\mathcal{D}'$ nu se încadrează direct în teoria expusă în punctele anterioare. Dar această teorie este complet asemănătoare teoriei distribuțiilor periodice și de aceea proprietățile deduse anterior pentru DP nu le vom demonstra din nou (pentru edificare, vezi tratatul lui Gelfand-Șilov tradus în limba română la Editura Științifică și Enciclopedică).

Vom prezenta, în continuare, cîteva proprietăți ale distribuțiilor lui Schwartz din $\mathcal{D}'$, care vor fi utilizate ulterior și care nu au fost amintite pînă acum.

i. Dacă $F \in \mathcal{D}'$, iar $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, atunci $aF \in \mathcal{D}'$ și avem

$$(aF)(\varphi) = F(a\varphi) \text{ sau } <aF, \varphi> = <F, a\varphi>, \quad \varphi \in \mathcal{D};$$

ii. Dacă A este o transformare liniară nesingulară din $\mathbb{R}^n$, atunci

$$<F(Ax), \varphi(x)> = \det A <F(x), \varphi(A^{-1}x)>, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

În particular, dacă A este o omotetie $(x \to \alpha x, \alpha > 0)$ avem

$$<F(\alpha x), \varphi(x)> = \alpha^n <F(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)> ;$$

iii. Dacă $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ și are zerourile $(x_n)_{n \geqslant 1}$ simple, atunci

$$\delta[a(x)] = \sum_n \frac{1}{|a'(x_n)|} \delta(x - x_n),$$

$$\delta^{(k)}[a(x)] = \sum_n \frac{1}{|a'(x_n)|} \left[\frac{1}{a'(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]^k \delta(x - x_n);$$

iv. Dacă $H(x) = 1_+$ este funcția unitate ($H(x) = 0$ pentru $x < 0$, $H(x) = 1$, pentru $x > 0$) atunci

$$H' = \delta, H^{(k)} = \delta^{(k+1)}, 1, 2, \ldots$$

unde $H(\varphi) = <H, \varphi> = \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, $\varphi \in \mathcal{D}$, $\delta^{(k)}(\varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$;

v. Dacă $f \in \mathcal{D}'$, există $f_1 \in \mathcal{D}'$, determinată pînă la o constantă aditivă, astfel încît

$$<f_1, \varphi> = -<f, \varphi'> ;$$

iar f_1 se numește primtivă (în $\mathcal{D}'$) pentru f;

vi. Se spune că distribuția $F \in \mathcal{D}'$ este nulă in mulțimea deschisă $A_n \subset \mathbb{R}^n$, dacă $F(f) = 0$, pentru orice $f \in \mathcal{D}$ cu supp $(f) \subset A_n$; distribuția F se spune că este concentrată pe mulțimea închisă $B \subset \mathbb{R}^n$ dacă F este nulă pe complementara lui B, iar cea mai mică mulțime pe care este concentrată distribuția F se numește suportul acestei distribuții și se notează prin supp (F) (mulțimea supp (F) poate fi mărginită sau nu).

Unele aplicații ale DP vor fi sudiate în capitolul VI.

INTRODUCERE ÎN TEORIA PROBABILITĂȚILOR

1. Elemente din teoria măsurii

Fie R o mulțime oarecare și S o familie nevidă de submulțimi ale lui R.

Definiția 1. *Familia S se numește inel de submulțimi din R, dacă pentru orice $A, B \in S$, avem $A \cup B \in S$ și $A \setminus B \in S$.*

Familia S se va numi σ-inel dacă S este un inel de mulțimi și pentru orice șir $(A_n)_{n\geq 1}$ din S avem $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.

Definiția 2. *Un inel (sau un σ-inel) de mulțimi ale lui R se va numi algebră (respectiv σ-algebră) de submulțimi din R dacă R este un element al inelului.*

Observația 1. *O familie S de submulțimi din R va fi o algebră dacă și numai dacă S este închisă în raport cu operația de reuniune (sau intersecție) a mulțimilor din S și în raport cu operația de trecere la complementară*: deoarece avem $A' = R \setminus A$ notînd cu A' complementara lui A în raport cu R ($A' = \complement A$) se deduce $A' \in S$ deoarece din $A \in S$ rezultă $R \setminus A \in S$ și cum $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$, va rezulta $(A \cup B)' \in S$ dacă $A, B \in S$. In particular $\emptyset = (A \setminus A) \in S$.

Observația 2. *O familie S de submulțimi din R va fi o σ-algebră dacă S este închisă în raport cu operația de reuniune (sau intersecție) numărabilă de submulțimi din S.*

Definiția 3.. *Aplicația $\mu : S \to \mathbb{R}$. în care S este un inel de submulțimi din R se numește numărabil—additivă (sau complet-additivă) dacă are loc egalitatea*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

pentru orice șir $(A_n)_{n\geq 1}$ de mulțimi disjuncte două cîte două din S cu proprietatea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A \in S$.

Definiția 4. *Aplicația complet-aditivă* μ *definită pe un* σ*-inel* S *de submulțimi din* R *care verifică în plus condițiile*

i. $\mu(A) \geq 0$, *pentru orice* $A \in S$,

ii. $\mu(\emptyset) = 0$

se va numi măsură pe S.

Tripletul (R, S, μ) *se va numi spațiu cu măsură dacă* S *este un* σ*-inel de submulțimi din* R, *iar* μ *este o măsură definitiă pe* S; *mulțimile din* S *se vor numi în acest caz* μ*-măsurabile.*

Dacă în plus $A \subset B$, *iar din ipoteza* μ*-măsurabilității lui* B *și* $\mu(B) = 0$, *se deduce* $A \in S$, *se spune că spațiul* (R, S, μ) *este complet.*

Pentru orice familie $\mathfrak{F}$ de submulțimi din mulțimea de referință $\mathfrak{R}$ există cea mai mică σ-algebră de submulțimi din R care conține pe $\mathfrak{F}$ și anume, intersecția tuturor acestor σ-algebre; această σ-algebră se va nota prin $\mathfrak{F}_0$ și de obicei poartă numele de σ-algebră generată de familia $\mathfrak{F}$.

Definiția 5. *Dacă* $R = \mathbb{R}^n$, *iar* $\mathfrak{F}$ *este mulțimea intervalelor* $I_n \subset \mathbb{R}^n$, $I_n =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \ldots \times]a_n, b_n[$, $a_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j, j = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, σ*-algebra generată de* I_n *se va nota* $(\mathbb{R}^n)$; *elementele lui* $\mathfrak{B}_0(\mathbb{R}^n)$ *se vor numi mulțimi Borel iar* $\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_0(\mathbb{R}^n), \mu)$ *se va numi spațiu Borel dacă pentru* I_n *măsura se definește prin* $\mu(I_n) = |I_n| = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$. *O măsură definită pe o familie de submulțimi Borel din* $\mathbb{R}^n$ *se va numi măsură Borel.*

Se deduce că orice element dintr-un spațiu Borel este mulțime măsurabilă, dacă adăugăm în acest spațiu și mulțimile care au măsura nulă.

Fie acum X și Y două mulțimi oarecari și S_X respectiv S_Y două familii de submulțimi din X respectiv Y.

Definiția 6. *Aplicația* $f : X \to Y$ *se spune că este* (S_X, S_Y) *măsurabilă dacă ipoteza* $A \in S_Y$ *antrenează* $f^{-1}(A) \in S_X$.

Aici, ca de obicei, $f(B) = \{f(b) | b \in B\} \subset Y$ este imaginea mulțimii B prin aplicația f, iar $f^{-1}(A)$ este mulțimea elementelor din X a căror imagine aparține mulțimii A.

Exemplul 1. Fie $X = Y = \mathbb{R}$. $f : X \to Y$ (deci f sînt funcții cu valori reale de argument real) și S_X, S_Y formate din mulțimea intervalelor deschise; aplicînd definiția 6 la acest caz particular, se deduce că noțiunea de măsurabilitate pentru f se reduce la noțiunea de continuitate a funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vezi A.M. cap. 0 secțiunea 4.2).

În cazul în care X și Y sînt familii de mulțimi boreliene, noțiunea de măsurabilitate din definiția 6 va conduce la funcțiile B-măsurabile (sau măsurabile în sensul lui Borel).

Teorema 1. *Fie* (R, S, μ) *un spațiu cu măsură,* $A_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$ *măsurabile și* $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$; *atunci* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *este măsurabilă și* $\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$. *Dacă* $A_1, A_2, \ldots$ *sînt măsurabile și*

$A_n \supset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *atunci* $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *este măsurabilă iar* $\mu(A^*) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$, *dacă* $\mu(A_n) < \infty$ *pentru un* n.

Fie $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$; rezultă $B_j \cap B_k = \emptyset$, $j \neq k$ și $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, deci $\mu(A) = \sum_n \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

În al doilea caz, se presupune $\mu(A_1) < \infty$ și fie $B_j = A_1 \setminus A_j$, $j = 2, 3, \ldots$ $B = A_1 \setminus A^*$; atunci $B_j \subset B_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$ și $\bigcup_j B_j = B$. Deci $\mu(A_1) - \mu(A^*) = \mu(B) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) = \lim_{j\to\infty} [\mu(A_1) - \mu(A_j)] = \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$, adică $\mu(A^*) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$, ambii membri fiind finiți.

2. Măsură de probabilitate

În teoria probabilităților se utilizează unele măsuri speciale care vor fi introduse acum.

Definiția 1. *Un spațiu cu măsură* (R, S, μ) *se va numi spațiu de probabilitate* (pe scurt SP) *dacă* R *este o* σ*-algebră iar* $\mu(R) = 1$; *în acest caz se va nota* $\mu = P$, P *se va numi măsură de probabilitate pe* σ*-algebra* S. *Elementele din* R *se vor numi evenimente elementare, puncte aleatoare sau puncte de selecție, submulțimile lui* S *poartă numele de evenimente, iar* R *se va numi spațiu de selecție, spațiul rezultatelor sau spațiul evenimentelor elementare.*

Spațiul R poate avea un număr finit sau nu de elemente iar un punct de selecție $e \in R$ poate fi interpretat ca fiind rezultatul posibil al unei experiențe sau al unei operații efectuate in raport cu un anumit ansamblu de condiții precizate.

Dacă $E \in S$ este un eveniment, acest eveniment se spune că este realizat dacă punctele de selecție $e \in R$ (e fiind rezultatul experienței) aparțin lui E, obținindu-se in acest mod toate punctele aleatoare ale lui E. În teoria probabilităților σ-algebra S se mai numește *cîmpul evenimentelor* și nu este obligator ca S să conțină toate evenimentele elementare.

Definiția 2. *Mulțimea* R *se numește evenimentul sigur iar mulțimea vidă* $\emptyset$ *se va numi evenimentul imposibil.*

Dacă $E_1, E_2 \in S$ *sînt evenimente, atunci reuniunea acestora* $E_1 \cup E_2$ *va defini un nou eveniment constînd din realizarea fie a lui* E_1, *fie a lui* E_2, *fie a amîndorora.*

Intersecția $E_1 \cap E_2$ *a evenimentelor* E_1 *și* E_2 *va defini evenimentul prin care se realizează atît* E_1 *cît și* E_2 ; *dacă* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, *evenimentele* E_1 *și* E_2 *se numesc incompatibile. Pentru* $E_1, E_2 \in S$, *vom spune că* $E_1 \subset E_2$ *dacă realizarea evenimentului* E_1 *nu este posibilă*

decît odată cu realizarea evenimentului E_2; $E' \in S$ *va fi evenimentul contrar ataşat lui* E, *adică* $E \cup E' = R$.

Modelul matematic adoptat aici pentru construirea teoriei probabilităţilor este simplu de justificat; astfel:

i. Dacă pentru un eveniment $E \in S$ s-a definit probabilitatea $P(E)$, este natural să poată fi definită probabilitatea evenimentului contrar E', deci $E' \in S$ iar $P(E')$ este precis determinată.

ii. Dacă se cunosc probabilităţile evenimentelor E_1, $E_2 \in S$, este natural să se cunoască şi probabilitatea evenimentului $E_1 \cap E_2$; deci $E_1 \cap E_2 \in S$ şi $P(E_1 \cap E_2)$ este unic determinat.

Din i şi ii se deduce $E_1 \cup E_2 S \in (E_1 \cup E_2 = (E_1' \cap E_2')'$, iar $R \in S$ deoarece $R = E \cup E'$.

Exemple 1. Fie R un spaţiu de selecţie finit $R = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi numerele reale $0 < p_j < 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ cu proprietatea $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$; fie $S = \mathfrak{B}(R)$ şi $P(\{e_j\}) = p_j$ $j = 1, 2, \ldots, n$, iar dacă $E \in S$, $E = \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\}$, $k \leqslant n$, $P(E) = p_{j_1} + \ldots + p_{j_k}$. În aceast condiţii, spaţiul (R, S, P) este un SP.

Într-adevăr, din definiţia lui $P(E)$ se deduce că în ipoteza existenţei a k elemente, care definesc evenimentul E, iar fiecare element din E este realizat rămînînd nerealizate celelalte $n - k$ elemente ale lui R, vom avea

1. $P(E) \geqslant 0$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(R) = \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$
4. $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)$, $E_j \cap E_k = \emptyset$, $j \neq k$,

ultima egalitate obţinîndu-se direct din definiţie (de exemplu, dacă $E_1 = \{e_1, \ldots, e_q\}$ $E_2 = \{e_{q+1}, \ldots, e_r\}$, $q < r$ avem $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ şi $E_1 \cup E_2 = \{e_1, \ldots, e_r\}$, deci $P(E_1 \cup E_2) = \sum_{j=1}^{r} p_j = \left(\sum_{j=1}^{q} p_j\right) + \left(\sum_{j=q+1}^{r} p_j\right) = P(E_1) + P(E_2)$, iar aici S are un număr finit 2^n de elemente: există n mulţimi cu un element, C_n^2 mulţimi cu două elemente etc. iar suma lor, inclusiv mulţimea vidă conduce la 2^n).

2. Dacă în exemplul 1 toate evenimentele e_j sînt egal probabile şi compatibile, avem

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile realizării lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

Într-adevăr, aici avînd $P(\{e_j\}) = P(\{e_k\})$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ din $p_1 + \ldots + p_n = 1$ se deduce $P(\{e_j\}) = \frac{1}{n}$ şi deci dacă $E = \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\}$ avem $P(E) = p_{j_1} + \ldots + p_{j_k} = \frac{k}{n}$.

3. Fie R un spațiu de selecție numărabil, $R = \{e_1, e_2, \ldots\}$, elementului e_j atașându-i-se numărul $p_j \in]0,1[$, $j = 1, 2, \ldots$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$, astfel încît, dacă $E = \{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\}$ să avem $P(E) = \sum_{l=1}^{k} p_{j_l} = \sum_{e_j \in E} P(\{e_j\})$; notînd $S = \mathfrak{S}(R)$, S va fi o σ-algebră, iar spațiul (R, S, P) va fi un SP. Se verifică de asemenea că aceste spații de probabilitate sînt complete (vezi punctul 1).

4. O magazie conține N piese identice dintre care N_1 sînt defecte ($N_1 \leqslant N$). Care va fi probabilitatea extragerii din magazie a unei piese defecte?

În această problemă nu există nici un motiv ca o piesă în stare de funcționare să fie extrasă preferențial în raport cu una defectă; de exemplu, atașînd fiecărei piese un număr (cuprins între 1 și N), va fi imposibil de a distinge o piesă defectă de una în stare de funcționare. De aceea se poate presupune $e_j = j$, $j = 1, \ldots, n$ și $p(e_j) = \frac{1}{N}$; în baza exemplului 2, extragerea unei piese defecte dintr-un lot de N piese care conțin N_1 piese defecte va fi egală cu $\frac{N_1}{N}$.

Observația 1. *Formula din exemplul 2 poartă numele de formula clasică pentru calculul probabilităților evenimentelor incompatibile și egal probabile sau formula de calcul direct al probabilităților.*

3. Proprietăți ale măsurii de probabilitate

3.1. Cazul spațiilor simple

Din definiția 1 de la punctul 2 rezultă unele proprietăți ale (R, S, P). Astfel:

i. *Dacă* $E_1 \subset E_2$, $E_1, E_2 \in S$, *atunci* $P(E_1) \leqslant P(E_2)$, adică dacă evenimentul E_1 nu se poate realiza decît dacă s-a realizat evenimentul E_2, atunci probabilitatea evenimentului E_1 nu poate depăși probabilitatea evenimentului E_2; într-adevăr deoarece $E_2 = E_1 \cup (E_2' \cap E_1)$, $E_1 \cap (E_2' \cap E_1) = \emptyset$, rezultă $P(E_2) = P(E_1) + P(E_2' \cap E_1) \geqslant P(E_1)$.

Observația 1. Proprietatea $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j)$ valabilă pentru $E_1, E_2, \ldots \in S$ și $E_j \cap E_k = \emptyset$, $j \neq k$ va fi valabilă pentru un număr finit de termeni: $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)$, dacă $E_1, \ldots, E_n \in S$ și $E_j \cap E_k = \emptyset$, deoarece se poate scrie $E_{n+1} = E_{n+2} = \ldots = \emptyset$, iar $P(\emptyset) = 0$.

ii. *Pentru orice* $E \in S$ *avem* $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$, deoarece $\emptyset \subset E \subset R$ iar conform cu i, rezultă $0 = P(\emptyset) \leqslant P(E) \leqslant P(R) = 1$.

iii. *Are loc proprietatea de subaditivitate numărabilă a probabilității*, exprimată prin relația

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} P(E), \quad n \leqslant \infty, \tag{1}$$

Într-adevăr se poate scrie

$$\bigcup_{j=1}^{n} E_j = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \; A_1 = E_1, \; A_2 = E_2 \cap E_1',$$

$A_3 = E_3 \cap E_1' \cap E_2', \ldots, A_n = E_n \cap E_1' \cap \ldots \cap E_{n-1}'$, cu $A_j \cap A_k = \emptyset$, $j \neq k$, rezultînd $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, cum $A_j \subset E_j$ (prin construcție) $j = 1, 2, \ldots$ avem $P(A_j) \leqslant P(E_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ și (1) este justificată.

iv. *Dacă* $E_1, E_2 \in S$, *atunci*

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2). \tag{2}$$

Într-adevăr, utilizînd demonstrația de la iii pentru $n = 2$, va rezulta

$$P(E_1 \cup E_2) = P(A_1) + P(A_2) = P(E_1) + P(E_2 \cap E_1'); \tag{2'}$$

dar $E_2 = E_2 \cap R = E_2 \cap (E_1 \cup E_1') = (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap E_1')$ și cum $(E_2 \cap E_1) \cap (E_2 \cap E_1') = \emptyset$ se deduce $P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap E_1')$, înlocuind în (2') $P(E_2 \cap E_1')$ prin $P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ va rezulta 2.

Observația 2. Egalitatea (2) se poate extinde, prin inducție de la două evenimente la un număr oarecare de evenimente sub forma

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) - \sum_{1=j<k}^{n} P(E_j \cap E_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} E_j\right)$$

v. *Este valabilă proprietatea de continuitate a probabilității*

$$P(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

pentru orice șir $(E_n)_{n\geqslant 1}$ monoton din S (adică $E_n \subset E_{n+1}$ sau $E_n \supset E_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$).

Definiția 1. *Dacă* (R, S, P) *este un* SP, *iar* $\mathcal{F} \subset S$ *este o familie de evenimente,* $\mathcal{F} = \{E_j\}$, $j \leqslant n \leqslant \infty$, *această familie va forma un grup sistem complet de evenimente dacă* $R = \bigcup_j E_j$.

Din această definiție rezultă că în ipoteza incompatibilității evenimentelor $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$ (deci dacă $E_j \cap E_k = \emptyset$) avem egalitatea

$$P(E_1) + P(E_2) + \ldots = 1 \tag{3}$$

Observația 3. *Dacă E și E' sînt două evenimente contrarii din S atunci $\mathcal{F} = \{E, E'\}$ va fi un sistem complet de evenimente incompatibile, iar (3) se scrie*

$$P(E) + P(E') = 1; \tag{3'}$$

această egalitate permite determinarea probabilității unui eveniment E dacă se cunoaște probabilitatea evenimentului contrar E', în ipoteza că $P(E)$ se determină mai greu decît $P(E')$.

Definiția 2. *Dacă (R, S, P) este un* SP, *iar $E_1 \in S$ este astfel încît $P(E_1) \neq 0$, se va, numi probabititate a evenimentului $E \in S$ condiționată de realizarea evenimentului E_1, numărul $P(E|E_1)$ definit prin*

$$P(E|E_1) = \frac{P(E \cap E_1)}{P(E_1)} \tag{4}$$

Consecința 1. Din (4) se deduce o formulă pentru calculul probabilității evenimentului $E_1 \cap E_2$ și anume

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \tag{5}$$

și deoarece $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \cap E_1)$ va rezulta $P(E_2 \cap E_1) = P(E_2) \cdot P(E_1|E_2)$, dacă $P(E_2) \neq 0$, adică are loc întotdeauna egalitatea

$$P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = P(E_2) \cdot P(E_1|E_2) \; (= P(E_1 \cap E_2)) \tag{5'}$$

Lema 1. *Dacă (R, S, P) este un* SP, *iar pentru un $E_1 \in S$ avem $P(E_1) \neq 0$, atunci tripletul (R, S, P), $P_1(\cdot) = P(\cdot|E_1)$ va desemna deasemenea un* SP.

Evident $P(E) \geqslant 0$, pentru orice $E \in S$, fiind citul a două numere pozitive și numitorul fiind nenul; în plus $P(O) = \frac{P(O \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(O)}{P(E_1)} = 0$. În ipoteza $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^*$, $E_j^* \cap E_k^* = O$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \ldots$ deoarece $(\bigcup_j E_j^*) \cap E_1 = \bigcup_j (E_j^* \cap E_1)$, iar $(E_j^* \cap E_1) \cap (E_k^* \cap E_1) = O$, $j \neq k$, avem

$$P(E|E_1) = \frac{P(E \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P((\bigcup_j E_j^*) \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(\bigcup_j (E_j^* \cap E_1))}{P(E_1)} =$$

$$= \frac{\sum_j P(E_j^* \cap E_1)}{P(E_1)} = \sum_j \frac{P(E_j^* \cap E_1)}{P(E_1)} = \sum_j P(E_j^*|E_1)$$

În sfîrșit

$$P_1(R) = \frac{P(R \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(E_1)}{P(E_1)} = 1$$

Lema 1 arată că teoria valablă pentru SP (R, S, P) va fi valabilă și pentru orice spațiu (R_1, S_1, P_1) cu $P_1(E) = P(E|E_1)$, E, $E_1 \in S$ și $P(E_1) \neq 0$

Definiția 3. *Evenimentul $E_2 \in S$ se numește independent de evenimentul $E_1 \in S$, (R, S, P) fiind un* SP, *dacă* $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ (deci E_2 va fi independent de E_1 dacă realizarea evenimentului E_2 nu depinde de realizarea evenimentului E_1).
În această situație, din (5) se deduce egalitatea

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \tag{6}$$

rezultînd următoarele afirmații:

1. *Dacă E_2 nu depinde de E_1 atunci, reciproc, E_1 nu depinde de E_2,* presupunînd E_1, $E_2 \in S$, $P(E_1) \neq 0$, $P(E_2) \neq 0$, (R, S, P) fiind un SP (deoarece din (5') se deduce $P(E_1|E_2) = \dfrac{P(E_1)P(E_2|E_1)}{P(E_2)} = \dfrac{P(E_1)P(E_2)}{P(E_2)} = P(E_1)$

2. *Dacă (R, S, P) este un* SP *și E_1, $E_2 \in S$ sînt astfel încît $P(E_1) \neq 0$, $P(E_2) \neq 0$ și E_2 nu depinde de E_1, atunci are loc proprietatea inversă* (E_1 nu depinde de E_2) *și egalitatea* (6) *va defini relația de independență a două evenimente.*

Egalitatea (5) se poate extinde de la două la un număr arbitrar de evenimente din S, sub forma

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_1 \cap E_2) \ldots \tag{5''}$$
$$\ldots P(E_n|E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_{n-1})$$

care se justifică scriind (4) sub forma

$$P(E_{j+1}|E_1 \cap \ldots \cap E_j) = \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{j+1})}{P(E_1 \cap \ldots \cap E_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots n$$

(deci cu E_{j+1} în loc de E și $E_1 \cap \ldots \cap E_j$ în loc de E_1) și înmulțind membru cu membru egalitățile anterioare scrise pentru $j = 1, 2, \ldots, n$.

Generalizînd afirmația 2 de mai sus de la două evenimente la un număr oarecare $E_1, \ldots, E_n \in S$ de evenimente se poate enunța

Definiția 4. *Evenimentele $E_1, \ldots, E_n \in S$, (R, S, P) fiind un* SP, *vor fi independente (în totalitate) dacă pentru orice indici $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ avem*

$$P(E_{j_1} \cap \ldots \cap E_{j_k}) = P(E_{j_1}) \cdot P(E_{j_2}) \ldots P(E_{j_k}). \tag{6'}$$

Observația 4. Din definiția 4 se deduce că independența (în totalitate) a evenimetelor $E_1, \ldots, E_n$ antrenează independența a două

cîte două din aceste evenimente ; reciproca însă nu este întotdeauna adevărată, după cum ne arată cazul de mai jos :

Exemplul 1. Fie $R = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $S = \mathfrak{F}(R)$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$ (vezi exemplul 1, punctul 2) și $E_1 = \{e_1, e_2\}$, $E_2 = \{e_1, e_3\}$, $E_3 = \{e_1, e_4\}$; rezultă $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = 1/2$, iar deoarece $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_3 \cap E_1 = \{e_1\}$ avem $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \cap E_3) = P(E_3 \cap E_1) = 1/4$. Rezultă $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$, $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$, $P(E_3 \cap E_1) = P(E_1) \cdot P(E_1)$, dar $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(\{e_1\}) = \frac{1}{4} \neq P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{1}{8}$.

Teorema 1 (*formula probabilităților totale*). *Dacă* (R, S, P) *este un* SP în care $H_1, \ldots, H_n \in S$ *formează un sistem complet* (vezi definiția 1). *de evenimente independente atunci are loc egalitatea*

$$P(E) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(E|H_j) \tag{7}$$

unde $E \in S$ *este un eveniment oarecare* (se presupun cunoscute probabilitățile $P(H_j)$, $P(E|H_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Avem, prin ipoteză $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = R$ deci $E = E \cap R = E \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) = (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \ldots \cup (E \cap H_n)$; cum $H_j \cap H_k = 0$, $j \neq k$ se obține $(E \cap H_j) \cap (E \cap H_k) = 0$ și deci $P(E) = \sum_{j=1}^{n} P(E \cap H_j) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) P(E|H_j)$, folosind (5).

Teorema 2. (*formula lui Bayes*). *În ipotezele din teorema* 1 *are loc egalitatea*

$$P(H_j|E) = \frac{P(H_j)P(E|H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(E|H_i)} \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

dacă sînt cunoscute probabilitățile $P(H_j)$, $P(E|H_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Demonstrația se deduce din (5') scriindu-se E în loc de E_1 și H_j în loc de E_2 și înlocuind $P(E)$ prin (7).

Formula lui Bayes este utilă în următoarele circumstanțe : Într-o problemă apare un sistem complet de evenimente incompatibile $H_1, \ldots, H_n$ ale căror probabilități sînt cunoscute ; aceste evenimente nu pot fi observate direct ci în legătură cu un anumit eveniment E, cunoscîndu-se probabilitățile $P(E|H_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Să presupunem că la o încercare s-a obținut ca rezultat realizarea lui E

și se solicită concluzii relative la modificările survenite în probabilitățile evenimentelor $H_1, \ldots, H_n$. În aceste condiții $P(H_j)$, $j = 1, \ldots, n$ se numesc *probabilități a priori* iar $P(H_j|E)$ definite prin (8) se numesc *probabilități a posteriori*.

Exemple 2. O magazie conține N piese dintre care $N_1 \leqslant N$ sînt defecte; se extrag din magazie două piese și se cere probabilitatea ca cele două piese să fie defecte.

Fie E_1 evenimentul „prima piesă extrasă este defectă" și E_2 evenimentul „a doua piesă extrasă este defectă"; avem $P(E_1) = \frac{N_1}{N}$, $P(E_2|E_1) = \frac{N_1 - 1}{N - 1}$ deci $P(E_1 \cap E_2) =$

$$= P(E_1)\, P(E_2|E_1) = \frac{N_1(N_1 - 1)}{N(N - 1)}.$$

3. Într-un depozit se află $a + b + c$ piese de prima categorie, a doua și respectiv a treia categorie; se cere probabilitatea ca din patru piese extrase la întîmplare una să fie de prima categorie (deci $a \geqslant 1$), alta să fie de a doua categorie (deci $b \geqslant 1$) și celelalte două să fie de a treia categorie ($c \geqslant 2$).

Se introduc evenimentele: E_1 — prima piesă este de categoria întîia, E_2 — a doua piesă este de categoria a doua, E_3 și E_4 — a treia și a patra piesă sînt de categoria a treia. Rezultă

$$P(E_1) = \frac{a}{a + b + c}, \quad P(E_2|E_1) = \frac{b}{a + b + c - 1}, \quad P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{c}{a + b + c - 2},$$

$$P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{c - 1}{a + b + c - 3} \text{ urmînd } P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) =$$

$$= P(E_1) P(E_2|E_1) P(E_3|E_1 \cap E_2) P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3) =$$

$$= \frac{abc(c - 1)}{(a + b + c)(a + b + c - 1)(a + b + c - 2)(a + b + c - 3)}$$

Se verifică, prin calcul, că rezultatul nu depinde de ordinea în care se realizează evenimentele.

4. Reluînd exemplul 2, să presupunem că după extragerea unei piese se verifică dacă este defectă sau nu, se reintroduce în magazie și după ce se schimbă în mod arbitrar ordinea lor se mai extrage o piesă; se cere probabilitatea ca cele două piese să fie defecte.

Vom folosi evenimentele E_1 și E_2 care semnifică extragerea primei și a celei de a doua piese, ambele defecte; aceste evenimente sînt independente, deci $P(E_1 \cap E_2) =$

$$= P(E_1) P(E_2) = \left(\frac{N_1}{N}\right)^2.$$

5. Se reia exemplul 3 și se procedează la fel ca în exemplul 4 (piesa se reintroduce în depozit iar piesele se amestecă după ce s-a stabilit din ce categorie face parte piesa extrasă), se cere probabilitatea ca prima piesă să fie de prima categorie, a doua piesă de a doua categorie iar următoarele două de a treia categorie.

Cu notațiile de la exemplul trei probabilitatea căutată va fi $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) =$

$$= \frac{a}{a + b + c} \cdot \frac{b}{a + b + c} \cdot \left(\frac{c}{a + b + c}\right)^2 = \frac{abc^2}{(a + b + c)^4}$$

6. În teoria fiabilității (= teoria siguranței în funcționare) prin *funcție de fiabilitate* sau *fiabilitate*, notată $p = p(t)$, se înțelege probabilitatea funcționării fără defecțiuni în intervalul $[0, t]$, a unui dispozitiv ; ca indicator caracteristic inițial al dispozitivului se consideră intensitatea de pene $\lambda(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t + h \mid t)}{h}$ care este limita raportului cînd $h \to 0$, $h > 0$ dintre probabilitatea condiționată a unei pene a dispozitivului care a funcționat fără defecțiuni în intervalul $[t, t + h]$ și h. Pe cale experimentală se poate stabili intensitatea λ a penelor pentru elementele mai simple ale unui complex iar problema care se pune este de a determina funcția p cunoscîndu-se funcția $\lambda = \lambda(t)$.

Vom nota prin E_1 evenimentul prin care dispozitivul are o pană în intervalul $[t, t - h]$ și E_2 evenimentul funcționării normale în intervalul $[0, t]$, funcționarea fără pene în intervalul $[0, t + h]$ va fi notată prin evenimentul E_3. Evenimentul E_3 se poate exprima prin evenimentele E_1 și E_2 în modul următor : dispozitivul va funcționa normal în intervalul $[0, t+h]$ dacă funcționează atît în intervalul $[0, t]$ cît și în intervalul $[t, t+h]$, adică $E_3 = E_1' \cap E_2$. În baza formulei (5) se deduce $P(E_3) = P(E_2 \cap E_1') = P(E_2) \cdot P(E_1' \mid E_2)$; dar $P(E_2)$, adică probabilitatea funcționării normale în intervalul $[0, t]$ este chiar funcția necunoscută $p = p(t)$, iar $P(E_3) = p(t+h)$. Cum $P(E_1 \mid E_2)$ definește probabilitatea condiționată de o pană a dispozitivului în intervalul $[t, t + h]$, ținînd cont de legătura dintre funcțiile λ și p, va rezulta $P(E_1 \mid E_2) = P(t + h \mid t) = \lambda(t)h + \alpha(t, h)$ cu $\frac{\alpha}{h} \to 0$ $(h \to 0)$; trecînd de la evenimentul E_1 la evenimentul contrar E_1' va rezulta

$$P(E_1' \mid E_2) = 1 - [\lambda(t)h + \alpha(t, h)] = 1 - \lambda(t)h + \beta(t, h), \ \frac{\beta}{h} \to 0 \ (h \to 0).$$

Se obține deci, din egalitatea dedusă anterior $p(t + h) = p(t) P(E_1' \mid E_2)$, o nouă egalitate

$$p(t + h) = p(t)[1 - \lambda(t)h] + \gamma(t, h), \ \frac{\gamma}{h} \to 0 \ (h \to 0)$$

care arată că avem $p'(t) = -\lambda(t)p(t)$; deci, dacă p este derivabilă, va fi soluția acestei ecuații diferențiale, adică

$$p(t) = ce^{-\int_0^t \lambda(s)\, ds}, \ c \in \mathbb{R}$$

Deoarece este natural să presupunem că dispozitivul funcționează la momentul inițial, avem condiția $p(0) = 1$ și deci în definitiv,

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)\, ds}$$

7. O întreprindere folosește dispozitive de același tip dar elaborate de trei uzine diferite în raportul $a_1 : a_2 : a_3$ (adică la a_1 dispozitive construite la prima uzină corespund a_2 dispozitive fabricate la a doua și a_3 dispozitive fabricate la a treia uzină). Dispozitivele sînt uniforme (nu au caracteristici care să indice locul de fabricare), iar intensitatea penelor este constantă și egală respectiv cu λ_1, λ_2 și λ_3 după uzina care le fabrică. Ne propunem să determinăm fiabilitatea produsului final. Se constată că notînd H_j ipoteza de fabricare a dispozitivului în uzina j, $j = 1, 2, 3$, H_1, H_2 și H_3 definesc un grup complet

de evenimente incompatibile pentru care $P(H_j) = \dfrac{a_j}{a_1 + a_2 + a_3}$: din exemplul 6 se deduce $P(E|H_j) = e^{-\lambda_j t}$, dacă E este evenimentul cerut. În baza formulei (7) se deduce $P(E) = p(t) = \dfrac{1}{a_1 + a_2 + a_3}(a_1 e^{-\lambda_1 t} + a_2 e^{-\lambda_2 t} + a_3 e^{-\lambda_3 t})$.

8. Să presupunem că în condițiile exemplului 7. produsul final a funcționat în intervalul $[0, T]$ (evenimentul E) ; să se determine probabilitatea a posteriori pentru ca dispozitivul să fie fabricat de uzina j. $j = 1, 2, 3$.

Utilizînd formula lui Bayes (8), rezultă

$$P(H_j|E) = \frac{a_j e^{-\lambda_j T}}{a_1 e^{-\lambda_1 T} + a_2 e^{-\lambda_2 T} + a_3 e^{-\lambda_3 T}}.$$

Deoarece

$$P(E|E_1) = \frac{1}{2}, \quad P(E|E_2) = \frac{1}{8}$$

și

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2},$$

avem :

$$P(E_1|E) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

adică probabilitatea „a posteriori" a evenimentului E_1 este egală cu $\frac{4}{5}$.

3.2. Independența spațiilor de probabilitate

a. *Produsul cartezian a două spații de selecție. Produsul cartezian R al spațiilor de selecție R_1 și R_2 va fi definit de mulțimea perechilor ordonate (e_1, e_2) în care $e_1 \in R_1$ și $e_2 \in R_2$.*

Notăm $R = R_1 \times R_2$.

Analog, dacă E_1 și E_2 sînt evenimente din R_1 respectiv R_2, atunci produsul cartezian al mulțimilor E_1, E_2 este mulțimea $E = E_1 \times E_2$ a perechilor ordonate (e_1, e_2) pentru care $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$.

Mulțimea E din R reprezintă mulțimea vidă atunci și numai atunci cînd $E_1 = \emptyset$ sau $E_2 = \emptyset$. Este evident că dacă E_1, F_1 sînt

evenimente din R_1 și E_2, F_2 evenimente din R_2, atunci $E_1 \times E_2 \subset F_1 \times F_2$ numai dacă $E_1 \subset F_1$ și $E_2 \subset F_2$.

Definiția 5. *Evenimentul $E = E_1 \times E_2$ se numește realizarea comună a evenimentelor E_1 și E_2.*

Evenimentele E_1 și E_2 se numesc proiecția lui E_1 în R_1 respectiv R_2, iar R_1 și R_2 se numesc spații de selecție marginale ale lui R.

Evenimentele $E_1 \times R_2$ și $R_1 \times E_2$ constituie evenimente cilindrice în spațiul produs R.

Aceste noțiuni pot fi ușor transpuse la un număr oarecare de spații de selecție $\{R_j\}$.

Exemple. 9. Fie R_1 intervalul $[a_1, b_1]$ de pe axa e_1 și R_2 intervalul $[a_2, b_2]$ de pe axa e_2. E_1 și E_2 mulțimi închise incluse respectiv în R_1 și R_2, definite prin intervale închise.

Spațiul produs $R = R_1 \times R_2$ este constituit din punctele aparținînd dreptunghiului închis $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Mulțimea cilindrică $E_1 \times R_2$ este intervalul bidimensional $E_1 \times R_2$ sau reuniune de astfel de intervale și $R_1 \times E_2$ este o reuniune de dreptunghiuri închise dispuse orizontal. În ceea ce privește mulțimea $E = E_1 \times E_2$, aceasta este intersecția dreptunghiurilor închise definite anterior.

10. Se aruncă două zaruri. Fie e_{1j} fața care apare deasupra la primul zar și e_{2k} aceeași față la al doilea zar; atunci $R_1 = \{(1), \ldots, (6)\}$ și $R_2 = \{(1), \ldots, (6)\}$ și deci spațiul produs $R = R_1 \times R_2$ este constituit din 6^2 perechi ordonate (e_{1j}, e_{2k}), $j, k = 1, \ldots, 6$ în care $e_{1j} \in R_1$ și $e_{2k} \in R_2$.

Dacă $E_1 = \{(1), (2)\}$ și $E_2 = \{(1), (3)\}$, atunci $E = E_1 \times E_2 = \{((1), (1)), ((1), (3)), ((2), (1)), ((2), (3))$.

Mulțimea $E_1 \times R_2 = \{((1), (1)), \ldots, ((1), (6)) : ((2), (1)), \ldots, ((2), (6))\}$ este o mulțime cilindrică în spațiul $R_1 \times R_2$.

b. *Măsură produs.* Fie spațiile de selecție R_1 și R_2 și σ — algebrele S_1, S_2 atașate lui R_1 și R_2 respectiv. Considerăm în spațiul $R = R_1 \times R_2$ clasa inițială $\mathfrak{F}_0 = \{E_1 \times E_2 | E_1 \in S_1, E_2 \in S_2\}$ și σ — algebra generată de $\mathfrak{F}_0$.

Presupunem acum că avem spațiile de probabilitate (R_1, S_1, P_1) și (R_2, S_2, P_2); pentru fiecare mulțime $E = E_1 \times E_2$ din $\mathfrak{F}_0$ definim o funcție P în felul următor:

$$P(E) = P_1(E_1) \cdot P_2(E_2).$$

Se arată ușor că P reprezintă o măsură de probabilitate definită pe $\mathfrak{F}_0$.

Fie măsura de probabilitate P corespunzătoare spațiului produs (R, S, P) al spațiilor (R_1, S_1, P_1) și (R_2, S_2, P_2). Dacă pentru orice mulțime $E = E_1 \times E_2$, avem:

$$P(E) = P_1(E_1) \cdot P_2(E_2),$$

atunci spațiile de probabilitate (R_1, S_1, P_1) și (R_2, S_2, P_2) se vor numi *independente*. Această noțiune poate fi generalizată la un număr oarecare de spații de probabilitate (vezi și pucntul 9).

Exemplul 11 Se aruncă două monede. Atunci $R_1 = (s_1, v_1)$ $P_2 = (s_2, v_2)$ și $S_1 = \mathfrak{S}(R_1)$, $S_2 = \mathfrak{S}(R_2)$. (s = stema, v = valoarea), $\mathfrak{S}$ fiind mulțimea părților.

Măsurile de probabilitate P_1 și P_2 se definesc prin $P_j(s_j) = P_j(v_j) = \frac{1}{2}$ $(j = 1, 2)$.

Pentru spațiul produs (R, S, P) definim măsura de probabilitate P cu ajutorul probabilităților evenimentelor elementare.

$P((s_1, s_2)) = P((s_1, v_2)) = P((v_1, s_2)) = P((v_1, v_2)) = \frac{1}{4}$. Atunci, evident:

$$P((s_1, s_2)) = P_1(s_1) \cdot P_2(s_2), \ldots, P((v_1, v_2)) = P_1(v_1) \cdot P_2(v_2),$$

ceea ce înseamnă că spațiile de probabilitate $(R_1, \mathfrak{S}(R_1), P_1)$ și $(R_2, \mathfrak{S}(R_2), P_2)$ sînt independente.

4. Frecvența evenimentelor aleatoare

Fie E un eveniment aleator care poate să apară în cursul efectuării unei experiențe.

Definiția 1. *Se numește frecvența evenimentului E raportul dintre numărul de realizări ale evenimentului E și numărul total de experiențe efectuate.*

Cu alte cuvinte, dacă s-au efectuat N experiențe, evenimentul E realizîndu-se de N_E ori, $N_E \leqslant N$ și notăm cu P^* frecvența evenimentului E, vom avea

$$P^*(E) = \frac{N_E}{N} \tag{1}$$

și este evidentă legătura dintre numărul $P^*(E)$ definit prin (1) și definiția clasică a probabilității unui eveniment; conform acestei definiții, rezultă următoarele proprietăți ale frecvenței $P^*(E)$:

i. Frecvența oricărui eveniment este un număr real din intervalul $[0, 1]$; frecvența evenimentului imposibil este nulă iar frecvența evenimentului sigur este egală cu unitatea.

ii. Frecvența mai multor evenimente incompatibile coincide cu suma frecvențelor componentelor.

iii. Frecvența realizării simultane a evenimentelor E_1 și E_2 este egală cu frecvența unuia dintre aceste evenimente înmulțită cu frecvența celuilalt eveniment, condiționată de numărul de realizări ale primului eveniment (deoarece dacă în cursul a N experiențe evenimentul E_1 s-a realizat de N_1 ori, iar evenimentul E_2 s-a realizat de N_2 ori dintre care de M ori împreună cu evenimentul E_1 și de $N_2 - M$ ori fără realizarea evenimentului E_1, atunci frecvența realizării simultane a evenimentelor E_1 și E_2 este egală cu M/N, frecvența lui E_1 este egală cu $\frac{N_1}{N}$, frecvența evenimentului E_2 condi-

ționată de realizarea evenimentului E_1 este $\frac{M}{N_1}$, iar $\frac{M}{N} = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{M}{N_1}$)

iv. Dacă prin repetarea a N experiențe evenimentul E_1 nu s-a realizat aceasta nu înseamnă că acest eveniment este imposibil, după cum nici realizarea de N ori a evenimentului E_2 nu înseamnă că E_2 este eveniment sigur.

Pe cale experimentală s-a stabilit următorul fapt important: se poate vorbi de probabilitatea unui eveniment dacă prin repetarea experiențelor se constată o stabilitate a frecvențelor acestui eveniment; astfel dacă în cursul unui număr mic N de repetări ale experienței, frecvența evenimentului E ia valori absolut aleatore, cînd N este mare, frecvența acestui eveniment are o tendință de stabilizare variind în jurul unei valori fixe, care va fi chiar probabilitatea evenimentului E. În acest sens, se poate vorbi de probabilitatea unui eveniment ca fiind limita frecvențelor acestuia.

Noțiunea de probabilitate a unui eveniment se consideră acum ca fiind o noțiune primară din teoria probabilităților și deci nu necesită o definiție specială; dar tocmai această stabilitate observabilă a frecvenței unui eveniment ne poate conduce la aplicarea în acest caz a teoriei probabilităților. Probabilitatea unui eveniment constituie o caracteristică numerică obiectivă a acestuia și valoarea acestei probabilități nu depinde de numărul N de repetări ale experienței în care este posibilă apariția evenimentului E. În acest mod, noțiunea de frecvență a unui eveniment aleator constituie un punct de plecare în teoria probabilităților.

5. Variabile aleatoare. Elemente aleatoare

Pentru a defini noțiunea de variabilă aleatoare (pe scurt VA) vom realiza inițial o expunere intuitivă iar realizarea matematică precisă a acestei noțiuni va fi făcută în continuare cînd se vor expune și unele elemente din teoria vectorilor aleatori. În considerațiile anterioare un rol important l-au avut elementele σ— algebrei S, numite evenimente aleatoare (deoarece nu putem ști cu precizie dacă ele vor apare sau nu în efectuarea unei experiențe legate de apariția acestora). Caracteristicile cantitative ale acestor evenimente sînt numere reale care se obțin în decursul experiențelor, dar aceste numere sînt imposibil de prevăzut înaintea efectuării experienței și de aceea vom conveni să le numim variabile aleatoare. Ca exemple de VA se pot da: erorile de măsurare, gradul de fiabilitate a unui dispozitiv, momentul apariției unui parazit într-un aparat electronic. De regulă VA se notează cu litere mari $X_1, X_2 \ldots, Y, Z, \ldots$, iar valorile posibile (realizările) VA se vor nota cu litere mici $x_1, x_2, \ldots, y, z \ldots$ Această definiție intuitivă a unei VA este bazată pe fapte experi-

mentale iar fiecărei VA i se poate asocia o familie de evenimente, fiecare dintre acestea definind apartenența VA în cauză la un anumit interval sau mulțime; ca și în cazul evenimentelor aleatoare, pentru a studia o VA sau un grup de VA, trebuie asociate acestora probabilități, ceea ce se poate realiza matematic în modul următor.

Fie (R, S, P) un SP; aceasta înseamnă că R este un spațiu de selecție, S este o σ-algebră de mulțimi din R, iar P este o măsură de probabilitate definită pe S.

La punctele anterioare s-au dedus unele proprietăți ale măsurii de probabilitate P. Alte proprietăți ale acestei măsuri pot fi obținute utilizîndu-se conceptul de variabilă aleatoare, cu ajutorul căreia evenimentelor din R li se atașează numere reale.

Definiția 1. *Prin variabilă aleatoare scalară* (pe scurt VA) *se înțelege o aplicație univocă* $X : R \to \mathbb{R}$.

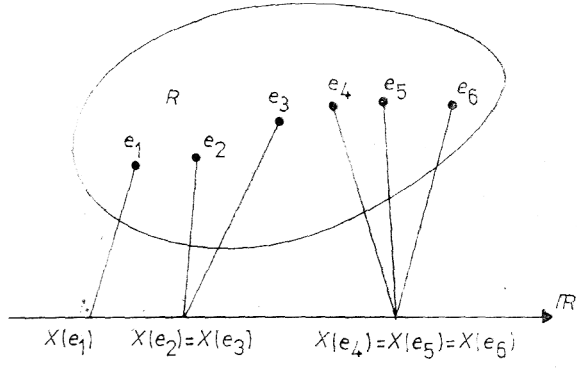

Fig. II.1

Cu alte cuvinte, vom presupune că fiecărui $e \in R$ i se asociază un singur număr real $X(e)$ (vezi fig. II.1) și deci mulțimilor $A \in \mathfrak{B}$ le vor corespunde mulțimi de pe dreapta numerică $\mathbb{R}$. Pentru precizarea noțiunilor legate de utilizarea conceptului de VA vom presupune inițial că VA este discretă, adică mulțimea R este transformată cu ajutorul VA X în mulțimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\} \subset \mathbb{R}$, unde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$

Din fig. II.1 se constată că o valoare x_j a VA X poate fi luată pentru mai multe puncte aleatoare din R și vom nota prin $E_j \subset R$ mulțimea din S cu proprietatea

$$X(e) = x_j, e \in E_j; \tag{1}$$

vom scrie

$$E_j = X^{-1}(x_j) = \{e | e \in R, X(e) = x_j\} \tag{1'}$$

iar X^{-1} va fi aplicația inversă atașată VA X (evident $X^{-1}:\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\} \to S$, cu observația că prin definiție $E_j \in S$, deci nu se iau în considerație VA pentru care eventual $X^{-1}(x_j)$ nu este un element al σ-algebrei considerate. Avem $E_j \cap E_k = \emptyset$, dacă $j \neq k$ (deoarece dacă $e \in E_j \cap E_k$ am avea $X(e) = x_j$ și $X(e) = x_k$, iar cum X este aplicație univocă, neapărat $x_j = x_k$ ceea ce contrazice faptul că $j \neq k$; s-a prespus $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$), iar $\bigcup_j E_j = R$ (deoarece VA X este o aplicație de la R la $\mathbb{R}$, deci orice $e \in R$ trebuie să aparțină uneia din mulțimile E_j). În baza proprietăților măsurii de probabilitate rezultă

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = P(R) = P(E_1) + P(E_2) \ldots = 1$$

adică, ținînd seama de (1') trebuie să avem

$$\sum_j P(X^{-1}(x_j)) = 1;$$

notînd $P(X^{-1}(x_j)) = p_j, j = 1, 2, \ldots$ cum $X^{-1}(x_j) \neq 0$ rezultă $p_j > 0$ și $\sum_j p_j = 1$

Am ajuns astfel la concluzia că orice VA discretă X se poate defini cu ajutorul tabelului

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix} \text{ sau } \frac{X}{P}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{matrix}\right. \quad p_n > 0, n = 1, 2, \ldots \sum_n p_n = 1 \tag{2}$$

unde numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sînt valorile pe care le ia VA X (și pot fi orice numere reale distincte) iar p_j, $j = 1, 2, \ldots$ va fi probabilitatea ca VA X să ia valoarea x_j, $j = 1, 2, \ldots$ (numerele p_1, $p_2, \ldots$ nu pot fi arbitrare : neapărat $0 < p_j < 1$, $j = 1, 2, \ldots$, iar $p_1 + p_2 + \ldots = 1$)

Reciproc, orice tabel de forma (2) în care numerele reale din prima linie sînt distincte, iar $p_1 > 0, p_2 > 0, \ldots, p_n > 0, \ldots \sum_n p_n = 1$ va determina o VA discretă X. Evident, nu este obligatoriu ca valorile VA X să formeze o mulțime numărabilă ; se poate presupune că VA X este finită, cînd tabelul (2) se va înlocui prin tabelul

$$\frac{X}{P}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{matrix}\right. \quad 0 < p_j < 1, \; j = 1, 2, \ldots, n, \; p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \tag{2'}$$

Rezultatele anterioare valabile pentru VA X discrete se extind acum la orice tip de VA $X : R \to \mathbb{R}$, cînd la orice mulțime $E \in S$ va corespunde o mulțime din $\mathbb{R}$ și invers, pentru orice mulțime $B \subset$

$\subset \mathbb{R}$ va exista în R mulțimea $X^{-1}(B)$, unde

$$X^{-1}(B) = \{e \mid e \in R,\ X(e) \in B\},$$

iar X^{-1} este aplicația inversă atașată VA X și ea transformă dreapta numerică $\mathbb{R}$ în spațiul de selecție R. Deoarece VA X este o aplicație univocă, aplicația inversă X^{-1} transformă mulțimi disjuncte B_1 și B_2 din $\mathbb{R}$ în mulțimi disjuncte $X^{-1}(B_1)$ și $X^{-1}(B_2)$ din R. Prin urmare, aplicația inversă păstrează toate operațiile cu mulțimi și dacă o familie de mulțimi S_1 din $\mathbb{R}$ este închisă în raport cu o anumită operație, clasa de mulțimi $X^{-1}(B)$, $B \in S$ va fi închisă în raport cu aceeași operație. De aceea, dacă (R, S, P) este un SP este evident că o VA X definită pe acest spațiu, induce din spațiul (R, S, P) un alt SP (R, S_1, P_X) în care noua măsură de probabilitate P_X se definește prin

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$

(în cazul discret rolul lui B era jucat de $\{X = x_j\}$). Rezultă deci că la orice eveniment $E \in S$ având probabilitatea $P(E)$ va corespunde un eveniment $B \in S_1$ cu probabilitatea egală cu $P_X(B)$, adică

$$P_X(B) = P(E),\ X(E) = B \text{ sau } X^{-1}(B) = E.$$

De aceea se poate înlocui SP inițial (R, S, P) prin noul SP (R, S_1, P_X) definit cu ajutorul VA X ale cărui evenimente elementare sînt numerele reale (se poate arăta că S_1 poate fi constituit cu intervale din $\mathbb{R}$).

Aceste definiții se pot extinde la două sau la mai multe VA, cînd apare noțiunea de *vector aleator*, sau *variabilă aleatoare vectorială*; astfel un *vector aleator cu două componente* va fi cuplul (X_1, X_2), iar un *vector aleator n-dimensional* va fi constituit din n-uplul $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, X_1, $X_2, \ldots$, fiind VA definite pe același SP (R, S, P).

În ultimul caz, dacă E_n este o mulțime boreliană oarecare din $\mathbb{R}^n$ atunci mulțimea $A = \{e \mid e \in R, (X_1(e), X_2(e), \ldots, X_n(e)) \in E_n\}$ aparține σ-algebrei S și de aceea, punînd $P_X(E_n) = P(E)$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se obține SP $(\mathbb{R}^n, S_n, P_X)$ indus de SP (R, S, P) prin n-uplul de VA $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

De regulă, mulțimile din S_n sînt intervale (paralelipipede) n-dimensionale deci $a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$.

Fie X o VA $X : R \to \mathbb{R}$; considerînd SP (R, S, P) VA X induce din acest SP spațiul (R, S_1, P) atașat dreptei numerice $\mathbb{R}$. Dacă B este o mulțime oarecare din S_1, se obișnuiește să se noteze evenimentul B prin $X \in B$, iar în loc de $P(B)$ se scrie $P_X(X \in B)$; în particular, dacă $B = [a, b]$, probabilitatea $P_X[a, b])$ va fi notată prin $P_X(a \leqslant X \leqslant b)$, în mod analog obținîndu-se probabilitățile intervalelor deschise sau semideschise. Dacă B conține un singur punct x, se

scrie $P_X(X = x)$ ceea ce reprezintă probabilitatea ca în experiența considerată VA X să realizeze valoarea x.

Deoarece în viitor nu se va utiliza decît SP (R, S_1, P_X) indus de VA X din SP (R, S, P), fără a se produce confuzii vom nota $P_X = P$ (vezi și punctul 1).

Fie (R, S, P) un SP și (M, d) un spațiu metric.

Definiția 2 *Aplicația $V : R \to M$ se numește element aleator în M dacă $\{e \in R | V(e) \in B\} \in S$ pentru orice B din $B(M)$, unde $B(M)$ este clasa Borel a submulțimilor din M* (adică $B(M)$ este cea mai mică σ-algebră care conține mulțimile deschise din M).

Un element aleator din M reprezintă o generalizare a noțiunii de VA, deoarece σ-algebra generată de toate intervalele din $\mathbb{R}$ de forma $]-\infty, b[$, $b \in \mathbb{R}$, definește clasa submulțimilor boreliene din $\mathbb{R}$; V va fi un element aleator în $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă V va fi o VA, iar elementele aleatoare din spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d)$ vor fi vectori aleatori n-dimensionali.

Un alt exemplu de element aleator este următorul : fie (s, d) spațiul metric al șirurilor din $\mathbb{R}$ cu metrica

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}, \quad x = (x_n)_{n \geq 1}, \; y = (y_n)_{n \geq 1},$$

și $V(e) = (V_n(e))_{n \geq 1}$, $e \in R$ o aplicație de la R la s; V va fi un element aleator dacă și numai dacă $V_n(e)$ este o VA pentru orice n. Prin aceste exemple, se deduce că noțiunea de element aleator constituie o generalizare a noțiunii de VA, iar proprietățile deduse pentru elemente aleatoare vor fi proprietăți pentru VA, vectori aleatori, șiruri de VA etc. Nu vom insista însă asupra acestor aspecte ale teoriei probabilităților.

6. Funcție de repartiție. Densitate de probabilitate

Fie (R, S_1, P), $P = P_X$ SP indus de VA X; în baza definiției lui S_1 (reamintim că S_1 este σ-algebra definită cu ajutorul intervalelor $I \subset \mathbb{R}$) intervalul $]-\infty, x[$, aparține lui S_1, pentru orice x real și de aceea are sens $P_X(]-\infty, x[) = P_X(X < x) = P(X < x)$, iar $P(X < x) \in [0, 1]$.

Definiția 1. *Funcția $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definită prin*

$$F_X(x) = P(X < x) \tag{1}$$

se numește *funcția de repartiție* a VA X, *derivata funcției F_X (înțeleasă în sensul teoriei distribuțiilor) se va numi densitatea de probabilitate a VA X și se va nota f_X :*

$$f_X = F_X'. \tag{2}$$

Dacă nu există posibilitate de confuzie, vom scrie

$$F = F_X,\ f = f_X.$$

Din definiția 1 rezultă următoarele proprietăți ale funcției de repartiție F_X :

Teorema 1. *Funcția de repartiție a* VA X *are următoarele proprietăți* :

i. $F(a-) = F(a)$, $a \in \mathbb{R}$, $F(a-) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x)$,

ii. $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$,

iii. $0 \leqslant F(x_1) \leqslant F(x_2) \leqslant 1$ *dacă* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$,

iv. $P(X \leqslant b) = F(b+)$, $b \in \mathbb{R}$, $F(b+) = \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x > b}} F(x)$,

v. $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b+) - F(a-)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

vi. $P(a < X < b) = F(b-) - F(a+)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

vii. $P(a \leqslant X < b) = F(b-) - F(a-)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

viii. $P(a < X \leqslant b) = F(b+) - F(a+)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

ix. $P(X = a) = F(a+) - F(a-)$,

x. *Dacă* X *este* VA *continuă*, $P(X = \alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Pentru i se folosește proprietatea de continuitate a măsurii de probabilitate : dacă $I_n =]-\infty, x_n]$, $x_n < x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} P(E_n) = P(\lim\limits_{n \to \infty} E_n)$, unde E_n este evenimentul prin care VA X se află în intervalul I_n ; cum $I_n \to]-\infty, a[$ $(n \to \infty)$, iar $P(E_n) = P(X < x_n) = F(x_n)$ se deduce $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = P(X < a) = F(a)$, adică $F(a-) = F(a)$ (cu alte cuvinte funcția de repartiție a oricărei VA este continuă la stînga și în viitor în loc de $F(a)$ vom scrie $F(-a)$ pentru o mai bună înțelegere a formulelor).

ii. $F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(\emptyset) = 0$, $F(\infty) = P(X < \infty) = P(R) = 1$.

iii. $F(x_2) = P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2) \geqslant P(X < x_1) = F(x_1)$, deoarece $P(x_1 \leqslant X < x_2) \geqslant 0$; așa dar $0 \leqslant F(x_1) \leqslant F(x_2) \leqslant 1$.

iv. Se folosește din nou proprietatea de continuitate a măsurii de probabilitate, dar luînd $I_n =]-\infty, x_n[$, $x_n > x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ $\lim x_n = b$ cînd $\lim I_n =]-\infty, b[$ și deci în baza raționamentului de la i se deduce $P(X \leqslant b) = \lim\limits_{n \to \infty} P(X < x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) =$ $= \lim\limits_{\substack{x_n \to b \\ x_n > b}} F(x_n) = F(b+)$.

v. $P(a \leqslant X \leqslant b) + P(X < a) = P(X \leqslant b)$, deci $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) -$ $- P(X < a) = F(b+) - F(a) = F(b+) - F(a-)$, iar vi, vii și viii se justifică analog.

ix. $P(X = a) = \lim\limits_{b \to a} P(a \leqslant X \leqslant b) = \lim\limits_{b \to a} [F(b+) - F(a-)] = F(a+) - F(a-)$

x. Se utilizează ix ținînd cont că $F(a+) = F(a-)$.

Trecînd la proprietățile densității de probabilitate a VA X definită prin (2) să remarcăm mai întîi că deși inițial f_X este definit ca o distribuție, totuși avînd în vedere că funcția de repartiție F_X este crescătoare, derivata va exista (în sens obișnuit) aproape peste tot. Deci f_X este o funcție în $\mathbb{R}\setminus\{x_j\}$ unde $(x_j)_{j\geq 1}$ este șirul punctelor de salt pentru F_X; dacă F_X este o funcție derivabilă atunci $\{x_j\}_{j\geq 0} = \emptyset$ și f_X este o funcție definită pe $\mathbb{R}$.

Definiția 2. *Dacă F_X este derivabilă în $\mathbb{R}$ (deci dacă f_X este o funcție)* VA X *se va numi continuă, iar dacă F_X este o funcție în scară,* VA X *se va numi discretă; în celelalte cazuri* VA X *se va numi mixtă.*

Observația 1. *În baza relației* (2), *dacă f este funcție integrabilă va rezulta, deoarece $F_X(-\infty) = 0$.*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t\,; \tag{3}$$

dacă însă f_X este o distribuție vom scrie

$$F_X(x) = f_X(t) * H(x-t) = (f_X * T_X\check{H})(t)$$

unde H este funcția unitate ($H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x) = 0$, pentru $x < 0$, $H(x) = 1$, pentru $x > 1$, valoarea în origină fiind arbitrară). T_x este translația de vector $-x$ (adică $(T_x f)(t) = f(t-x)$ și $\check{H}(x) = H(-x)$); x se consideră parametru, iar t este variabila de integrare; este ușor de verificat faptul că din (4) rezultă (3) dacă f_X este o funcție integrabilă.

Teorema 2. *Dacă* VA X *este continuă atunci $f_X(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$*

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\mathrm{d}t = 1, \quad \textit{iar} \quad P(a < X < b) = P(X \in I) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t$$

Demonstrația se deduce direct din (3), folosind teorema 1 : dacă F_X este derivabilă fiind crescătoare derivata sa nu poate fi negativă ; apoi din condiția $F(\infty) = 1$ se deduce

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\mathrm{d}t = 1,$$ iar din una din condițiile v – vi rezultă

$$P(a < X < b) = F(b-) - F(a+) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dacă I este un interval din $\mathbb{R}$ cu extremitățile în a și b, $a<b$, atunci $P(X \in I) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t$ deoarece valoarea integralei nu se modifică schimbînd integrandul în punctele a, b.

Observația 2. Se poate arăta că orice funcție $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, crescătoare și continuă la stînga poate fi interpretată ca funcția de repartiție a unei VA X; dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este pozitivă, integrabilă pe $\mathbb{R}$, iar $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t = 1$, atunci f poate fi considerată densitatea de probabilitate a unei VA, a cărei funcție de repartiție este $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemplul 1 Fie X o VA discretă; conform rezultatelor din punctul 5, această VA poate fi definită prin tabelul

$$X\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots \\ p_1\, p_2 \ldots p_n \ldots \end{pmatrix} p_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

Funcția de repartiție a acestei VA va fi

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\, H(x - x_k), \tag{5}$$

unde H este funcția unitate; într-adevăr, va fi suficient să arătăm că din (5) rezultă $P(X = x_j) = p_j$. Pentru aceasta este suficient să se utilizeze proprietatea ix din teorema 1:

$$P(X = x_j) = F(x_j + 0) - F_j(x - 0) \text{ și } F(x_j + 0) = p_1 + \ldots + p_j.$$

$F(x_j - 0) = p_1 + \ldots + p_{j-1}$ (deoarece $H(x - x_k) = 0$ pentru $x < x_k$ și $H(x - x_k) = 1$ pentru $x > x_k$).

În baza definiției 1 densitatea de probabilitate f_X a VA discrete X va fi

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta(x - x_k) \tag{5'}$$

deoarece $H' = \delta$.

Observația 3. *Dacă* VA *discretă* X *ia un număr finit de valori* $x_1, \ldots, x_n$ *relațiile anterioare rămîn valabile cu condiția să punem* $p_{n+1} = p_{n+2} = \ldots = 0$.

Observația 4. *Densitatea de probabilitate a* VA *discrete* X, *după cum rezultă din* (5'), *este o distribuție avînd suportul concentrat în punctele* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

În fig. II.2 a s-a trasat graficul unei funcții de repartiție pentru o variabilă aleatoare discretă X, iar în Fig. II. 2 b s-a trasat graficul densității de probabilitate corespunzătoare; acest ultim gafic se mai numește *diagrama în bastoane a* VA discrete X. Prin unirea punctelor $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots, (x_n, p_n)$ din planul raportat la un sistem cartezian de axe $x0p$ se obține o linie poligonală numită *poligonul de repartiție* al VA discrete X.

În cazul VA vectoriale $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, noțiunile anterioare pot fi extinse direct.

Definiția 3. *Prin funcția de repartiție a VA vectoriale* $X = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ *se înțelege funcția* $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definită prin:*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n), \qquad (6)$$

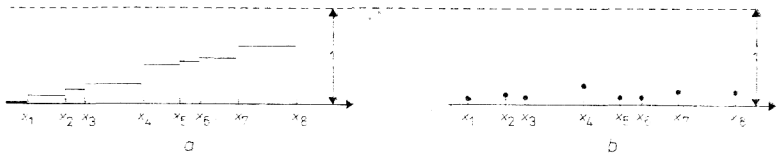

Fig. II.2

iar prin densitatea de probabilitate a acestui vector aleator se înțelege distribuția f_X *definită prin*

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_X}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (6')$$

In raport cu VA vectorială $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *VA vectoriale cu un număr oarecare de componente* $(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k})$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n$ *poartă numele de VA vectoriale marginale; în particular VA* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sînt VA marginale (sau proiecțiile VA vectoriale sau coordonatele acestui vector aleator).*

Teorema 3. *Fie* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *o VA vectorială avînd funcția de repartiție* F_X *și densitatea de probabilitate* f_X. *Atunci:*

i. $F_X(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ *și* F_X *este crescătoare în raport cu fiecare variabilă* x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$;

ii. $F_X(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ *dacă* $x_j \to -\infty$, pentru un $j \in \{1, \ldots, n\}$;

iii. $F_X(x_1, \ldots, x_n) \to 1$ *dacă* $x_j \to \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

iv. $F_X(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = F_X(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$

v. $$F_X(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{x_2} \mathrm{d}t_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, t_2 \ldots t_n)\mathrm{d}t_n;$$

vi. *Pentru* $n = 2$ *avem* $P(a \leqslant X < b,\ c \leqslant Y < d) = F_X(b, d) + F_X(a, c) - F_X(a, d) - F_X(b, c)$.

Justificările acestor proprietăți se pot realiza cu ajutorul unor raționamente analoage celor care au fost utilizate la demonstrația teoremei 1.

Exemplul 2. Fie o VA bidimensională discretă (X, Y), prin urmare vor fi nenule doar valorile $p_{jk} = P(X = x_j,\ Y = y_k)$, $j, k = 1, 2, \ldots$, (punctele $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n), \ldots$,

din $\mathbb{R}^2$ se vor numi punctele de concentrare a probabilităților vectorului bidimensional (X, Y). Ca și în cazul unei VA discrete, pentru acest vector aleator trebuie să avem $p_{jk} > 0$ cu $\sum_{j,k} p_{jk} = 1$ iar aceste valori pot fi scrise sub formă de tabel

Y \ X	x_1	x_2 ..	x_j ..	
y_1	p_{11}	p_{21} ..	p_{j1} ..	$q_1 = p_{11} + p_{21} + \ldots + p_{j1} + \ldots$
y_2	p_{12}	p_{22} ..	p_{j2} ..	$q_2 = p_{12} + p_{22} + \ldots + p_{j2} + \ldots$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
y_k	p_{1k}	p_{2k} ..	p_{jk} ..	$q_k = p_{1k} + p_{2k} + \ldots p_{jk} + \ldots$
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
	$p_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k1}$	$p_2 = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k2}$ ..	$p_j = \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}$	

Funcția de repartiție a vectorului aleator (7) va fi

$F(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} H(x - x_j) H(y - y_k)$, iar densitatea de probabilitate va fi distribuția $f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} \delta(x - x_j) \delta(y - y_k)$. Pentru VA marginale X și Y se obțin funcțiile de repartiție

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} H(x - x_j) H(y - y_k) \Big|_{y=\infty} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} H(x - x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j H(x - x_j)$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} H(y - y_k) H(x - x_j) \Big|_{x=\infty} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} H(y - y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k H(y - y_k), \left(\text{evident } \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1, \sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1, \right.$$

$p_j > 0$, $q_k > 0$); densitățile de probabilitate corespunzătoare vor fi

$$f_X(x) = F'_X(x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \delta(x - x_j), \quad p_j = \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \delta(y - y_k), \quad q_k = \sum_{j=1}^{\infty} p_{jk}$$

7. Caracteristicile numerice ale variabilelor aleatoare

O variabilă aleatoare (sau un vector aleator) este complet determinată dacă se cunoaște funcția de repartiție sau densitatea de probabilitate corespunzătoare. În anumite aplicații practice ale teoriei probabilităților nu este necesară însă cunoașterea unei caracteristici atît de complete cum este funcția de repartiție (sau densitatea de probabilitate); de multe ori este suficient să avem la dispoziție unii parametri numerici care exprimă aspecte esențiale ale variabilei sau vectorului aleator în cauză pentru a le descrie. Astfel uneori este suficient să se cunoască o valoare medie în jurul căreia să se găsească valorile variabilei sau vectorului aleator și un număr care să indice împrăștierea acestor valori în jurul valorii medii.

Definiția 1. *Se numește moment inițial de ordin* $s \in \mathbb{R}$ *al* VA X *avînd densitatea de probabilitate* f_X *numărul real* $\alpha_s[X]$ *definit prin*

$$\alpha_s[X] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) x^s \, dx, \tag{1}$$

în ipoteza că integrala este convergentă.

Observația 1. *Dacă* X *este o* VA *discretă, deci dacă*

$$f_X(x) = \sum_j p_j \delta(x - x_j) \tag{2}$$

din (1) *se deduce*

$$\alpha_s[X] = \sum_j p_j x_j^s \tag{1'}$$

(*în ipoteza convergenței seriei* $\sum_{j=1}^{\infty} p_j x_j^s$ *dacă* VA *în cauză are o infinitate numărabilă de valori*); într-adevăr, deoarece $g(x)\delta(x - x_j) = g(x_j)\delta(x - x_j)$, iar operația de integrare pe $\mathbb{R}$ a distribuțiilor f se poate înlocui prin $(f * 1)\Big|_{x=0}$, avem $\alpha_s[X] = 1 * [\sum_j p_j \delta(x - x_j)] x^s \Big|_{x=0} =$

$$= \sum_j p_j [1 * x^s \delta(x - x_j)]_{x=0} = \sum_j p_j [1 * x_j^s \delta(x - x_j)]_{x=0} =$$
$$= \sum_j p_j x_j^s [1 * \delta(x - x_j)]_{x=0} = \sum_j p_j x_j^s \cdot 1$$

Definiția 2. $\alpha_1[X]$, *adică momentul inițial de ordin unu, se numește media sau speranța matematică a* VA X *și o vom nota prin* m_X.
Așadar

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x\,; \tag{3}$$

dacă VA X este discretă cu densitatea de probabilitate (2); din (1') se deduce o formă asemănătoare mediei statistice

$$m_X = \sum_j p_j x_j \tag{3'}$$

Definiția 3. *Dacă* X *este o* VA *pentru care media* m_X *este un număr real, se numește* VA *centrată asociată lui* X *și se notează prin* $\dot{X}$, *diferența*

$$\dot{X} = X - m_X \tag{4}$$

iar momentele inițiale ale VA $\dot{X}$ *se vor numi momente centrate ale* VA X.

Dacă se notează prin $\mu[X]$ momentul centrat de ordin $s \in \mathbb{R}$ al VA X avem

$$\mu_s[X] = \alpha_s[\dot{X}] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)(x - m_X)^s\,\mathrm{d}x\,; \tag{5}$$

dacă VA X este discretă, avînd densitatea de probabilitate (2) din (5) se deduce

$$\mu_s[X] = \sum_j p_j (x_j - m_X)^s \tag{5'}$$

cu m_X definit prin (3').

Observația 2. *Momentul centrat de ordinul 1 al oricărei* VA X *este nul.* Într-adevăr, din (5) se deduce

$$\mu_1[X] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)(x - m_X)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)x\,\mathrm{d}x - m_X \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

deoarece $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)x\,dx = m_X$, iar $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$

Definiția 4. *Momentul centrat de ordinul doi al* VA X *se numește dispersia sau varianța acestei* VA *și se notează prin* $\sigma^2(X)$ *sau* $D[X]$ *sau* $\mathrm{Var}(X)$; deci

$$\sigma^2(X) = \mu_2[X] = \alpha_2[\mathring{X}] = \alpha_2[X - m_X],$$

adică

$$\sigma^2(X) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)(x - m_X)^2\,dx; \tag{6}$$

dacă X este o VA discretă cu densitatea de probabilitate (2) se deduce

$$\sigma^2(X) = \sum_j p_j(x_j - m_X)^2,\ m_X = \sum_j p_j x_j. \tag{6'}$$

Din (6), deoarece $f_X(x) \geqslant 0$, $(x - m_X)^2 \geqslant 0$, rezultă că dispersia unei VA este un număr real pozitiv și de aceea există numărul real pozitiv $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$ care se numește *abaterea medie pătratică* sau *abaterea standard* a VA X, iar raportul $\frac{\sigma(X)}{m_X}$ (dacă $m_X \neq 0$) se va numi *coeficientul de variabilitate* a VA X.

Din (6), prin efectuarea calculelor se deduce relația

$$\mu_2[X] = \sigma^2(X) = \alpha_2[X] - \alpha_1^2[X] = \alpha_2[X] - m_X^2 \tag{7}$$

care permite calculul dispersiei VA X cu ajutorul momentelor inițiale de ordinul întîi și doi ale aceleiași VA. Evident, relația (7) rămîne valabilă și în cazul unei VA discrete.

Momentul centrat de ordinul trei, $\mu_3[X]$ caracterizează asimetria graficului densității de probabilitate a VA X în raport cu dreapta $x = m_X$ din planul raportat la axe carteziene; într-adevăr, dacă acest grafic este simetric în raport cu dreapta $x = m_X$ deoarece

funcția $(x - m_X)^s$ este impară pentru $s \in \mathbb{N}$ se deduce

$$\mu_{2n+1}[X] = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

și de aceea este naturală caracterizarea acestui grafic, cu ajutorul numerelor $\mu_3[X]$, $\mu_5[X], \ldots$, cel mai simplu dintre acestea fiind evident $\mu_3[X]$.

Definiția 5. *Coeficientul de asimetrie* $S_k(X)$ *al* VA X *este numărul real definit prin*

$$S_k(X) = \frac{\mu_3[X]}{\sigma[X]} \tag{8}$$

unde $\sigma(X) = \sqrt{D[X]}$ *este abaterea medie pătratică a* VA X.

Pe fig. II.3 s-au trasat graficele densității de probabilitate pentru două VA; la graficul A avem $S_k > 0$ (asimetrie pozitivă) iar la graficul B avem $S_k < 0$ (asimetrie negativă).

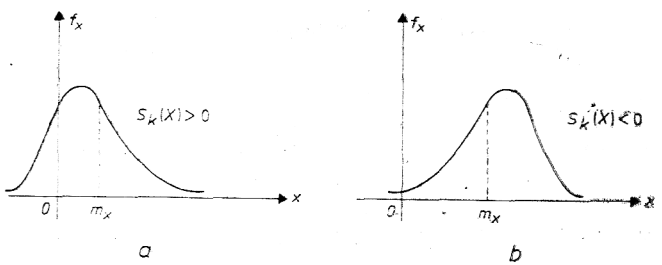

Fig. II.3

Momentul centrat de ordinul patru al VA X, $\mu_4[X]$ indică modul în care este aplatizat graficul densității de probabilitate, adică felul în care acest grafic este mai ascuțit sau mai plat.

Definiția 6. *Numărul real*

$$E_X = \frac{\mu_4[X]}{\sigma^4[X]} - 3 \tag{9}$$

se numește coeficientul de aplatizare a graficului funcției f_X, $\sigma(X)$ *fiind iarăși abaterea medie pătratică a* VA X; se scade numărul trei

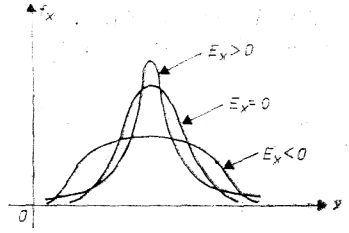

Fig. II. 4

din raportul μ_4/σ_4 pentru a avea $E_X = 0$ în cazul important al distribuției normale. Pe fig. II.4 s-au trasat graficele a trei densități de probabilitate pentru care avem $E_X > 0$, $E_X = 0$ și $E_X < 0$ respectiv.

S-a introdus odată cu VA X și VA centrată $\mathring{X} = X - m_X$ cu proprietatea că media ei este nulă: $m_{\mathring{X}} = 0$; se mai utilizează în calcule și VA U legată de VA X prin

$$U = \frac{1}{\sigma(X)} \mathring{X} = \frac{1}{\sigma(X)} (X - m_X) \tag{10}$$

unde $\sigma(X)$ este, ca de obicei, abaterea medie pătratică corespunzătoare VA X; avem

$$m_U = \alpha_1[\boldsymbol{U}] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \frac{x - m_X}{\sigma(X)} \, dx = 0,$$

$$\alpha_2[\boldsymbol{U}] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \left[\frac{x - m_X}{\sigma(X)}\right]^2 dx = \frac{1}{\sigma^2(X)} \int_{\mathbb{R}} f_X(x)(x - m_X)^2 \, dx = 1$$

deci $D(\boldsymbol{U}) = \alpha_2[\boldsymbol{U}] - m_U^2 = 1$. Aceste proprietăți simple ale VA $\boldsymbol{U}$ o fac să fie preferabilă în calcule; VA $\boldsymbol{U}$ se numește VA *redusă* atașată VA X: orice VA redusă $\boldsymbol{U}$ are media nulă și dispersia egală cu unitatea.

Deși din punct de vedere matematic o densitate de probabilitate a unei VA este cel mai simplu descrisă prin media, dispersia și momentele sale de ordin superior (vom vedea ulterior cum se definește f_X cu ajutorul acestor numere), pentru a se vizualiza mai convenabil f_X se mai utilizează și alte mărimi legate de VA X.

Definiția 7. *Prin modul x_m al* VA X *se înțelege acea valoare a lui X care corespunde celei mai mari probabilități* deci

$$P(X = x_m) \to \max.$$

Dacă densitatea de probabilitate f_X a VA X este o funcție de clasă C^2, $f_X \in C^2(\mathbb{R})$, atunci în punctul x_m avem verificate condițiile

$$f'_X(x_m) = 0,\ f''_X(x_m) < 0.$$

Dacă x_m este unic determinat, VA X va fi denumită *unimodală*, iar dacă pentru f_X există cel puțin două puncte de maxim VA

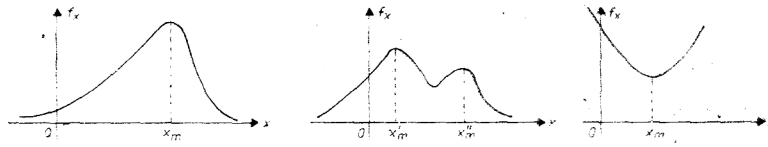

Fig. II. 5

X se va numi *multimodală*; pe fig. II.5 a) s-a trasat graficul lui f_X în cazul în care o VA este unimodală, iar pe fig. II.5 b) este trasat graficul lui f_X presupunînd o VA bimodală. În cazul apariției unui minim (Fig. II.5.c) VA X se va numi *antimodală*.

Definiția 8. *Mediana* $x_{0.5}$ *a unei* VA X *este valoarea acestei* VA *pentru care avem* $P(X < x_{0.5}) = 0.5$.

Utilizînd funcția de repartiție F_X a VA X, se deduce

$$F_X(x_{0.5}) = P(X < 0.5) = \int_{-\infty}^{x_{0.5}} f_X(x)\mathrm{d}x = 0.5\,; \qquad (11)$$

cu alte cuvinte mediana $x = x_{0.5}$ are proprietatea că divide aria cuprinsă între graficul lui f_X și axa Ox în două părți egale (dacă f_X este o funcție continuă). Din definiție rezultă că, dacă densitatea de probabilitate f_X a VA X este o funcție continuă, iar VA X este unimodală și simetrică în raport cu dreapta $x = x_m$, atunci media, modulul și mediana acestei VA coincid. Pe fig. II.6 s-au indicat modulul x_m, media m_X și mediana $x_{0.5}$ a unei VA asimetrice (adică avînd graficul densității de probabilitate asimetric).

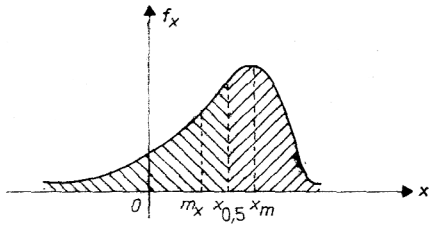

Fig. II. 6

Definiția 8 poate fi generalizată, definindu-se *cuartilele* $x_{0.25}$ și $x_{0.75}$ prin $P(X < x_{0.25}) = \int_{-\infty}^{x_{0.25}} f_X(x)\mathrm{d}x = F_X(x_{0.25}) = 0.25$ și

$P(X < x_{0.75}) = \int_{-\infty}^{x_{0.75}} f_X(x)\mathrm{d}x = F_X(x_{0.75}) = 0.75$; similar se definesc *decilele* $x_{0.1}, x_{0.2}, \ldots, x_{0.9}$ sau mai general *fractilele* x_q prin $F_X(x_q) = q$, $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

În cazul sistemelor de două VA (X, Y) se poate introduce *momentul inițial de ordinul* (k, s) definit prin

$$\alpha_{k,s}[X, Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)\, x^k y^s \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{12}$$

dacă $f_{X,Y}$ este densitatea de probabilitate a sistemului considerat iar integrala este convergentă; dacă sistemul (X, Y) este discret, adică dacă

$$f_{X,Y}(x, y) = \sum_i \sum_j p_{ij}\, \delta(x - x_i)\, \delta(y - y_j),\ p_{ij} > 0,\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \tag{13}$$

din (12) se deduce

$$\alpha_{k,s}[X, Y] = \sum_i \sum_j p_{ij} x_i^k y_j^s \tag{12'}$$

unde (x_i, y_k) sînt punctele de concentrație a probabilităților în cauză.

Definiția 9. *Momentele inițiale* $\alpha_{1,0}[X, Y]$ *și* $\alpha_{0,1}[X, Y]$ *se numesc mediile* VA *marginale* X, *respectiv* Y *și se notează* m_X *și* m_Y; deci

$$m_X = \alpha_{1.0}[X, Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} x f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$m_Y = \alpha_{0,1}[X, Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} y\, f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

VA $\mathring{X} = X - m_X$, $\mathring{Y} = Y - m_Y$ *se numesc* VA *marginale centrate ale vectorului aleator* (X, Y); *cu ajutorul* lor se definesc *momentele centrate de ordinul* (k, s) *ale* VA *bidimensionale* (X, Y):

$$\mu_{k,s}[X, Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y)(x - m_X)^k (y - m_Y)^s \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{15}$$

În cazul densității de probabilitate (13) rezultă

$$\mu_{k,s}[X, Y] = \sum_i \sum_j p_{ij}(x_i - m_X)^k (y_j - m_Y)^s. \tag{15'}$$

În aplicații un rol important îl joacă momentele centrate de ordinul doi $\mu_{2,0}[X, Y]$, $\mu_{0,2}[X, Y]$ și $\mu_{1,1}[X, Y]$ care se notează respectiv $D[X] = \sigma^2(X)$, $D[Y] = \sigma^2(Y)$, $K_{XY} = \mathrm{Cov}(X, Y)$ și sînt numite *dispersia punctului aleator* (x, y) în direcția axelor Ox și Oy (valorile $\sigma^2(X)$ și $\sigma^2(Y)$) și *covarianța* VA *marginale* X, Y. Deci

$$\mu_{2,0}[X, Y] = D[X] = \sigma^2(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - m_X)^2 f_{XY}(x, y)\, dx dy$$

$$\mu_{0,2}[X, Y] = D[Y] = \sigma^2(Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (y - m_Y)^2 f_{XY}(x, y)\, dx dy \qquad (16)$$

$$\mu_{1,1}[X, Y] = K_{XY} = \mathrm{Cov}\,(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - m_X)\,(y - m_Y) f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$$

și vom avea $D[X] > 0$, $D[Y] > 0$ (deoarece integranzii respectivi sînt pozitivi), pe cînd K_{XY} poate să fie pozitiv sau negativ; între aceste numere există relația:

$$|K_{XY}| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y),\ \sigma(X) = \sqrt{D[X]} > 0,\ \sigma(Y) = \sqrt{D[Y]} > 0 \qquad (16')$$

deoarece integrala care definește pe K_{XY} poate fi interpretată ca fiind produsul scalar pe $\mathbb{R}^2$ al funcțiilor $g_1(x, y) = (x - m_X) \cdot \sqrt{f_{X,Y}(x, y)}$ și $g_2(x, y) = (y - m_Y)\sqrt{f_{X,Y}(x, y)}$, iar inegalitatea lui Schwartz $|(g_1, g_2)| \leqslant \sqrt{(g_1, g_1)}\,\sqrt{(g_2, g_2)}$ coincide cu (16'). Scriind

$$r(X, Y) = r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \qquad (17)$$

din (16') se deduce $r_{XY} \in [-1, 1]$.

Definiția 10. *Numărul real* r_{XY} *se numește coeficientul de corelație al* VA X, Y; *dacă* $r_{XY} = 0$ (deci dacă $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$) VA X *și* Y *se numesc necorelate, iar dacă* $r_{XY} \neq 0$ (deci dacă $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$) VA X, Y *se vor numi corelate.*

Noțiunea de covarianță a două VA este importantă pentru a înțelege modul cum sînt repartizate în $\mathbb{R}^2$ valorile vectorului aleator (X, Y); pe fig. II.7). a), b), c) este indicată grafic această repartiție: avem $\mathrm{Cov}\,(X, Y) > 0$ dacă $X > m_X$ $(X < m_X)$ sînt valori preferențiale în același timp cu valorile VA $Y > m_X (Y < m_X)$; $\mathrm{Cov}\,(X, Y) < 0$ dacă, în general, $X > m_X$ $(X < m_Y)$ implică $Y < m_X$ $(Y > m_Y)$, iar în fine dacă din cunoașterea valorilor VA X nu se pot obține informații asupra poziției probabile a VA Y, atunci $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$.

Dacă $r_{XY} > 0$ se spune că corelarea v.a. X, Y este pozitivă, iar dacă $r_{XY} < 0$, avem de-a face cu o corelare negativă a acestor VA; o corelare pozitivă înseamnă că dacă una din variabile crește

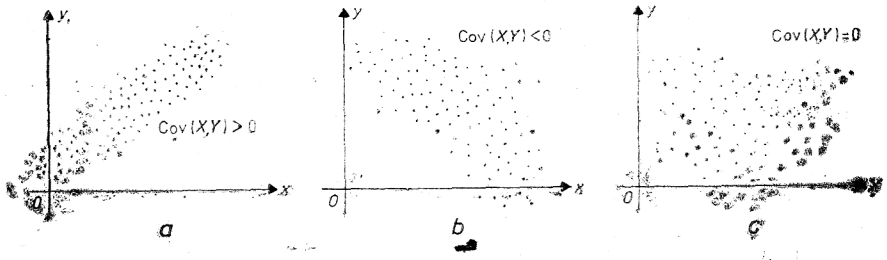

Fig. II. 7

(descrește) cealaltă are aceeași tendință (în medie), iar o corelare negativă indică faptul că dacă VA X crește (descrește) cealaltă are o tendință inversă (tot în medie).

În cazul unui vector aleator X cu $n > 2$ componente se folosesc următoarele caracteristici numerice:

i. n medii $m_1, m_2, \ldots, m_n$

$$m_j = m_{X_j} = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \ldots, x_n)\, x_j \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n;\ j = 1, 2, \ldots, n$$

ii. n dispersii $D_1, D_2, \ldots, D_n$

$$D_j = D_{X_j} = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \ldots, x_n)\,(x_j - m_j)^2 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

iii. $n(n-1)$ covariante $K_{ij} = \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$K_{ij} = K_{X_iX_j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \ldots, x_n)\,(x_i - m_i)\,(x_j - m_j)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

unde f_X este densitatea de probabilitate a vectorului aleator $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Evident, mediile caracterizează valorile medii ale VA marginale X_j, iar dispersiile caracterizează împrăștierea valorilor VA X_j în jurul valorii medii; dispersia VA X_j poate fi interpretată ca fiind covarianța dintre VA X_j și ea însăși: $D_j = \mathrm{Cov}\,(X_j, X_j) = K_{jj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Numerele reale K_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ pot fi considerate ca fiind elementele unei matrici pătrate $[K_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ care se numește *matricea de corelație* a VA $X_1, X_2, \ldots, X_n$; această matrice este simetrică

($K_{ij} = K_{ji}$) și va fi diagonală dacă VA în discuție nu sînt corelate două cîte două (cînd $K_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$).

Înlocuind covarianța VA X_j, X_k prin coeficienții de corelație

$$r_{jk} = \frac{K_{jk}}{\sigma_j \sigma_k}, \quad \sigma_j = \sqrt{D_j}, j = 1, 2, \ldots, n$$

matricea de corelație va fi simetrică iar elementele de pe diagonala principală vor fi toate egale cu unitatea.

8. Funcții de variabile aleatoare

Fie X o VA avînd funcția de repartiție F_X și densitatea de probabilitate $f_X = F'_X$; dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ măsurabilă, scriind $Y = \varphi(X)$, Y va fi din nou o VA. Presupunînd inițial φ strict crescătoare, în loc de $Y = \varphi(X)$ se poate scrie $X = \varphi^{-1}(Y)$, φ^{-1} fiind funcția inversă atașată lui φ și notînd cu F_Y funcția de repartiție a VA Y, avem

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = P(X < \varphi^{-1}(y)) = F_X[\varphi^{-1}(y)]$$

obținîndu-se astfel legătura dintre funcțiile de repartiție ale VA X și Y:

$$F_Y(y) = F_X[\varphi^{-1}(y)]. \tag{1}$$

Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse rezultă

$$f_Y(y) = f_X[\varphi^{-1}(y)] \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}, \tag{2}$$

deoarece

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X[\varphi^{-1}(y)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\bigg|_{x=\varphi^{-1}(y)} =$$

$$= f_X(x) \cdot \frac{1}{\varphi'(x)}\bigg|_{x=\varphi^{-1}(y)}.$$

Dacă φ este strict descrescătoare avem

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = P(X > \varphi^{-1}(y)) =$$

$$= 1 - P(X < \varphi^{-1}(y)),$$

ultima egalitate fiind o consecință a faptului că evenimentele $X > \varphi^{-1}(y)$ și $X \leqslant \varphi^{-1}(y)$ sînt contrare, deci $P(X > \varphi^{-1}(y)) + P(X \leqslant \varphi^{-1}(y)) = 1$, și cum $P(X \leqslant \varphi^{-1}(y)) = P(X < \varphi^{-1}(y)) + P(X = \varphi^{-1}(y))$ rezultă

$$F_Y(y) = 1 - F_X[\varphi^{-1}(y)] + P(X = \varphi^{-1}(y)) \tag{1'}$$

din care, prin derivare se deduce din nou formula (2), ținînd cont că $P(X = \varphi^{-1}(y))$ este o constantă iar φ fiind strict descrescătoare are derivata negativă ceea ce face să dispară semnul minus de la F'_X.

Rezultă așa dar că în cazul schimbărilor de variabilă la VA este mai indicată utilizarea densității de probabilitate decît a funcției de repartiție.

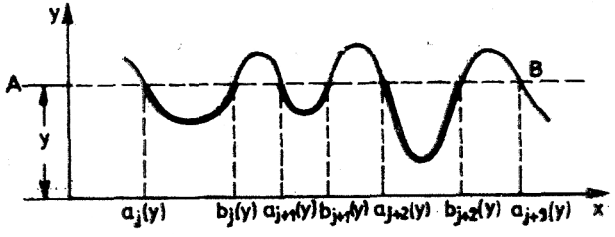

Fig. II. 8

Dacă φ nu este strict monotonă pe $\mathbb{R}$ se procedează în modul următor : se trasează graficul funcției φ în planul raportat la axele carteziene Ox și Oy și pentru a studia evenimentul $Y < y$ (vezi fig. II.8) va trebui intersectat graficul în cauză cu dreapta AB, paralela la axa Ox dusă prin punctul (O, y) și este clar că evenimentul $Y < y$ este suma evenimentelor $a_j(y) < X < b_j(y)$, $j = 1, 2, \ldots$ unde $[a_j(y), b_j(y)]$ este un interval al axei Ox obținut prin intersecția graficului lui φ cu dreapta AB). Rezultă ținînd cont că aceste intervale sînt disjuncte

$$P(Y < y) = P(X \in \bigcup_j]a_j(y), b_j(y)[) = \sum_j P(a_j(y) < X < b_j(y)),$$

deci

$$F_Y(y) = \sum_j \int_{b_j(y)}^{b_j(y)} f_X(x)\mathrm{d}x$$

deoarece $P(a \leqslant X < b) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x$; prin derivare se deduce densitatea de probabilitate a VA Y :

$$f_Y(y) = \sum_j \{f_X[b_j(y)]\, b'_j(y) - f_X[a_j(y)]a'_j(y)\}$$

$$\left(\text{în baza formulei } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\mathrm{d}x = f[b(t)]b'(t) - f[a(t)]a'(t)\right)$$

Exemplul 1. Fie $f_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ e^{-x} \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$; cum $f_X(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, iar $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$, această funcție va fi densitatea de probabilitate a unei VA X, a cărei funcție de repartiție va fi

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x}, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

Să calculăm VA $Y = X^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; deoarece funcția x^{2k+1} este strict crescătoare, se poate utiliza formula (1) și deci cum funcția inversă este $\sqrt[2k+1]{x}$, se deduce

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt[2k+1]{y}) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } y \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\sqrt[2k+1]{y}}, \text{ dacă } y > 0 \end{cases}$$

rezultînd densitatea de probabilitate

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } y \leqslant 0 \\ e^{-\sqrt[2k+1]{y}} \dfrac{1}{(2k+1)\sqrt[2k+1]{y^{2k}}}, \text{ dacă } y > 0. \end{cases}$$

Pentru a calcula VA $Y = X^{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$ trebuie ținut cont că $y = x^{2k}$ este strict monotonă pe intervalele $]-\infty, 0]$ și $[0, \infty]$; cum $x^{2k} \geqslant 0$, $x \in R$ se deduce $P(Y < y) = 0$, dacă $y \leqslant 0$ și deci $F_Y(y) = 0$ pentru $y \leqslant 0$. Dacă $y > 0$, avem

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \int_{-\sqrt[2k]{y}}^{\sqrt[2k]{y}} f_X(x)dx = \int_0^{\sqrt[2k]{y}} e^{-x}\,dx = 1 - e^{-\sqrt[2k]{y}}$$

Comparînd cele două rezultate se deduce pentru $n = 1, 2, \ldots$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } y \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\sqrt[n]{y}}, \text{ dacă } y > 0 \end{cases}$$

2. Fie $f_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } |x| > \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{\pi} \text{ pentru } |x| < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$; deoarece $f_X(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, iar

$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = 1$, această funcție va fi densitatea de probabilitate a unei

VA X a cărei funcție de repartiție va fi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & \text{dacă } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Să calculăm densitatea de probabilitate a VA $Y = \cos X$; deoarece $|\cos x| \leqslant 1$, se deduce $P(Y < -1) = 0$ și $P(Y \leqslant 1) = 1$; dacă $y \in]-1, 1[$ avem $P(Y < y) = 0$ dacă $y < 0$, deoarece $f_X(x) = 0$ pentru $|x| > -\frac{\pi}{2}$, iar intersecția dreptei care trece prin punctele A, B (vezi fig. 11.8) cu graficul lui $y = \cos x$ se realizează în afara intervalului $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dacă $0 < y < 1$ intersecția acestei drepte cu graficul lui $y = \cos x$ se realizează în punctele $a(y) = -\arccos y$, $b(y) = \arccos y$ (deoarece $f_X(x) = 0$ în afara intervalului $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervalele $[a(y) + 2k\pi, b(y) + 2k\pi]$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ nu se iau în considerație) și prin urmare

$$F_Y(y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arccos y} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f_X(x)\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos y, \; y \in [-1, 1],$$

iar

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } y \notin [0, 1] \\ \frac{2}{1 - y^2}, \text{ dacă } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

Dacă VA X este discretă, deci are funcția de repartiție

$$F_X(x) = \sum_i p_i H(x - x_j), p_j > 0, \sum_j p_j = 1$$

din (1) se deduce

$$F_Y(y) = \sum_j p_j H[\varphi^{-1}(y) - x_j] = \sum_j p_j H\,[y - \varphi(x_j)].$$

ultima egalitate fiind adevărată dacă φ este strict monotonă deoarece $H[\varphi^{-1}(y) - x_j] = H[y - \varphi(x_j)]$ după cum se constată imediat. Scriind acum

$$F_Y(y) = \sum_j p_j H[y - \varphi(x_j)], \tag{3}$$

rezultă că VA $Y = \varphi(X)$ are sens pentru orice funcție φ definită în punctele $x_1, x_2, \ldots$ de concentrare a probabilităților VA discrete X; deoarece este posibil să avem $\varphi(x_j) = \varphi(x_k)$ pentru $j \neq k$, din (3) se deduce că se poate să scriem o singură dată această valoare dar cu probabilitatea $p_j + p_k$ (dacă am avea $\varphi(x_j) = \varphi(x_k) = \varphi(x_l)$, se poate scrie din suma (3) doar $H[y - \varphi(x_j)]$, dar cu coeficientul $p_j + p_k + p_l$).

Exemple 3. Fie VA discretă X definită prin

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$$

VA $Y = \varphi(X)$ va fi definită prin

$$Y\begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \varphi(x_3) & \varphi(x_4) \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$$

dacă $\varphi(x_j) \neq \varphi(x_k)$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, 3, 4$. Dacă $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, avem

$$Y\begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_3) & \varphi(x_4) \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{4} & \frac{9}{20} \end{pmatrix},$$

iar dacă $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(x_4)$ rezultă

$$Y\begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_4) \\ \frac{11}{20} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$$

Trecînd la cazul vectorilor aleatori $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, calculul densității de probabilitate a VA $Y = \varphi(X) = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este destul de complicat față de cazul $n = 1$ și de aceea se vor lua în discuție doar vectori aleatori cu două componente (X, Y) pentru care se cunoaște densitatea de probabilitate

$$f_{X,Y}(x, y) = f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$$

unde

$$F(x, y) = F_{X,Y}(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Vom considera deci $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și ne propunem să calculăm $Z = \varphi(X, Y)$ în ipoteza că mulțimea punctelor $\{x, y, z = \varphi(x, y)\}$ definește o pînză $S \subset \mathbb{R}^3$ cînd $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; fie π_z un plan paralel cu planul xOy situat la o distanță $|z|$ de el, fie $\gamma_z = S \cap \pi_z$ (fig. II.9) și fie ∂D_z proiecția lui γ_z în planul xOy. Funcția de repartiție a VA Z va fi

$$F_Z(z) = P(Z < z) =$$
$$= P(\varphi(X, Y) < z) =$$
$$= P((X, Y) \subset D_z) = \quad (4)$$
$$= \iint_{D_z} f(x, y)\,dx\,dy$$

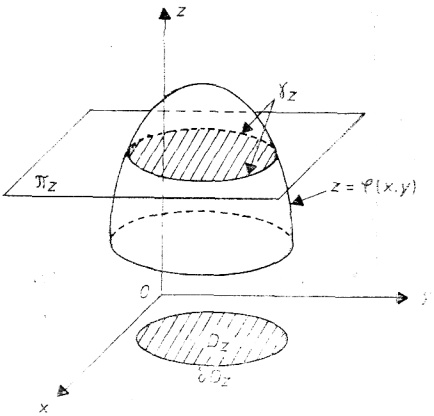

Fig. II. 9

presupunînd în plus că $D_z \subset \mathbb{R}^2$ este ales astfel încît dacă $(x, y) \in D_z$, să avem $z - \varphi(x, y) > 0$ (ecuația frontierei ∂D_z fiind $\varphi(x, y) = z$, $\mathbb{R}^2$ va fi divizat în două submulțimi D_z și D'_z avînd aceeași frontieră $\partial D_z = \partial D'_z$ = proiecția lui γ_z în planul xOy, iar dacă $(x, y) \in D_z$ avem $\varphi(x, y) < z$ și $\varphi(x, y) > z$ dacă $(x, y) \in D'$). Din (4) se deduce prin derivare, densitatea de probabilitate a VA Z:

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \iint_{D_z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \quad (4')$$

Pentru a scrie F_Z nu este obligatorie trasarea pînzei S (graficul lui φ) pentru a obține curba γ ci este suficient să se determine mulțimea $D_z \subset \mathbb{R}^2$ cu proprietatea $\varphi(x, y) < z$.

Exemple 4. Dacă vectorul (X, Y) are densitatea de probabilitate $f_{X,Y}(x, y) = f(x, y)$ să găsim densitatea de probabilitate a VA $Z = X + Y$

În baza fig. II.10, unde s-a hașurat mulțimea D_z, se deduce

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) = \iint_{D_z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{x-y} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y$$

și deci

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)dy.$$

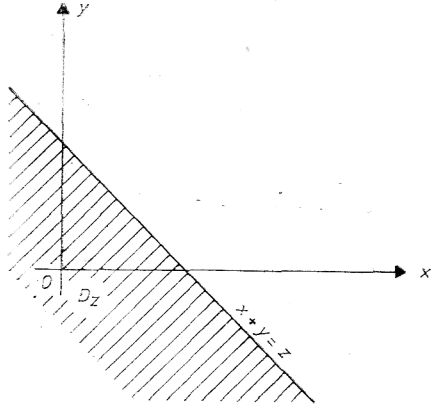

Fig. II. 10

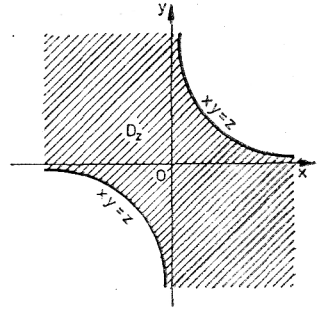

Fig. II. 11

5. În condițiile exemplului 4 să găsim densitatea de probabilitate a v.a. $Z = XY$. În baza fig. II.11 unde s-a haşurat mulțimea D_Z rezultă

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(XY < z) = \iint_{D_z} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{\frac{z}{x}}^{\infty} f(x, y)\,dy \right] dx +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x, y)dy \right] dx$$

și deci

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

9. Dependența și independența variabilelor aleatoare

Dacă (R, S, P) este un spațiu de probabilitate, la punctul 3 s-a definit independența evenimentelor $E_1, E_2 \in S$ prin egalitatea $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$, fiind posibil să existe evenimente din S care să

nu fie independente; astfel, evenimentele $E_3, E_4 \in S$ vor fi dependente dacă realizarea unui eveniment, de exemplu realizarea evenimentului E_4 este posibilă numai dacă se realizează și evenimentul E_3, cînd are loc egalitatea $P(E_4|E_3)P(E_3) = P(E_4)$, unde $P(E_4|E_3)$ este probabilitatea evenimentului E_4 condiționată de realizarea evenimentului E_3. Vom extinde acum aceste noțiuni în cazul VA.

Definiția 1. VA X și Y *vor fi independente dacă evenimentele aleatoare* $X \in E_1$ *și* $Y \in E_2$ *sînt independente pentru orice* $E_1, E_2 \in S$, (R, S, P) *fiind un* SP.

VA X *și* Y *vor fi dependente dacă există* $E_3, E_4 \in S$ *astfel încît evenimentele* $X \in E_3$ *și* $Y \in E_4$ *să fie dependente.*

Observația 1. În definiția 1 X și Y pot fi VA scalare sau VA vectoriale; în viitor, vom presupune X, Y VA scalare.

În baza considerațiilor anterioare VA X și Y vor fi independente dacă și numai dacă nici o informație în legătură cu una din aceste VA nu modifică distribuția celeilalte VA.

Teorema 1. *Dacă VA* X *și* Y *sînt independente au loc egalitățile*

$$F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y) \tag{1}$$

respectiv

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \tag{1'}$$

unde $F(x, y)$, $f(x, y)$ *sînt funcția de repartiție, respectiv densitatea de probabilitate a cuplului de VA* X *și* Y, *iar* F_X, F_Y *respectiv* f_X, f_Y *sînt funcțiile de repartiție, respectiv densitățile de probabilitate ale VA marginale* X, Y.

În baza definiției 1, evenimentele $\{X < x\}$ și $\{Y < y\}$ din S vor fi independente și deci $P(X < x,\ Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$ ceea ce coincide cu (1); apoi, deoarece $f(x, y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}[F_X(x) F_Y(y)]$, se va obține evident (1').

Teorema 2. VA X *și* Y *sînt independente dacă și numai dacă este verificată una dintre egalitățile* (1), (1').

Necesitatea egalităților (1), (1') a fost justificată prin teorema 1; pentru a arăta că (1') este o condiție suficientă pentru independența VA X și Y, fie I_1 și I_2 două intervale din $\mathbb{R}$; atunci

$$P(X \in I_1,\ Y \in I_2) = P((X, Y) \in I_1 \times I_2) = \iint\limits_{I_1 \times I_2} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{I_1 \times I_2} f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \left[\int\limits_{I_1} f_X(x)\,dx\right]\left[\int\limits_{I_2} f_Y(y)\,dy\right] = P(X \in I_1) \cdot P(Y \in I_2).$$

Apoi, deoarece $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{y} f(x, y)\mathrm{d}y$, dacă $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, va rezulta $F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$ și deci (1) va fi de asemenea o condiție suficientă pentru independența VA X și Y.

VA $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vor fi *independente* dacă evenimentele $X_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, n$, sînt independente pentru orice $E_1, \ldots, E_n \in S$; aceleași VA vor fi *dependente* dacă există $E_1^*, \ldots, E_n^* \in S$ pentru care evenimentele $X_j \in E_j^*$, $j = 1, 2, \ldots, n$ sînt dependente. Evident, teoremele 1 și 2 de mai sus se vor transpune cu ușurință și în cazul unui sistem de n VA iar independența a două cîte două din aceste VA nu este suficientă pentru independența (în totalitate) a VA $X_1, \ldots, X_n$.

Teorema 3. *Dacă VA X și Y sînt independente, atunci aceste VA sînt necorelate.*

Într-adevăr,

$$K_{XY} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - m_X)(y - m_Y) f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - m_X)(y - m_Y) f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}} (x - m_X) f_X(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_{\mathbb{R}} (y - m_Y) f_Y(y)\mathrm{d}y\right] = 0$$

deoarece $\int_{\mathbb{R}} (x - m_X) f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\mathrm{d}x - m_X \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x = m_X - m_X = 0.$

Observația 2. *Dacă VA X și Y sînt necorelate, nu este obligatoriu ca ele să fie și independente.*

Teorema 4. *Dacă VA X și Y sînt independente, atunci și VA $X_1 = \varphi_1(X)$, $Y_1 = \varphi_2(Y)$ sînt independente.*

Avem, considerînd intervalele de monotonie ale funcțiilor φ_1, φ_2, $P(X_1 \in I_1, Y_1 \in I_2) = P(\varphi_1(X) \in I_1, \varphi_2(Y) \in I_2) = P(X \in J_1, Y \in J_2) = P(X \in J_1) \cdot P(Y \in J_2)$, unde $\varphi_j^{-1}(I_j) = J_j$, $j = 1, 2$

Trecînd la cazul VA dependente, acestea se întîlnesc adesea în probleme practice, în cazul în care se solicită obținerea distribuțiilor unor coordonate ale unei VA, cunoscîndu-se valorile altor VA. De exemplu, în probleme de măsurări ale unor mărimi fizice X, nu se obțin valori ale lui X ci ale unei VA Y, rezultatul măsurătorii în cauză, deoarece în calcule intervin diverse alte variabile care modifică valo-

rile care ne interesează ; într-un astfel de caz, după ce s-a obținut o valoare y a VA Y este necesar calculul VA X care depinde de VA Y. Dificultatea de bază care apare în acest tip de probabilitate condiționată este datorată faptului că un eveniment E_1 de forma $Y = y$, în funcție de care se determină probabilitatea condiționată, are probabilitatea nulă (dacă VA Y este continuă : vezi x din teorema 1, punctul 6), iar în baza teoriei anterioare, o probabilitate condiționată se calculează numai dacă $P(E_1) \neq 0$.

Definiția 2. *Prin densitatea de probabilitate condiționată a* VA X *pentru o valoare dată* y *a* VA Y *se înțelege funcția* $f_1(x|y)$ *definită prin*

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \tag{2}$$

unde $f(x, y)$ *este densitatea de probabilitate a cuplului aleator* (X, Y), *iar* f_Y *este densitatea de probabilitate a* VA Y. *Analog prin*

$$f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \tag{2'}$$

se va înțelege densitatea de probabilitate condiționată a VA Y *pentru o valoare dată de a* VA X.

Consecința 1. *Din definiția* 2, *se deduc egalitățile*

$$f(x, y) = f_1(x|y) f_Y(y) = f_2(y|x) f_X(x) \tag{3}$$

care arată că densitatea de probabilitate a cuplului aleator (X, Y) *este egală cu densitatea de probabilitate a unei* VA *marginale înmulțită cu densitatea de probabilitate condiționată a celeilalte* VA *marginale.*

Consecința 2. *Dacă* VA X *și* Y *sînt independente* (deci dacă $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$) *din* (3) *se deduc egalitățile*

$$f_1(x|y) = f_X(x), f_2(y|x) = f_Y(y) \tag{4}$$

care vor fi condiții necesare și suficiente pentru independența VA X *și* Y.

Toate caracteristicile numerice ale VA definite la punctul 7 pot fi definite și pentru VA condiționate ; astfel prin momentele (simple) de ordinul s ale VA condiționate definite prin densitatea de probabilitate (2) respectiv (2') se vor înțelege numerele

$$\alpha_s' = \int_{\mathbb{R}} f_1(x|y)\, x^s\, dx, \quad \alpha_s'' = \int_{\mathbb{R}} f_2(y|x)\, y^s\, dy. \tag{5}$$

De aici se vor obține mediile α_1' și α_1'' cu ajutorul cărora se vor deduce momentele centrale corespunzătoare; se notează

$$\alpha_1' = M[X|y] = \int_{\mathbb{R}} f_1(x|y)x\,dx, \quad \alpha_1'' = M[Y|x] = \int_{\mathbb{R}} f_2(y|x)y\,dy \qquad (5')$$

și în mod similar se introduc și celelalte notații.

Notația $f_2(y|x)$ se folosește și pentru densitatea de probabilitate a VA Y depinzînd de parametrul x, chiar dacă x nu este o valoare a unei VA X; în aceste condiții, caracteristicele numerice (5) și (5') vor depinde de parametrul x.

Definiția 3. *Media* VA Y *care depinde de parametrul* x *se numește regresia lui* Y *în raport cu* x *și se notează*

$$M[Y|x]\left(= \int_{\mathbb{R}} yf_2(y|x)\,dy \right).$$

Observația 2. Dacă parametrul x din definiția 3 este o valoare posibilă a unei VA X, atunci regresia lui Y în raport cu x va coincide cu media condiționată a VA Y cînd $X = x$; graficul funcției $x \mapsto y$, $y = y(x) = \int_{\mathbb{R}} yf_2(y|x)\,dy$ se numește *curbă de regresie a* VA Y *în raport cu* x, iar rezultatele anterioare pot fi adaptate și în cazul funcției $f_1(x|y)$.

Observația 3. Deoarece mediile VA condiționate sau orice alte caracteristici pot fi iarăși VA, pentru aceste noi VA se pot defini în continuare momentele de diverse ordine.

Exemplul 1.

$$\text{Fie } f_2(y|x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } |y - cx| \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}} & \text{pentru } |y - cx| < \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Calculînd media $M[Y|x]$, rezultă

$$M[Y|x] = \frac{1}{2b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}} \int_{cx-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{cx+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y\,dy = cx,$$

iar dispersia

$$D[Y|x] = \int_{\mathbb{R}} (y - M[Y|x])^2 f_2(y|x)\mathrm{d}y = \frac{b^2}{3a^2}\ (a^2 - x^2).$$

2. Dacă $f(x, y) = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{2}\ \mathrm{e}^{1/2[a(x-\alpha)^2 + 2b(x-\alpha)(y-\beta) + c(y-\beta)^2]}$ se deduce

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{ac - b^2}{2\pi c}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{ac-b^2}{c}(x-\alpha)^2},$$

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{ac - b^2}{2\pi a}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{ac-b^2}{a}(y-\beta)^2}.$$

prin urmare

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a\left[x-\alpha+\frac{b}{a}(y-\beta)\right]^2}$$

$$f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \sqrt{\frac{c}{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}c\left[y-\beta+\frac{b}{c}(x-\alpha)\right]^2},$$

iar

$$M[X|y] = \alpha - \frac{b}{a}(y - \beta), \qquad D[X|y] = \frac{1}{a}.$$

De asemenea

$$M[Y|x] = \beta - \frac{b}{c}(x - \alpha), \qquad D[Y|x] = \frac{1}{c}.$$

Teorema 5. *Dacă* VA X *și* Y, *sînt independente, avem egalitatea*

$$m_{X,Y} = m_X \cdot m_Y \tag{6}$$

(adică media vectorului aleator bi-dimensional (X, Y) este egală cu produsul mediilor VA X, Y, dacă aceste VA sînt independente).

Într-adevăr,

$$m_{X,Y} = \alpha_{1,1}[(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y =$$

$$\alpha_1[X]\alpha_1[Y] = m_X \cdot m_Y.$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} x_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 \right] \mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\,\mathrm{d}x_2 =$$

$$= m_{X_1} + m_{X_2},$$

deoarece $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2 = f_{X_1}(x_1)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1 = f_{X_2}(x_2)$ reprezintă densitățile de probabilitate ale VA marginale X_1 respectiv X_2.

Dacă $n > 2$, justificarea este analoagă.

Teorema 7. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sînt* VA *oarecari și* $Y = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j + b$, $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$, *atunci*

$$M[Y] = \sum_{j=1}^{n} a_j M[X_j] + b. \tag{10}$$

În baza teoremei 6 avem $M[a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b] = M[a_1X_1] + \ldots + M[a_nX_n] + M[b]$ și deoarece se verifică imediat că $M[a_j X_j] = a_j M(X_j)$, $M[b] = b$, $\left(\text{avem } M[b] = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} bf(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n+1} = b \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f = b\right)$ rezultă imediat (10).

Teorema 8. *Dacă* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sînt* VA (*independente sau nu*) *definite pe același cîmp de probabilitate, are loc egalitatea*

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} D[X_j] + 2\sum_{j<k} K_{jk} \tag{11}$$

unde $D[Y]$ *este dispersia* VA Y, *iar* $K_{jk} = \mathrm{Cov}\,(X_j, X_k)$ *este covarianța* VA X_j, X_k.

Ca și în cazul teoremei 1 este suficient să presupunem $n = 2$ și deoarece avem T $m_{X_1+X_2} = m_{X_1} + m_{X_2}$, se poate scrie

$$D[X_1 + X_2] = \iint_{\mathbb{R}^2} (x_1 + x_2 - m_{X_1+X_2})^2 f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} (x_1 + x_2 - m_{X_1} - m_{X_2})^2 f(x_1x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} (x_1 - m_{X_1})^2 f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 +$$

$$+\iint_{\mathbb{R}^2}(x_2 - m_{X_2})^2 f(x_1, x_2)\,dx_1dx_2 + 2\iint_{\mathbb{R}^2}(x_1 - m_{X_1})\,(x_2 - m_{X_2})\,f(x_1, x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= D[X_1] + D[X_2] + 2\,\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2).$$

Deoarece $D[X_j] = K_{jj} = \mathrm{Cov}\,(X_j, X_j)$, formula (11) se mai poate scrie și sub forma

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} K_{jk} \tag{11'}$$

Observația 4. Dacă VA $X_1, \ldots, X_n$ nu sînt corelate două cîte două, vom avea $K_{jk} = 0$ pentru $j \neq k$ și (11) se scrie

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} D[X_j], \tag{12}$$

adică dispersia sumei unui număr oarecare de v.a. necorelate este egală cu suma dispersiilor componentelor.

Mai general, considerînd VA $Y = \sum_{j=1}^{n} a_jX_j + b$, $a_1, \ldots, a_n$, $b \in \mathbb{R}$ se poate justifica egalitatea

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} a_jX_j + b\right] = \sum_{j=1}^{n} a_j^2\,D[X_j] + 2\sum_{j<k} a_ja_kK_{jk}. \tag{13}$$

Într-adevăr, dacă $b \in \mathbb{R}$ se poate presupune o VA discretă definită prin $Z\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ și avem $m_Z = b$ și $D[Z] = 0$, iar

$$D[aX] = \int_{\mathbb{R}}(ax - am_X)^2 f_X(x)dx = a^2\int_{\mathbb{R}}(x - m_X)^2 f_X(x)dx = a^2D[X]$$

și (13) se justifică analog cu (11). În particular, dacă VA $X_1, \ldots, X_n$ sînt necorelate, are loc egalitatea

$$D\left[\sum_{j=1}^{n} a_jX_j + b\right] = \sum_{j=1}^{n} a_j^2\,D[X]_j,\ a_1, \ldots, a_n,\ b \in \mathbb{R}. \tag{13'}$$

Evident, egalitățile (12) și (13') au loc dacă VA $X_1, \ldots, X_n$ sînt independente două cîte două, deoarece în acest caz ele sînt necorelate două cîte două.

Teorema 9. *Dacă X, Y sînt* VA *atunci*

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] + \operatorname{Cov}(X, Y) \tag{14}$$

şi deci, dacă VA *X şi Y sînt necorelate (deci, în particular, independente) avem*

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y]. \tag{14'}$$

Într-adevăr, folosind definiţia covarianţei, VA, X, Y deducem:

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - m_X)(y - m_Y) f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y -$$

$$- m_X \iint_{\mathbb{R}^2} yf(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - m_Y \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + m_X m_Y \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= M[XY] - m_X m_Y - m_X m_Y + m_X m_Y = M[XY] - M[X]M[Y],$$

deoarece $M[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă $f = f_{X,Y}$ este densitatea de probabilitate a vectorului aleator bidimensional (X, Y).

Teorema 10. *Dacă* VA *X, Y sînt independente, are loc egalitatea*

$$D[XY] = D[X]D[Y] + m_X^2 D[Y] + m_Y^2 D[X]. \tag{15}$$

Notînd $Z = XY$, avem $m_Z = m_X m_Y$ (deoarece VA X, Y sînt independente) şi deci

$$D[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} (xy - m_X m_Y)^2 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} x^2y^2 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + m_X^2 m_Y^2 -$$

$$- 2m_X m_Y M[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} x^2y^2 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - m_X^2 m_Y^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\mathrm{d}y - m_X^2 m_Y^2 = \alpha_2[X] \cdot \alpha_2[Y] - m_X^2 m_Y^2 =$$

$$= (D[X] + m_X^2)(D[Y] + m_Y^2) - m_X^2 m_Y^2 = D[X]D[Y] + m_X^2 D[Y] + m_Y^2 D[X]$$

(s-a ţinut cont că $D[X] = \alpha_2[X] - \alpha_1^2[X]$ pentru orice VA X).

Observația 5. În particular, dacă VA X și Y sînt centrate, adică scriind $\mathring{X} = X - m_X$, $\mathring{Y} = Y - m_Y$ în loc de VA X respectiv Y, deoarece $m_{\mathring{X}} = 0$ și $m_{\mathring{Y}} = 0$ rezultă $D[\mathring{X}\mathring{Y}] = D[\mathring{X}] \cdot D[\mathring{Y}]$, adică dispersia produsului a două VA centrate este egală cu produsul dispersiilor celor două VA.

Trecînd la momente de ordin superior, se pot justifica prin calcul egalitățile

$$\mu_3\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} \mu_3[X_j]$$

dacă $X_1, \ldots, X_n$ sînt VA independ ente, iar în aceleași condiții

$$\mu_4\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} \mu_4[X_j] + 6 \sum_{j<k} D[X_j]\, D[X_k]$$

10. Variabile aleatoare discrete importante

În baza definițiilor anterioare VA X se va numi *discretă* dacă are punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ ca puncte de concentrare a probabilităților, iar $P(X = x_n) = p_n$, $p_n > 0$, $\sum_n p_n = 1$; funcția de repartiție a acestei VA se scrie

$$F_X(x) = \sum_n p_n H(x - x_n) \tag{1}$$

unde $H(x - a)$ este funcția unitate translatată : $H(x - a) = (T_a H)(x)$ (fiind egală cu zero pentru $x < a$ și egală cu unu dacă $x > a$, valoarea în $x = a$ fiind indiferentă). Deoarece $H'(x - a) = \delta_a(x) = T_a\delta(x)$, $\delta_a(x)$ fiind distribuția lui Dirac translatată, se deduce densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = F'_X(x) = \sum_n p_n \delta_{x_n}(x) = \sum_n p_n \delta(x - x_n), \quad \text{unde s-a notat } \delta_a(x) = \delta(x - a). \tag{1'}$$

În (1) (deci și în (1')) sumele pot fi finite sau nu.

În tabelul de mai jos sînt prezentate cele mai importante VA discrete împreună cu două din caracteristicele lor numerice : media și dispersia.

Denumirea distribuției	Valori posibile	Probabilitatea $P(X = k)$	Media	Dispersia	Observații ;
Binomială	$0 \leqslant k \leqslant n$	$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	np	npq	$q = 1 - p$; $0 \leqslant k \leqslant n$
Hipergeometrică	$\max(0, n-b) \leqslant k \leqslant \min(n, a)$	$P_k = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$	$\frac{na}{a+b}$	$\frac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$	$a, b, n \in \mathbb{N}$; $n \leqslant a+b$
Poisson	$k \in \mathbb{N}$	$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$\lambda > 0$
Geometrică	$k \in \mathbb{N}$	$P_k = pq^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$q = 1 - p$
Binomială cu exponent negativ	$k \geqslant m$	$P_k = C_{k-1}^{m-1} p^m q^{q-m}$	$\frac{m}{p}$	$\frac{qm}{p^2}$	$q = 1 - p$, $C_\beta^\alpha = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

10.1. Distribuția binomială

Se spune că VA X are distribuție binomială cu parametrii n și p (n întreg pozitiv, $0 < p < 1$) dacă pentru orice $k = 0, 1, \ldots, n$

$$P_n(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{2}$$

unde $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ și $q = 1 - p$

Distribuția (sau legea) binomială se mai numește legea (schema) lui Bernoulli și este de o mare importanță în teoria fiabilității ; această lege intervine în cazul în care se presupune că se efectuează o serie de n încercări independente, în fiecare încercare un eveniment A putîndu-se realiza cu probabilitatea p. Se solicită probabilitatea ca evenimentul A să se producă de k ori și să nu se realizeze în celelalte $n-k$ încercări.

Pentru a deduce egalitatea (2) vom demonstra inițial rezultatul :

Teorema 1. (*Schema lui Poisson*) : *Dacă evenimentele independente* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *au probabilități cunoscute*

$$P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \ldots, P(A_n) = p_n,$$

atunci probabilitatea ca din cele n evenimente să se realizeze k (și să nu se realizeze $n - k$*) este coeficientul lui* x^k *din funcția polinomială*

$$Q(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2)\ldots(p_nx + q_n).$$

unde $q_j = 1 - p_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pentru ușurința demonstrației, să presupunem inițial $n = 4$, $k = 2$ cînd evenimentul constînd din realizarea a două evenimente din grupul A_1, A_2, A_3, A_4 și nerealizarea celorlate două se va scrie $(A_1 \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4') \cup (A_1 \cap A_3 \cap A_2' \cap A_4') \cup (A_1 \cap A_4 \cap A_2' \cap A_3') \cup$ $\cup (A_2 \cap A_3 \cap A_1' \cap A_4') \cup (A_2 \cap A_4 \cap A_1' \cap A_3') \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_1' \cap A_2')$.
Deci evenimentul în cauză este reuniunea a șase evenimente incompatibile două cîte două, fiecare eveniment fiind intersecția a patru evenimente independente ; conform regulilor de calcul stabilite la punctul 3 probabilitatea acestui eveniment este egală cu

$$p_1p_2q_3q_4 + p_1p_3q_2q_4 + p_1p_4q_2q_3 + p_2p_3q_1q_4 + p_2p_4q_1q_3 + p_3p_4q_1q_2$$

și se observă că nu este altceva decît coeficientul lui x^2 din polinomul

$$Q(x) = (p_1x + q_1)\ (p_2x + q_2)\ (p_3x + q_3)\ (p_4x + q_4)$$

Formula (2) se deduce direct din considerațiile anterioare presupunînd $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = P(A) = p$ și deci $Q(x) = (px + q)^n$; probabilitatea ca dintre n evenimente cu aceeași probabilitate p să se realizeze exact k — conform schemei lui Poisson — este egală cu coeficientul lui x^k din polinomul $(px + q)^n$, deci în baza formulei binomului lui Newton rezultă $P_n(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

În mod convențional evenimentul A din schema lui Bernoulli se numește *succes*, iar contrarul său A', care apare în toate experiențele cu probabilitatea $q = 1 - p$ se va numi *eșec*. La o încercare, se poate nota succesul cu 1 și eșecul cu 0, ceea ce face ca fiecare eveniment elementar $e = (e_1, \ldots, e_n)$ cu n încercări să se prezinte ca un șir de zerouri și unități. VA X cu distribuție binomială se poate scrie ca suma a n VA independente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definite astfel : $X_j = 1$ dacă la încercarea j avem un succes și $X_j = 0$ dacă la încercarea j avem un eșec : $X = X_1 + \ldots X_n$. Se observă că $m_X = m_{X_1} + \ldots + m_{X_n} = np$ deoarece X_j este o VA discretă $X_j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ deci $m_{X_j} =$

$= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$; în plus deoarece dispersia lui X_j este egală cu $\alpha_2[X] - m_{X_j}^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$, se deduce

$$D^2[X] = \sum_{j=1}^{n} D^2[X_j] = npq$$

(s-au utilizat rezultatele din punctele 6 și 8)

Exemplul 1. Dacă 20 de aparate sînt supuse probelor de fiabilitate și dacă probabilitatea ca un aparat să intre în pană în timpul perioadei de probă este egală cu 0,1, atunci probabilitățile $P_{20}(0)$, $P_{20}(1)$, $P_{20}(2)$, ... sînt egale respectiv cu $q^{20} = 0{,}9^{20}$; $C_{20}^1 pq^{19} = 2 \cdot 0{,}9^{19}$, $C_{20}^2 p^2 q^{18} = 1{,}9 \cdot 0{,}9^{18}$, ..., iar probabilitatea ca în timpul probelor cel mult patru aparate să se defecteze este egală cu

$$\sum_{k=0}^{4} C_{20}^k p^k q^{20-k} = \sum_{k=0}^{4} C_{20}^k \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{20-k}.$$

Dacă numărul de încercări n este foarte mare, iar p este mic, formula (2) este incomodă în calcule și de aceea se pune problema aproximării lui $P_n(k)$; această aproximare se poate realiza imediat dacă se presupune în plus produsul $np = \lambda =$ constant) Avem :

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

și deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$

$= e^{-\lambda}$ se deduce aproximarea

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} = P_k \qquad (3)$$

În practică se poate utiliza și următoarea aproximare Moivre-Laplace :

Dacă în cursul unei serii de n încercări independente probabilitatea evenimentului A este egală cu p, atunci probabilitatea pentru ca numărul μ de realizări ale evenimentului A în cursul acestor n încercări să verifice inegalitățile $a < \dfrac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b$ (a, b fiind numere reale oarecari $a < b$) este, pentru n mare, aproximativ egală cu $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

VA X care ia doar valori întregi $m = 0, 1\ 2, \ldots,$ $\min(M, n)$ cu probabilitățile

$$p_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad p_m = P(X = m), \tag{5}$$

unde n, m, N, M sînt numere întregi ($m \leqslant M$, $n < N$, $n \geqslant m$), iar C_q^p reprezintă numărul combinărilor de p elemente luate cîte q, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \leqslant p$) se spune că este distribuită după legea hipergeometrică.

Scriind a și b în loc de M respectiv $N - M$ și k în loc de m se deduce exact relația din tabel.

Această VA este de asemenea importantă în teoria fiabilității și apare în probleme de tipul următor : se știe că într-un lot de N piese sînt M piese defecte; se formează, la întîmplare un eșantion de n piese din lot. Probabilitatea ca acest eșantion să conțină m piese defecte este dată de (5).

Într-adevăr, numărul de cazuri posibile de extracție a n piese dintr-un lot de N piese ($n \leqslant N$) este egal cu C_N^n ; un grup de m piese defecte dintr-un lot de M piese defecte poate fi format în C_M^m moduri, iar un grup de α piese dintr-un lot de a piese poate fi format în C_a^α moduri (aici $\alpha = n - m$ este numărul de piese fără defect din totalul $a = N - M$ piese fără defect). Un grup de m piese defecte și un grup de $\alpha = n - m$ piese bune pot fi luate în $C_M^m \cdot C_a^\alpha = C_m^M \cdot C_{N-M}^{n-m}$ moduri. În baza formulei clasice a calculului probabilităților avem

$$\text{avem } p_m = \frac{\text{numărul de cazuri favorabile} = C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{\text{numărul total de cazuri} = C_N^n}$$

Distribuția hipergeometrică este legată de așa numita schemă a bilei neîntoarse (sau a extracției exhaustive) care se formulează astfel : într-o urnă sînt a bile albe și b bile negre ; din urnă se extrag n bile, una cîte una, fără întoarcerea bilei extrase în urnă (sau se extrag n bile deodată). Probabilitatea ca din cele n bile α să fie albe și $\beta = n - \alpha$ să fie negre este egală cu $\dfrac{C_a^\alpha C_b^\beta}{C_{a+b}^n}$.

Justificarea este aceeași ca și în cazul deducerii formulei (5). Problema se poate generaliza la o urnă cu bile de $m > 2$ culori astfel : a_1 bile de culoarea c_1, a_2 bile de culoarea $c_2, \ldots, a_m$ bile de culoarea c_m ; se extrag n bile deodată (sau una cîte una fără întoarcerea bilei extrase în urnă). Probabilitatea de a obține α_1 bile de culoarea c_1, α_2

bile de culoarea $c_2, \ldots, \alpha_m$ bile de culoarea c_m, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$ este egală cu $\dfrac{C_{a_1}^{\alpha_1} C_{a_2}^{\alpha_2} \ldots C_{a_m}^{\alpha_m}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_m}^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m}}$.

Pentru a calcula media VA X distribuită hipergeometric, să considerăm o urnă cu a bile albe și b negre din care se extrage, fără întoarcere, cîte o bilă; să definim VA X_k, unde $X_k=1$ dacă la extragerea k se obține o bilă albă și $X_k = 0$ dacă la extragerea k se obține o bilă neagră. Evident VA X_k este discretă, fiind definită prin tabelul

$$X_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{a}{a+b} & \dfrac{b}{a+b} \end{pmatrix}, \qquad F_{X_k}(x) = \frac{a}{a+b} H(x-1) + \frac{b}{a+b} H(x).$$

Avem $M[X_k] = 1 \cdot \dfrac{a}{a+b} + 0 \cdot \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{a}{a+b}$ și cum $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ se deduce

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n] = \frac{na}{a+b}.$$

În ceeea ce privește dispersiile, nu se poate afirma că $D[X] = D[X_j]$ deoarece VA X_j nu sînt independente două cîte două și de aceea vom calcula dispersia direct: $D[X] = \alpha_2[X] - m_X^2$. Avem

$$\alpha_2[X] = \sum_k k^2 \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \sum_k k(k-1) \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} + \sum_k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} =$$

$$= \frac{a(b-1)}{C_{a+b}^n} \sum_k C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} + M[X] = C_{a+b-2}^{n-2} \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n} + \frac{an}{a+b}$$

utilizîndu-se egalitatea $\sum_{k=2}^{n} C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} = C_{a+b-2}^{n-2}$; prin înlocuire se deduce $D[X] = \alpha_2[X] - m_X^2 = \dfrac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$

10.3. Distribuția Poisson

VA X va avea distribuția Poisson cu parametrul $\lambda > 0$, dacă ea poate lua orice valoare întreagă pozitivă, iar

$$P_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se observă că definiția este corectă: $P_k > 0$ și

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Distribuția Poisson a apărut la secțiunea 10.1 fiind strîns legată de distribuția binomială; vom da un alt exemplu privind această distribuție după ce se va calcula media și dispersia acestor VA. Din definiție, rezultă

$$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$\alpha_2[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} \lambda^{k-1} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda})' = \lambda + \lambda^2 \text{ și deci } D[X] =$$

$$= \sigma^2[X] = \alpha_2[X] - M^2[X] = \lambda;$$

s-a obținut astfel interpretarea probabilistică a parametrului λ, iar reciproc dacă pentru o VA discretă X se constată că media și dispersia acesteia coincid, atunci X este o VA poissoniană (cel puțin în primă aproximație).

Exemplul 2. (problema fluxului de evenimente). Prin flux de evenimente se înțeleg acele evenimente care se produc la intervale aleatoare de timp (de exemplu, penele unui dispozitiv tehnic, numărul de apeluri telefonice, sosirea persoanelor la un complex de servire etc.). Se pot face evident următoarele ipoteze:

i. În intervale de timp disjuncte numerele evenimentelor produse nu sînt dependente.

ii. Dacă $p_m(t_1, t_2)$ este probabilitatea realizării a m evenimente în intervalul $[t_1, t_2]$, atunci

$$p_1(t, t+h) = \lambda(t) + \alpha(t, h),\ p_2(t, t+h) + p_3(t, t+h) + \ldots \to 0$$

$(h \to 0)$, unde $\frac{\alpha}{h} \to 0$ $(h \to 0)$, iar $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție pozitivă.

Să arătăm că pentru un flux de evenimente verificînd i și ii, probabilitatea ca în intervalul de timp $[t_0, t]$ să se realizeze exact m evenimente $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ este legată de o VA de tip Poisson. Pentru t_0 fixat vom nota prin $p_m(t)$ această probabilitate și să observăm că $p_0(t+h)$ se poate obține prin intersecția evenimentelor E_1 (nici un eveniment nu s-a realizat în intervalul $[t_0, t[$ și E_2 (nici un eveniment nu s-a realizat în intervalul $[t, t+h[$; în baza lui i aceste evenimente sînt independente deci $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$, adică

$$p_0(t+h) = p_0(t)p_0(t, t+h)$$

sau, deoarece prin ipoteza ii avem (din $p_0(t, t+h) + p_1(t, t+h) + \ldots = 1$) $p_0(t, t+h) =$
$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t, t+h) = 1 - \lambda(t)h - \alpha(t, h)$, se deduce

$$p_0'(t+h) - p_0(t) = -\lambda(t)p_0(t)h + \alpha_1, \frac{\alpha_1}{h} \to 0 \, (h \to 0).$$

Aceasta înseamnă că funcția p_0 este derivabilă la orice moment t, derivata sa fiind egală cu $-(\lambda p_0)(t)$, iar $p_0(t_0) = 1$.

Pentru a obține relațiile verificate de $p_1, p_2, \ldots$ să observăm că în intervalul de timp $[t_0, t+h[$, $t_0 < t$ se pot obține exact m evenimente dacă m evenimente s-au produs în intervalul $[t_0, t[$ și nici unul în intervalul $[t, t+h[$ sau $m-1$ evenimente în intervalul $[t_0, t[$ și unul în intervalul $[t, t+h[$ etc. ; se găsesc astfel $m+1$ procedee incompatibile și în baza regulilor de calcul cu probabilitățile, se obține

$$p_m(t+h) = p_m(t)p_0(t+h) + p_{m-1}(t)p_1(t+h) + \ldots p_0(t)p_m(t+h).$$

În baza ipotezelor anterioare, se deduce

$$p_m(t+h) - p_m(t) = [p_{m-1}(t) - p_m(t)]\lambda(t)h + \alpha_2, \frac{\alpha_2}{h} \to 0 \, (h \to 0),$$

adică p_m este soluție a ecuației diferențiale

$$p_m'(t) = [p_{m-1}(t) - p_m(t)]\lambda(t), \; p_m(t_0) = 0, \; m = 1, 2, \ldots$$

(avem $p_1(t_0) = p_2(t_0) = \ldots = 0$ deoarece $p_0(t_0) = 1$).

Din ecuația diferențială $p_0' = -\lambda p_0$ verificată de p_0, rezultă

$$p_0(t) = e^{-\mu(t)}, \quad \mu(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s) \, ds$$

(deoarece $p_0(t_0) = 1$ și $\mu(t_0) = 0$; din ecuația diferențială verificată de p_1, adică $p_1' = (p_0 - p_1)\lambda$, cum $p_0(t) = e^{-\mu(t)}$, $p_1(t_0) = 1$, se deduce

$$p_1(t) = \frac{\mu(t)}{1!} e^{-\mu(t)},$$

iar în general

$$p_m(t) = \frac{\mu^m(t)}{m!} e^{-\mu(t)}, \; m = 0, 1, 2, \ldots \; \mu(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s) \, ds. \tag{6}$$

Astfel, pentru intervalul $]t_0, t[$ avem o infinitate numărabilă de evenimente elementare: sau nici un eveniment, sau un eveniment, sau două evenimente etc. probabilitatea lor fiind definită prin (6) în care μ, după cum s-a calculat anterior, reprezintă numărul mediu de evenimente care se produc în intervalul $[t_0, t[$; funcția λ cu ajutorul căreia se definește parametrul μ se numește intensitatea fluxului poissonian în discuție.

În particular, dacă $\lambda(t) = \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ se deduce $\mu(t) = \lambda_0 t$ (presupunînd $t_0 = 0$), iar (6) devine

$$p_m(t) = \frac{\lambda_0^m t^m}{m!} e^{-\lambda_0 t}; \qquad (6')$$

acest caz apare în studiul fluxului de electroni emiși de catodul unui tub electronic; probabilitatea ca numărul de electroni emiși de catod să fie egal cu m (într-un interval t de timp), dacă numărul mediu de electroni emiși în unitatea de timp este egal cu λ_0, este dată de (6').

10.4. Distribuția geometrică

Distribuția geometrică a unei VA X are loc cînd pentru $X = k$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ avem $P(X = k) = pq^{k-1}$, $q = 1 - p$ și apare dacă probabilitatea realizării unui eveniment A (care poate sau nu să se realizeze în cadrul unei experiențe) este p și se repetă experiența pînă la prima realizare a acestui eveniment, după care experiențele sînt oprite.

Astfel, X va lua valoarea 1 dacă evenimentul A se realizează în cadrul primei experiențe și deci $P(X = 1) = p$; X va lua valoarea 2 dacă evenimentul A nu s-a realizat la prima experiență, dar se realizează la a doua experiență, deci $P(X = 2) = P(A' \cap A) = P(A')P(A) = (1 - p)p = pq$. Analog, $P(X = 3) = P(A' \cap A' \cap A) = q^2 p$ etc. Avem evident $F_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} H(x - k)$, definiția fiind corectă deoarece $pq^{k-1} > 0$, iar $\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1 - q} = 1$. Media și dispersia acestei VA se obțin cu ușurință:

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \left[\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right] =$$

$$= p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \left(\frac{q}{1 - q} \right) = \frac{p}{(1 - q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Apoi cum

$$\alpha_2[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \left[\sum_{k=1}^{\infty} kq^k \right] =$$

$$= p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \left[\frac{q}{(1 - q)^2} \right] = \frac{(2 - p)}{p^2} \text{ folosind faptul că } \sum_{k=1}^{\infty} kq^k =$$

$$= q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right] = q\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{q}{(1-q)^2}, \text{ se deduce}$$

$$D^2[X] = \alpha_2[X] - M^2[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

10.5. Distribuția binomială cu exponent negativ

Se spune că VA X are distribuție binominală cu exponent negativ, cu parametrii m și p ($m=1,2,\ldots, 0 < p < 1$) dacă X poate lua valorile m, $m+1$, $m+2$, ..., iar

$$P(X = k) = C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-n},\ q = 1 - p$$

Această distribuție apare în modele de tipul următor :

Să presupunem că s-a efectuat un număr de experiențe independente, în cursul fiecărei observații evenimentul A (cum ar fi, de exemplu, nefuncționarea unui subansamblu al unui aparat) poate să se producă cu probabilitatea p. Observațiile continuă pînă ce evenimentul se produce de m ori și se solicită probabilitatea pentru ca acesta să se producă prin efectuarea exact a k observații. În aceste condiții, evenimentul $\{X = k\}$ se scrie ca intersecție a două evenimente : „în primele $k-1$ observații evenimentul A se produce de $m-1$ ori" și „în observația k se produce evenimentul A". Din schema lui Bernoulli se deduce că probabilitatea primului eveniment este $C_{k-1}^{m-1} p^{m-1} q^{k-m}$ iar probabilitatea celui de-al doilea eveniment este egală cu p. Așadar, $P(X = k) = p.\ C_{k-1}^{m-1} p^{m-1} q^{k-m} = C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}$.

Numele acestei distribuții provine din faptul că are loc dezvoltarea Abel

$$(1-x)^{-m} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^{k-m} \quad |x| < 1$$

și deci coeficienții $C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}$ pot fi considerați ca fiind coeficienții dezvoltării

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p}\right)^{-m} = p^m (1-q)^{-m} = p^m \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} q^{k-m} =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m}.$$

Se observă că definiția acestei VA este corectă deoarece

$$P(X = k) > 0, \text{ iar } \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-1} = \left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p}\right)^{-m} = \left(\frac{1-q}{p}\right)^{-m} = 1.$$

Media acestei VA se deduce din dezvoltarea anterioară pentru $(1-x)^{-m}$, observînd că $\frac{x^m}{(1-x)^m} = \sum_{k=m}^{\infty} C_{k-1}^{m-1} x^k$, și deci

$$\sum_{k=m}^{\infty} k\, C_{k-1}^{m-1} x^{k-1} = \left[\frac{x^m}{(1-x)^m}\right]' = \frac{m x^{m-1}}{(1-x)^{m+1}};$$

Așadar

$$M[X] = \sum_{k=m}^{\infty} k\, C_{k-1}^{m-1} p^m q^{k-m} = p^m q^{-m+1} \sum_{k=m}^{\infty} k\, C_{k-1}^{m-1} q^{k-1} =$$

$$= p^m q^{-m+1} \frac{m q^{m-1}}{p^{m+1}} = \frac{m}{p}.$$

Analog se calculează și dispersia $D[X] = \frac{mq}{p^2}$.

11. Variabile aleatoare continue importante

11.1. Generalități

În baza definiției 2 de la punctul 6 VA X (scalară sau vectorială) este continuă dacă densitatea de probabilitate f_X este o funcție continuă (sau cel puțin continuă pe porțiuni) pe $\mathbb{R}$ sau echivalent, dacă funcția de repartiție $P_X(x) = P(X < x)$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

În practică se întîlnesc suficient de multe VA continue; în tabelul alăturat vom prezenta cîteva dintre acestea:

Observația 1. Pentru toate densitățile de probabilitate din tabel se verifică ipotezele obligatorii: $f_X(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$ cu mențiunea că dacă f_X este definită doar în intervalul $I \subset \mathbb{R}$, se prelungește f_X la $\mathbb{R}$ punînd $f_X(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus I$.

Observația 2. Densitățile de probabilitate din tabel au fost definite în cazul cel mai simplu al unei VA X scalare, unele din acestea pot fi generalizate la VA vectoriale. Astfel distribuția uniformă în domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$ este definită prin densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \frac{1}{|D_n|_n} k_{D_n}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

unde $|D_n|_n$ este măsura n-dimensională a lui D_n (se presupune $|D_n|_n < \infty$, adică $|\partial D_n|_n = 0$), iar k_{D_n} este funcția caracteristică a lui D_n.

Denumirea distribuției	Intervalul de concentrare a valorilor	Densitatea de probabilitate	Media	Dispersia	Observații
Uniformă	$]a, b[$	$\frac{1}{b-a}$, $a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{2}$	
Beta	$]0, 1[$	$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}$, $p > 0, q > 0$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$	
Triunghiulară	$]-1, 1[$	$1 - \lvert x \rvert$	0	$\frac{1}{6}$	
Cauchy	$]-\infty, \infty[$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	0	—	
Exponențială	$]0, \infty[$	$\lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	Caz particular al distribuției gamma ($\mu = 0$)
Exponențială simetrică	$]-\infty, \infty[$	$\frac{a}{2} e^{-a\lvert x \rvert}$, $a > 0$	0	$\frac{2}{a^2}$	
Gamma	$]0, \infty[$	$\frac{k^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} x^{\mu} e^{-kx}$, $k > 0$; $\mu > -1$	$\frac{\mu+1}{k}$	$\frac{\mu+1}{k^2}$	
Erlang	$]0, \infty[$	$\frac{k^{n+1}}{n!} x^n e^{-kx}$, $k > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n+1}{k}$	$\frac{n+1}{k^2}$	Caz particular al distribuției gamma ($\mu = n$);
χ^2 (hi doi)	$]0, \infty[$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$, $n = 1, 2, \ldots$	n	$2n$	Caz particular al distribuției gamma ($k = 1/2, \mu = n/2 - 1$)

Denumirea distribuției	Intervalul de concentrare a valorilor	Densitatea de probabilitate	Media	Dispersia	Observații
χ (hi)	$]0, \infty[$	$\frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ $n = 1, 2, \ldots$			hi patrat = hi doi $Y = X^2$, dacă Y este VA definită de acest f_X, iar X este VA definită de hi.
lognormală	$]0, \infty[$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{a + \frac{1}{2}\sigma^2}$	$e^{2a + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$	
Weibull	$]0, \infty[$	$\alpha c x^{\alpha-1} \cdot e^{cx^{\alpha}}$; $\frac{1}{\alpha} > -1$	$\frac{\Gamma(1/\alpha+1)}{c^{1/\alpha}}$	$\frac{\Gamma(2/\alpha+1)-\Gamma^2(1/\alpha+1)}{c^{2/\alpha}}$	
F (= Fisher Snedécor)	$]0, \infty[$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} \cdot x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$	$\frac{n_1}{n_2 - 2}$	$\frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$	
Normală	$]-\infty, \infty[$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}}$	m	σ^2	
Student	$]-\infty, \infty[$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$	0	$\frac{2}{n-5}$	

În particular, în $\mathbb{R}^2$, distribuția uniformă pentru intervalul bidimensional $D_2 = [a, b] \times [c, d]$ va avea densitatea de probabilitate

$$f(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} H(x-a)H(b-x)H(y-c)H(d-y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(c-d)} & \text{pentru } (x, y) \in D_2 \\ 0 & \text{pentru } (x, y) \notin D_2. \end{cases}$$

iar pentru interiorul elipsei $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, distribuția uniformă va fi definită prin

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi ab} H\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(în ambele cazuri H este funcția unitate).

În $\mathbb{R}^n$ distribuția normală este definită prin densitatea de probabilitate

$$f(x) = \sqrt{\frac{\det C}{(2\pi)^n}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-\alpha)\, C({}^t x - {}^t\alpha),}$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$, ${}^t x$ și ${}^t\alpha$ este vectorul transpus atașat lui x respectiv α, iar C este o matrice simetrică pozitiv-definită; în particular, în $\mathbb{R}^2$ avem

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{2\pi}\, e^{-1/2[a(x-a_1)^2 + 2b(x-a_1)(y-a_2) + c(y-a_2)^2]}$$

dacă $x = (x, y)$, $\alpha = (a_1, a_2)$, $C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$.

11.2. Legea normală unidimensională

Din tabel, se deduce că VA X va fi normal distribuită în $\mathbb{R}$ dacă densitatea ei de probabilitate este

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

unde m este media VA X ($m = m_X = M[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\mathrm{d}x$), iar $\sigma^2 = D[X]$ este dispersia acestei VA. Graficul lui f_X este trasat pe fig. II.12 și se mai numește clopotul lui Gauss; este simetric față

ve dreapta $x = m$, iar momentele centrate de ordinul s ale acestei VA dor fi date de

$$\mu_s[X] = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^s f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sigma^2)^{s/2} \int_{\mathbb{R}} t^s \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad s \in \mathbb{R},$$

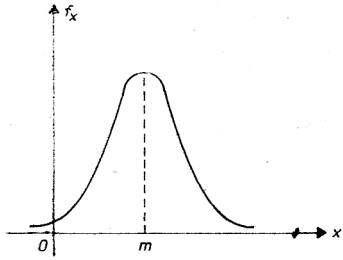

Fig. II. 12

integralele fiind convergente în sensul valorii principale; deci dacă $s \in \mathbb{Z}$ este impar avem $\mu_{2k+1}[X] = 0$, iar dacă $s \in \mathbb{Z}$ este par, avem

$$\mu_{2k}[X] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\sigma^2)^k \int_0^t t^{2k} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(k + 1/2)}{\sqrt{\pi}} (2\sigma^2)^k.$$

Calculînd $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, se deduce egalitatea $\mu_{2k}[X] = 1.3 \ldots (2k - 1)\mu_2^k$, verificîndu-se astfel că aplatizarea acestei VA este nulă : $\frac{\mu_4[X]}{\sigma^4} - 3 = 0$ (vezi punctul 7).

Distribuția normală este una dintre legile probabilistice cele mai des întîlnite în teorie și practică; în marea majoritatea a problemelor practice se poate presupune că legea de distribuire a VA în studiu este normală. Așa se face că această lege constituie un etalon pentru comparație cu alte legi probabilistice și ea este perfect determinată dacă se cunosc doar două din caracteristicile ei numerice : media $m = m_X$ și dispersia $D[X] = \sigma^2$; cu ajutorul acestora se poate obține direct densitatea de probabilitate $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, iar funcția de repartiție va fi $F(x) = P(X) < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$.

În baza teoriei generale, probabilitatea ca VA normal distribuită X să aparțină intervalului $I = [\alpha, \beta]$ va fi egală cu

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_I f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x;$$

cu schimbarea de variabilă $x = m + \sigma z$, $dx = \sigma dz$, se deduce

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$$

unde s-a notat $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Funcția Φ astfel obținută se numește funcția lui Laplace și valorile ei se pot obține din tabele; se observă că Φ este impară (fiind integrala pe intervalul $[0, x]$ a unei funcții pare) și de aceea este suficient să se tabeleze Φ pentru valori pozitive ale lui x.

În particular, dacă intervalul $[\alpha, \beta]$ este simetric în raport cu media $m = m_X$, scriind $\alpha = m_X - \varepsilon$, $\beta = m_X + \varepsilon$ se deduce $P(m_X - \varepsilon < X < m_X + \varepsilon) = P(|X - m_X| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{m_X}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{m_X}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{m_X}\right)$.

În particular, luînd $\varepsilon = \sigma_X$, $\varepsilon = 2\sigma_X$, $\varepsilon = 3\sigma_X$, $\varepsilon = 3\sigma_X$, $\varepsilon = 4\sigma_X$ și folosind tabelele, se deduce $P(|X - m_X| < \sigma_X) \approx 0{,}68$, $P(|X - m_X| < 2\sigma_X) \approx 0{,}95$, $P(|X - m_X| < 3\sigma_X) \approx 0{,}997$, $P(|X - m_X| < 4\sigma_X) \approx 0{,}999994$, obținîndu-se astfel un rezultat cunoscut sub numele de regula celor trei sigma:

O VA X normal distribuită nu se poate distanța de valoarea ei medie decît cu o probabilitate de 0,3 % (sau altfel spus în medie, doar trei încercări dintr-o mie fac ca devierea VA X de valoare medie să fie mai mare decît $3\sigma_X$) ceea ce face ca practic valorile unei VA X normal distribuite să fie situate în intervalul $[m_X - 3\sigma_X, m_X + 3\sigma_X]$.

În cazul unui vector aleator normal distribuit (X, Y) o parte din calcule s-au făcut la punctul 9, exemplul 2; din aceste calcule se deduce că VA marginale X și Y au covarianța

$$K_{XY} = \frac{b}{b^2 - ac}$$

deci VA X şi Y sînt necorelate numai dacă $b = 0$, cînd densitatea de probabilitate va fi

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{ac}}{2\pi} e^{-1/2[a(x-a_1)^2+C(y-a_2)^2]} = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Prin urmare, aceste VA vor fi în acelaşi timp şi VA indendente, dacă ele sînt necorelate.

Importanţa teoretică a acestei distribuţii rezultă şi din următoarea teoremă limită.

Dacă $(X_k)_{k\geq 1}$ este un şir de VA independente, atunci densitatea de probabilitate a VA $X = X_1 + \ldots + X_n$ este aproximată, cu o eroare oricît de mică (pentru n mare) de una normală avînd media $\sum_{j=1}^{n} m_{X_j}$ şi $\sigma_X = nk$, unde k se obţine cu ajutorul matricii formate cu momentele centrate de ordinul al doilea ale VA $X_1, \ldots, X_n$. Variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pot fi independente sau nu avînd sau neavînd aceeaşi densitate de probabilitate. Aceste rezultate aparţin unui capitol important al teoriei probabilităţilor şi constituie o explicaţie pentru importanţa care se acordă studiului VA normal distribuite.

Vom reveni asupra unor aspecte ale teoriei probabilităţilor în capitolul IV punctul 7, cînd vom studia intervenţia transformării Fourier în această teorie.

ANALIZĂ COMPLEXĂ

1. Şiruri, serii, continuitate, derivabilitate

Definiţia 1. a. *Prin şir pe numere complexe* (sau pe scurt, *şir din* $\mathbb{C}$) *se înţelege orice aplicaţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$; notînd $f(n) = z_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$ un astfel de şir se va scrie $(z_n)_{n\geq 1}$ sau $(z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots)$.

b. *Şirul* $(z_n)_{n\geq 1}$ *din* $\mathbb{C}$ *se spune că are limita* $z \in \mathbb{C}$ (*sau converge către* $z \in \mathbb{C}$) *dacă avem*

$$z_n = z + a_n, \tag{1}$$

unde $(a_n)_{n\geq 1}$ *este un şir din* $\mathbb{C}$ *convergent către zero* (adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încît $|a_n| < \varepsilon$ dacă $n \geq N$). Dacă şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ din $\mathbb{C}$ are limita $z \in \mathbb{C}$ se scrie

$$z_n \to z \ (n \to \infty) \text{ sau } \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

c. *Şirul* $(z_n)_{n\geq 1}$ *din* $\mathbb{C}$ *se spune că este fundamental* (*sau şir Cauchy*) *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încît*

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \text{ dacă } n, m > N. \tag{2}$$

Se ştie (vezi A.M. cap. I, punctul 1) că orice şir din $\mathbb{C}$ care are o limită este un şir fundamental şi reciproc; în plus scriind

$$z_n = (x_n, y_n) = x_n + iy_n,\ x_n = \operatorname{Re} z_n,\ y_n = \operatorname{Im} z_n,\ z = (x, y) =$$

$$= x + iy,\ x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$$

$$a_n = (\alpha_n, \beta_n) = \alpha_n + i\beta_n,\ \alpha_n = \operatorname{Re} a_n,\ \beta_n = \operatorname{Im} a_n$$

avem $z_n \to z\ (n \to \infty)$ dacă şi numai dacă şirurile din $\mathbb{N}$ $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ au limita x respectiv y:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n =$$

$$= x + iy. \tag{3}$$

Vom nota prin $l^+(\mathbb{C})$ şirurile din $\mathbb{C}$ definite mai sus, deoarece în practică se mai întîlnesc şi şiruri bilaterale $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ldots, z_{-n}, \ldots, z_{-1}, z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots) = (z_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ (evident, un şir bilateral din $\mathbb{C}$ se defineşte prin aplicaţia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $f(n) = z_n$, $n \in \mathbb{Z}$) care vor fi notate $l(\mathbb{C})$.

Definiţia 2. *Prin serie din* $\mathbb{C}$ *se înţelege perechea* $((z_n)_{n\geqslant 1}, (s_n)_{n\geqslant 1})$, *unde* $(z_n)_{n\geqslant 1} \in l^+(\mathbb{C})$, *iar* $(s_n)_{n\geqslant 1} \in l^+(\mathbb{C})$, *cu* $s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ şi se obişnuieşte să se scrie

$$((z_n)_{n\geqslant 1}, \quad (s_n)_{n\geqslant 1}) = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad (4)$$

Dacă şirul $(s_n)_{n\geqslant 1} \in l^+(\mathbb{C})$ are limita $s \in \mathbb{C}$, atunci se spune că seria (4) este *convergentă* şi *are suma* s, ceea ce se scrie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$; evident, pot fi luate în consideraţie şi seriile bilaterale $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \ldots + z_n + \ldots + z_{-1} + z_0 + z_1 + \ldots + z_n + \ldots$, iar dacă pentru seria (4) punem $z_n = (x_n, y_n) = x_n + \mathrm{i}y_n$, $s = (x, y) = x + \mathrm{i}y$ avem $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} = s$ dacă şi numai dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ (demonstraţia se realizează imediat cu ajutorul lui (3)).

Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulţime oarecare şi $f: D \to \mathbb{C}$. Deoarece $f(z) \in \mathbb{C}$ vor exista $\operatorname{Re} f(z)$ şi $\operatorname{Im} f(z)$ astfel încît $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z)$; scriind $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$, vom defini funcţiile u şi v punînd

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\left[f(x + \mathrm{i}y) + \overline{f(x + \mathrm{i}y)}\right]$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[f(x + \mathrm{i}y) - \overline{f(x + \mathrm{i}y)}\right] = \qquad (5)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\overline{f(x + \mathrm{i}y)} - f(x + \mathrm{i}y)\right]$$

rezultînd

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \qquad (6)$$

unde $u, v: D_2 \to \mathbb{R}$ sînt funcţii definite pe mulţimea $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ (care coincide cu mulţimea $D \subset \mathbb{C}$ după identificarea punctelor lui $\mathbb{C}$ cu punctele lui $\mathbb{R}^2$ după modelul cunoscut,) iar $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ (aici apare un abuz de scriere deoarece f trebuie considerată funcţie de $z \in D$, iar u şi v sînt funcţii reale de două variabile

reale ; de asemenea, relația (6) trebuie considerată ca definind membrul drept plecînd de la membrul stîng).

Exemple. 1. Șirul $(z_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$, $z_n = \dfrac{ni}{i+n}$, converge către i deoarece

$$x_n = \operatorname{Re} z_n = \frac{n}{1+n^2} \to 0 \ (n \to \infty), \ y_n = \operatorname{Im} z_n = \frac{n^2}{1+n^2} \to 1 \ (n \to \infty).$$

2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{ni}{n+i}$ este divergentă deoarece scriind $\sum_{n=1}^{\infty} = \dfrac{ni}{n^2+i} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{1+n^2}$, seria din $\mathbb{R}$ cu termenul general $y_n = \dfrac{n^2}{1+n^2}$ este divergentă neavînd limita nulă.

3. Dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)$ avem $f(z) = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$ și deci $\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x, y) = e^x \cos y$, $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = e^x \sin y$.

Definiția 3. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $z_0 \in D$; vom spune că f este continuă în z_0 dacă :*

a. *(definiția în limbaj $\varepsilon - \delta$) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ astfel încît să avem*

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ pentru orice } z \in D \text{ pentru care } |z - z_0| < \delta ; \quad (7)$$

b. *(definiția în limbaj de șiruri) Pentru orice șir $(z_n)_{n\geqslant 1}$ din D convergent către z_0, șirul $(f(z_n))_{n\geqslant 1}$ converge către $f(z_0)$, adică*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n). \quad (7')$$

Scriind $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, se arată imediat că dacă f este continuă în $z_0 \in D$, atunci ambele funcții u și v definite prin (6) vor fi continue în punctul $(x_0, y_0) \in D_2$; într-adevăr avem

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| = \sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2 + [v(x, y) - v(x_0, y_0)]^2} =$$

$$= |f(x + iy) - f(x_0 + iy_0)| < \varepsilon$$

dacă $(x, y) \in D_2$ este astfel încît $|(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < 0$, și o demonstrație analoagă se poate realiza pentru funcția v. În baza lui (6), (7') și a continuității funcțiilor u și v, rezultă

$$\lim_{(x_n, y_n)\to(x_0, y_0)} f(x + iy) = \lim_{(x_n, y_n)\to(x_0, y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x_n, y_n)\to(x_0, y_0)} v(x, y).$$

Fie acum $u,\ v : D_2 \to \mathbb{R}$, D_2 fiind o mulțime din $\mathbb{R}^2$ pe care o vom nota D dacă identificăm punctele lui $\mathbb{R}^2$ cu punctele lui $\mathbb{C}$; scriind combinația $u(x, y) + iv(x, y)$, în general aceasta nu se poate scrie sub forma $f(x+iy)=f(z)$, $f : D \to \mathbb{C}$. Într-adevăr, dacă de exemplu

$$u(x, y) = x^2 + ay^2,\ v(x, y) = bxy,\ a, b \in \mathbb{R}$$

avem $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și pentru a ajunge la o scriere cu ajutorul variabilei z pentru $u(x, y) + iv(x, y)$ va trebui să utilizăm egalitățile

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),\quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z); \tag{8}$$

de aceea, rezultă prin înlocuire

$$x^2 + ay^2 + ibxy = \frac{1}{4}\ [(1 - a + b)z^2 + (1 - a - b)\bar{z}^2 + 2(1 + a)z\bar{z}],$$

rezultatul depinzînd, în general, de z și $\bar{z}$ (în particular, dacă $a = -1$ $b = 2$ avem $x^2 - y^2 + 2ixy = z^2 = f(z)$). Prin urmare, în baza egalităților (8), vom scrie

$$u(x, y) + iv(x, y) = u\left[\frac{1}{2}(\bar{z} + z),\quad \frac{i}{2}(\bar{z} - z)\right] +$$

$$+ iv\left[\frac{1}{2}(\bar{z} + z), \frac{i}{2}(\bar{z} - z)\right] = f(z, \bar{z}), \tag{9}$$

iar f apare ca funcție atît de variabila z cît și de variabila $\bar{z}$. Așadar, plecînd de la funcțiile $u,\ v : D_2 \to \mathbb{R}$, prin transformarea (8) $\left(\text{care are determinantul funcțional } \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, \bar{z})} = \frac{i}{2} \neq 0\right)$ se deduce o funcție $f : D \times D^* \to \mathbb{C}$, (unde D^* este simetricul lui D față de axa reală din planul complex $\mathbb{C}$) definită prin (9); de remarcat că scrierea $f = f(z, \bar{z})$ este formală deoarece $\bar{z}$ se deduce din z, iar dacă $|z - z_0| < \delta$, automat avem $|\bar{z} - \bar{z}_0| < \delta$.

Dacă $u, v \in C^k(D_2)$, se deduce cu ușurință că $f \in C^k$, înțelegînd prin $\frac{\partial^k f}{\partial x^l \partial y^{k-l}}(z, \bar{z})$ rezultatul înlocuirii lui x și y prin z și $\bar{z}$ exprimați prin (8) în $\frac{\partial^k u}{\partial x^l \partial y^{k-l}}(x, y) + i\frac{\partial^k v}{\partial x^l \partial y^{k-l}}(x, y)$, $0 \leqslant k \leqslant j$ $\left(\text{vom folosi notațiile } D_x = \frac{\partial}{\partial x},\ D_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \text{ etc.}\right)$.

Definiția 4. *Dacă* $f \in C^1$, $f(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$, $x = \frac{1}{2}(\bar{z}+z)$, $y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$ *prin* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z})$ *și* $\frac{\partial f}{\partial z}(z, \bar{z})$ *(prima derivată fiind numită de matematicianul român Dimitrie Pompeiu, derivata areolară a lui f) se înțeleg derivatele*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) = \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right](x, y) \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z, \bar{z}) = \partial_z f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right](x, y). \tag{11}$$

De remarcat că deși derivatele $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ se exprimă prin combinații ale derivatelor parțiale ale funcțiilor u și v în raport cu x și y, aceste derivate pot fi calculate și direct din $f(z, \bar{z})$ derivînd această funcție în raport cu $\bar{z}$, respectiv z, ca și cum z și $\bar{z}$ ar fi variabile independente.

Definiția 5. *Fie* $D \subset \mathbb{C}$ *o mulțime deschisă și* $f : D \to \mathbb{C}$; *f se numește diferențiabilă (derivabilă) în punctul* $z \in D$ *dacă pentru orice* $h \in \mathbb{C}$ $(z + h \in D)$ *are loc descompunerea*

$$f(z + h) - f(z) = L_z(h) + \alpha(z, h) \tag{12}$$

unde $L_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *este o aplicație liniară și mărginită, iar* $\alpha \in \mathbb{C}$ *este astfel încît*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(z, h)}{h} = 0 \tag{13}$$

În aceste condiții aplicația liniară și mărginită L_z *se numește derivata lui f în punctul z și se notează* $f'(z)$ *iar* $L_z(h)$ *se numește diferențiala lui f în punctul z relativă la creșterea h și se notează* $(df)(z, h)$.

Din această definiție rezultă că aplicația L_z verifică egalitatea

$$L_z(ah + bk) = aL_z(h) + bL_z(k) \tag{14}$$

pentru orice $a,\ b,\ h,\ k \in \mathbb{C}$, iar

$$f'(z) = L_z \tag{15}$$

$$(\mathrm{d}f)(z, h) = \mathrm{d}f(z, h) = L_z(h). \tag{16}$$

Deoarece aplicațiile liniare și mărginite de la $\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$ se scriu $L_z(h) = L_z h$, notînd $z = x + \mathrm{i}y$, $h = h_1 + \mathrm{i}h_2$, $L_z = L_1 + \mathrm{i}L_2$, $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$, egalitatea de definiție (12) se transcrie (L_z nu depinde de h)

$$[u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y)] + \mathrm{i}\,[v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y)] =$$
$$= (L_1 h_1 - L_2 h_2) + \mathrm{i}(L_2 h_1 + L_1 h_2) \quad + \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$$

(deoarece $z + h = (x + \mathrm{i}y) + (h_1 + \mathrm{i}h_2) = (x + h_1) + \mathrm{i}(y + h_2)$ avem $f(z + h) = u(x + h_1, y + h_2) + \mathrm{i}v\,(x + h_1, y + h_2)$ dacă $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$); separînd părțile reale și cele imaginare rezultă egalitățile

$$u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = L_1 h_1 - L_2 h_2 + \alpha_1(x, y, h_1, h_2)$$
$$v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) = L_2 h_1 + L_1 h_2 + \alpha_2(x, y, h_1, h_2) \tag{12'}$$

în care L_1 și L_2 nu depind de h_1 și h_2, iar, în baza lui (13)

$$0 \leqslant \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{\sqrt{\alpha_1^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{|\alpha|}{|h|} \to 0, \quad h \to 0$$

$$0 \leqslant \frac{|\alpha_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{\sqrt{\alpha_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{|\alpha|}{|h|} \to 0, \quad h \to 0.$$

Se deduce că funcțiile $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$ sînt diferențiabile în punctul (x, y) (vezi A.M. cap. III, punctul 3) și au loc egalitățile

$$L_1 = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad L_2 = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \tag{17}$$

Teorema 1. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă, $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + \mathrm{i}v$. Atunci dacă f este diferențiabilă în punctul $z = x + \mathrm{i}y \in D$, funcțiile u și v sînt diferențiabile (ca funcții de două variabile) în punctul (x, y) și au loc egalitățile*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases} \tag{18}$$

numite condițiile Cauchy-Riemann.

Reciproc, dacă $u, v : D_2 \to \mathbb{R}$ *sînt diferențiabile în punctul* $(x, y) \in D_2$, *iar derivatele parțiale verifică condițiile Cauchy-Riemann* (18) *în acest punct, atunci* f *este diferențiabilă în punctul* $z = x + iy$, *derivata sa putînd fi scrisă sub una din formele*

$$f'(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \tag{19}$$

Prima parte a demonstrației a fost justificată anterior, egalitățile (18) obținîndu-se din (17).

Invers, dacă $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ sînt diferențiabile în punctul (x, y) au loc egalitățile

$$u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,h_2 + \alpha_1(x,y,h_1,h_2)$$

$$v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)h_2 + \alpha_2(x,y,h_1,h_2), \tag{20}$$

unde $\dfrac{|\alpha_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0$, $\dfrac{|\alpha_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0$ $(h_1 \to 0$ și $h_2 \to 0)$; folosind condițiile Cauchy Riemann (18) vom înlocui $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ și $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ rezultînd din (20)

$$f(z+h) - f(z) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right]h_1 + \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right]h_2 +$$

$$+ (\alpha_1 + i\alpha_2) = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right](h_1 + ih_2) + \alpha = L_x h + \alpha, \tag{21}$$

iar $0 \leqslant \dfrac{|\alpha|}{|h|} = \dfrac{|\alpha_1 + i\alpha_2|}{|h|} \leqslant \dfrac{|\alpha_1|}{|h|} + \dfrac{|\alpha_2|}{|h|} \to 0$ $(h = h_1 + ih_2 \to 0)$. Rezultă deci diferențiabilitatea lui f, derivata f' obținîndu-se din (21) și condițiile (18).

Observația 1. Deoarece diferențiala lui f conform cu (16) se scrie $(\mathrm{d}f)(z, h) = L_z(h)$, cum $L_z(h) = L_z \cdot h$ avem

$$(\mathrm{d}f)(z,h) = L_z \cdot h = f'(z) \cdot h;$$

prin tradiție, se scrie dz în loc de h și în această situație se notează $(df)(z, h)|_{h=dz} = df(z)$, obținîndu-se

$$(df)(z) = df(z) = f'(z) \cdot dz$$

unde f' se înlocuiește prin una din expresiile din (19), utilizîndu-se evident transformarea (8).

Observația 2. Definiția 5 coincide cu transpunerea la cazul funcțiilor $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a definiției diferențialei Fréchet (forte) dată în A.M. cap. III, punctul 1; de aceea proprietățile generale demonstrate acolo se vor transpune punct cu punct și astfel pot fi considerate demonstrate rezultatele următoare:

Propoziția 1. *Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este diferențiabilă în $z \in D$ (D fiind o mulțime deschisă), atunci f este continuă în punctul z.*

Propoziția 2. *Fie $f, g : D \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ (D o mulțime deschisă). Dacă f și g sînt diferențiabile în $z \in D$, atunci și funcțiile af, $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ (dacă $g(z) \neq 0$) sînt diferențiabile în punctul z și au loc egalitățile:*

$$(af)'(z) = af'(z)$$

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

$$(f \cdot g)' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{1}{g^2(z)} [f'(z)g(z) - f(z)g'(z)].$$

Propoziția 3 (*regula de derivare a funcțiilor compuse*). *Dacă f este diferențiabilă în $z \in \mathbb{C}$ și g este diferențiabilă în $f(z)$, atunci funcția compusă $g \circ f$ este diferențiabilă în punctul z și are loc egalitatea*

$$(g \circ f)'(z) = g'[f(z)]f'(z).$$

Propoziția 4. *Fie $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty]$, f definită prin seria de puteri*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

avînd raza de convergență $R > 0$; atunci f este diferențiabilă în fiecare punct din $B_R(z_0)$, iar

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}.$$

Rezultă deci că toate funcțiile de variabilă complexă z definite prin serii de puteri cu rază de convergență nenulă definesc funcții diferențiabile, derivata calculîndu-se prin derivare termen cu termen (demonstrația propoziției 4 repetă demonstrația din real, deoarece din (12), (13) și faptul că $L_z(h) = f'(z) \cdot h$ se deduce

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

adică și în $\mathbb{C}$ apare aceeași definiție pentru f' ca și în cazul real).

Comparînd condițiile Cauchy-Riemann (18) cu definițiile (10) și (11) pentru operatorii diferențiali $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z})$ și $\frac{\partial f}{\partial z}(z, \bar{z})$, se deduce că dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este diferențiabilă în punctul $x + iy$, atunci au loc egalitățile

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z, \bar{z}) = f'(z), \tag{22}$$

iar prima egalitate (22) nu este altceva decît scrierea complexă a condițiilor Cauchy-Riemann.

Definiția 6. *Funcția $f : D \to \mathbb{C}$, D fiind o mulțime deschisă din $\mathbb{C}$, se spune că este o funcție olomorfă în D dacă f este diferențiabilă în fiecare punct din D, iar funcțiile reale $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, sînt diferențiabile în $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ ($(x, y) \in D_2$ dacă și numai dacă $z = x + iy \in D$).*

Din teorema 1 se deduce că $f : D \to \mathbb{C}$ este o funcție olomorfă în D dacă și numai dacă partea reală și partea imaginară ale lui f sînt diferențiabile în $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ și verifică în fiecare punct din D_2 condițiile Cauchy-Riemann (18) ($z = x + iy \in D \subset \mathbb{C}$).

Teorema 2. *Fie g o funcție olomorfă în discul $B_R(z_0) = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$. Atunci există f olomorfă în $B_R(z_0)$, astfel încît $f' = g$.*

Fie u, v partea reală, respectiv imaginară, a funcției olomorfe g și U, V cu $U + iV = f$. U și V trebuie determinate astfel încît f să aibă derivata egală cu g; conform teoremei 1, va trebui să avem

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -v.$$

Rezultă că funcțiile u și v trebuie să aibă două proprietăți:
i. u și $-v$ să fie egale cu derivatele parțiale ale lui U (în D_2)
ii. v și u să fie egale cu derivatele parțiale ale lui V (în D_2).

Din i. se deduce $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, iar din ii $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ și deci cum aceste condiții coincid cu relațiile Cauchy-Riemann, rezultă posibilitatea determinării (prin integrare) a funcțiilor U și V.

Teorema 3. *Fie* $f : D \to \mathbb{C}$ *olomorfă în* D, *iar* $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ *se presupun funcții de clasă* $C^2(D_2)$; *atunci* u *și* v *sînt funcții armonice în* D_2 *adică verifică în* D_2 *ecuația lui Laplace*:

$$\Delta_2 u(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) = 0,$$

$$\Delta_2 v(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v(x, y) = 0$$

Demonstrația rezultă direct din condițiile Cauchy-Riemann (18) prin derivări convenabile, ținînd seama că în condițiile teoremei derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea sînt egale; de exemplu dacă în $(x, y) \in D_2$ avem $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$, derivînd prima relație în raport cu variabila x și a doua relație în raport cu variabila y, prin adunare se deduce

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

Definiția 7. *Fie* $u, v \in C^2(D_2)$ D_2 *fiind un domeniu din* $\mathbb{R}^2$; u *și* v *se numesc armonic-conjugate în* D_2 *dacă* $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ *este diferențiabilă în* $D \subset \mathbb{C}$.

Teorema 4. *Dacă* $D = \mathbb{C}$ *sau dacă* $D = B_R(z_0)$, $R > 0$ *și* $u : D_2 \to \mathbb{R}$ *este o funcție armonică în* D_2, *atunci* u *admite o funcție armonic conjugată în* D_2.

Demonstrația revine la determinarea lui v dacă se cunoaște u și acest fapt se poate realiza cu ajutorul teoremei integralelor cu parametru; deoarece din condițiile Cauchy-Riemann se deduce $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$, rezultă

$$v(x, y) = \int_{y_1}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\, dt + \varphi(x) \quad ((x, y), (x, y_1) \in D_2) \tag{23}$$

unde funcția φ se determină astfel încît să avem $\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$. În baza regulei de derivare a unei integrale cu parametru, prin derivare în (23) în raport cu variabila x, se deduce

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \int_{y_1}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\, dt + \varphi'(x), (x, y), \quad (x, y_1) \in D_2$$

În sfîrșit, dacă (X, Y) este un vector aleator avînd densitatea de probabilitate $f_{X,Y}(x, y) = f(x, y)$, am văzut la punctul 8 exercițiul 4 că densitatea de probabilitate a sumei $Z = X + Y$ este dată de

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - x, x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z - y)\mathrm{d}y,$$

în particular, dacă VA X, Y sînt independente deci $f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y)$ se deduce că densitatea de probabilitate a sumei $Z = X + Y$ este egală cu

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - x)f_Y(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)f_Y(z - y)\mathrm{d}y \tag{7}$$

adică f_Z este *convoluția densităților de probabilitate* ale VA X, Y, deci

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) \tag{8}$$

(ținînd seama că, prin definiție, convoluția funcțiilor $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de relația

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x - t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - t)f_2(t)\mathrm{d}t).$$

Să determinăm acum cîteva proprietăți importante ale unor funcții de două sau mai multe VA.

Teorema 6. (*de adunare a mediilor*) : Dacă $Y = X_1 + \ldots + X_n$ *atunci*

$$m_Y = m_{X_1} + \ldots + m_{X_n} \tag{9}$$

indiferent dacă VA $X_1, \ldots, X_n$ *sînt independente sau dependente.*

Într-adevăr, dacă $n = 2$ avem în ipoteza că $f = f_{X_1,X_2}$ este densitatea de probabilitate a vectorului aleator bidimensional (X_1, X_2) :

$$m_{X_1,X_2} = \iint_{\mathbb{R}^2} (x_1 + x_2)\, f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 +$$

$$+ \iint_{\mathbb{R}^2} x_2 f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2 \right] \mathrm{d}x_1 +$$

sau, deoarece u este armonică,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\int_{y_1}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t)\,dt + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_1) + \varphi'(x);$$

din ultima egalitate trebuie să avem $\varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y_1)$, deoarece $\left(\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$,

și deci $\varphi(x) = -\int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_1)\,dt$. Așadar

$$v(x, y) = \int_{y_1}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt - \int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_1)\,dt,\ (x, y)\ (x_1, y_1) \in D_2.$$

Observația 2. În locul lui v definit prin (24) se poate utiliza v definit prin

$$v(x, y) = -\int_{x_1}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y)\,dt + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)\,dt,\ (x, y), (x_1, y_1) \in D_2 \quad (24')$$

care se deduce în mod analog cu (24), plecînd însă de la egalitatea $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Observația 3. Se pot schimba între ele rolurile funcțiilor u și v : cunoscîndu-se funcția armonică $v = \operatorname{Im} f$, se poate obține funcția armonică $u = \operatorname{Re} f$, utilizîndu-se condițiile Cauchy-Riemann în care u este funcția necunoscută ; repetîndu-se calculele anterioare, se deduce

$$u(x, y) = \int_{x_1}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(t, y)\,dt - \int_{y_1}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x_1, t)\,dt,\ (x_1, y_1),\ (x, y) \in D_2 \quad (25)$$

sau

$$u(x, y) = -\int_{y_1}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)\,dt + \int_{x_1}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(t, y_1)\,dt,\ (x_1, y_1), (x, y) \in D_2. \quad (25')$$

Observația 4. Prin relațiile (24)—(25') funcțiile u și v se determină unic dacă se neglijează o constantă aditivă ; de aceea, din teorema 4 se deduce că dîndu-se fie partea reală, fie partea imaginară a funcției olomorfe f, f este unic determinată, abstracție făcînd

de o constantă aditivă (reală în primul caz sau de forma ic, $c \in \mathbb{R}$, în al doilea caz).

Exemple. 1. Fie $u(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ partea reală a funcției olomorfe f și să-l determinăm pe f.

În primul rînd trebuie să avem $(\Delta_2 u)(x, y) = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ceea ce implică $c = -a$, adică $a(x, y) = a(x^2 - y^2) + 2bxy$; presupunînd $(x_1, y_1) = (0, 0)$, din (24) sau (24′) rezultă $v(x, y) = 2axy + b(y^2 - x^2)$, iar

$$f(x + iy) = a(x^2 - y^2) + 2bxy + i[2axy + b(y^2 - x^2)] = a(x^2 - y^2 + 2ixy) +$$

$$+ ib(y^2 - x^2 - 2ixy),$$

deci

$$f(z) = az^2 - ibz^2 = (a - ib)z^2 + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $v(x, y) = ay \cos y \cdot \operatorname{sh} x + bx \sin y \operatorname{ch} x \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ partea imaginară a funcției olomorfe f. Să-l determinăm pe f.

Avem $(\Delta_2 v)(x, y) = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dacă $b = a$; considerînd $x_1 = y_1 = 0$, din (25) sau (25′) rezultă $u(x, y) = a(x \cos y \operatorname{sh} x - y \sin y \operatorname{ch} x)$, deci

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = -ai(x + iy) \sin [i(x + iy)] \text{ sau}$$

$$f(z) = -a\, iz \sin (iz) + ic, \; c \in \mathbb{R}.$$

3. Fie $\vec{\tau}$ și $\vec{\nu}$ două direcții ortogonale din $\mathbb{R}^2$ (deci dacă $\vec{\tau} = \vec{ai} + \vec{bj}$, $\vec{\nu} = \vec{\alpha i} + \vec{\beta j}$, $a^2 + b^2 = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, produsul scalar $(\vec{\tau}, \vec{\nu}) = a\alpha + b\beta$ este nul și luînd $\alpha = -b$, $\beta = a$, vectorul $\vec{\nu} = -\vec{bi} + \vec{aj}$ va fi perpendicular pe vectorul $\vec{\tau}$, iar vectorii $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ vor forma un reper cartezian în $\mathbb{R}^2$). Dacă u și v sînt armonic-conjugate, în punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ avem

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\, a + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) b = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) a - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) b = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)(-b) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)(a) = -\left[\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) b + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) a\right] = -\frac{\partial v}{\partial \tau}(x_0, y_0).$$

4. În coordonate polare (r, θ), $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, condițiile Cauchy-Riemann se scriu

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}(r, \theta), \quad \frac{\partial v}{\partial r}(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \text{ ținînd seama că } \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} -$$

$$- \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \text{ scriind condițiile Cauchy-Riemann}$$

în variabilele (r, θ) prin explicitarea derivatelor $\frac{\partial u}{\partial r}$ și $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ se deduc egalitățile menționate.

5. Dacă $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ este diferențiabilă, (aici $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{n \text{ ori}}$ deci $f = f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_j = (x_j, y_j) = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$) în punctul

$z = (z_1, \ldots, z_n)$ va trebui să aibă loc descompunerea

$$f(z + h) - f(z) = f(z_1 + h_1, \ldots, z_n + h_n) - f(z_1, \ldots, z_n) = L_z(h) + \alpha(z, h)$$

$h = (h_1, \ldots, h_n)$, $h_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, unde $L_z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ este o aplicație liniară și mărginită (deci $L_z(h) = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_n$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$), iar $\alpha \in \mathbb{C}$ este astfel încît $\frac{|\alpha(z,h)|}{\|h\|} = \frac{|\alpha(z,h)|}{\sqrt{|h_1|^2 + \ldots + |h_n|^2}} \to 0$ $(h \to 0)$. Repetînd calculele care au condus la teorema 1, scriind $f(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) = u(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) + iv(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ se deduc condițiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

care sub formă complexă, se scriu

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right] = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Prin analogie, se introduc operațiile $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, iar derivata lui f va fi definită prin vectorul $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$.

6. Dacă $D \subset \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă, iar $f : D \to \mathbb{C}$ este diferențiabilă în D și $f'(z) = 0$ pentru orice $z \in D$, atunci f este constantă. Într-adevăr, scriind $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x, y) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x, y) = 0$, din ipoteză rezultă că u și v au toate derivatele parțiale de ordinul întîi nule în D_2, ceea ce este posibil dacă și numai dacă $u(x, y) = u_0$, $v(x, y) = v_0$ pentru orice $(x, y) \in D_2$. Așadar, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$.

7. Dacă se dau funcțiile u și v diferențiabile în $D_2 \subset \mathbb{C}^2$, scriind

$$f(z, \bar{z}) = [u(x, y) + iv(x, y)]_{x = \frac{1}{2}(\bar{z} + z),\; y = \frac{1}{2}(\bar{z} - z)}$$

dacă f nu va depinde de $\bar{z} \in D^*$, atunci $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ și va rezulta că f este olomorfă în D; în acest mod, se poate constata direct dacă $f = u + iv$ este sau nu diferențiabilă.

2. Integrarea în $\mathbb{C}$

Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și conexă.

Definiția 1. *Vom numi drum parametrizat (pe scurt drum) în D o funcție continuă $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to D$* (cu alte cuvinte $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$, $x, y \in [a, b]$, $x, y \in C^0([a, b])$) *și vom conveni să notăm prin γ acest drum.*

Drumul parametrizat γ *va fi un drum neted dacă* $x, y \in C^1(]a, b[)$ *și există derivatele laterale ale lui* x *și* y *în extremitățile* a *și* b (adică

$$\frac{x(t)-x(a)}{t-a} \to x'_+(a), \frac{y(t)-y(a)}{t-a} \to y'_+(a), \quad \text{dacă} \quad t \to a, t > a,$$

$$\frac{x(t)-x(b)}{t-b} \to x'_-(b), \quad \frac{y(t)-y(b)}{t-b} \to y'(b), \text{ dacă } t \to b, \ t < b, \ x'_+(a),$$

$y'_+(a), x'_-(b), y'_-(b) \in \mathbb{R}$). *Drumul* γ *se va numi neted pe porțiuni dacă există punctele* $a_0, a_1, \ldots a_r$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$, $r \in \mathbb{N}$, *astfel încît restricția lui* γ *la intervalul* $[a_{j-1}, a_j]$, $j = 1, \ldots, r$ *este un drum neted. Drumul* $\gamma : [a, b] \to D$ *se va numi închis dacă* $\gamma(a) = \gamma(b)$. *Drumul* $\gamma : [a, b] \to D$ *se va numi constant dacă* $\gamma(t) = \gamma_0 \in \mathbb{C}$, $t \in [a, b]$. *Drumurile închise* $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to D$ *se spune că sînt omotope în* D *și se scrie* $\gamma_0 \sim \gamma_1$ *dacă există* $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to D$, *funcție continuă, astfel încît*

$$\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \ \Gamma(t, 1) = \gamma_1(t), \ \textit{pentru orice } t \in [a, b]$$

$$\Gamma(a, s) = \Gamma(b, s), \ \textit{pentru orice } s \in [0, 1].$$

Funcția $\Gamma = \Gamma(t, s)$ *se va numi omotopie de la drumul* γ_0 *la drumul* γ_1 *și dacă se notează* $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$, $s \in]0, 1[$, γ_s *va fi un drum închis din* D. *Mulțimea de puncte* $\{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\} \subset D$ (cu γ definit mai sus) *se va numi imaginea (sau suportul sau traiectoria sau hodograful) drumului parametrizat* γ.

Dacă drumul închis γ *este omotop cu un drum constant din* D, *atunci* γ *se va numi omotop cu zero* (notație $\gamma \sim 0$).

Observația 1. Imaginea drumului parametrizat $\gamma_s(t) = \Gamma(t, s)$, s fixat în $]0,1[$, $t \in [a, b]$ va fi cuprinsă între imaginile drumurilor γ_0 și γ_1; deci, din punct de vedere geometric două drumuri închise din $D \subset \mathbb{C}$ vor fi omotope dacă se poate realiza trecerea de la γ_0 la γ_1, printr-o familie de drumuri care variază continuu de γ_0 la γ_1, această operație realizîndu-se în D.

Exemple. 1. Dacă $\gamma(t) = z_0 + R \operatorname{cis}(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, $z_0 = (x_0, y_0)$, avem

$$x(t) = x_0 + R\cos t, \ y(t) = y_0 + R\sin t, \ t \in [0,2\pi], \ x, y \in C^\infty([0,2\pi])$$

și evident γ este un drum parametrizat neted din $\mathbb{C}$ a cărui imagine este cercul de rază R centrat în z_0.

2. Dacă $a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = b$ și

$$\gamma(t) = \frac{x_2 - x_1}{a_1 - a_0}\, t + \frac{a_1 x_1 - a_0 x_2}{a_1 - a_0} + iy_1 \text{ pentru } a = a_0 \leqslant t \leqslant a_1$$

$$\gamma(t) = x_2 + i\left(\frac{y_2 - y_1}{a_2 - a_1}\, t + \frac{a_2 y_1 - a_1 y_2}{a_2 - a_1}\right) \text{pentru } a_1 \leqslant t \leqslant a_2$$

$$\gamma(t) = \frac{x_1 - x_2}{a_3 - a_2}\, t + \frac{a_3 x_2 - a_2 x_1}{a_3 - a_2} + \mathrm{i}y_2 \text{ pentru } a_2 \leqslant t \leqslant a_3$$

$$\gamma(t) = x_1 + \mathrm{i}\left(\frac{y_2 - y_1}{a_3 - a_4}\, t + \frac{a_3 y_1 - a_4 y_2}{a_3 - a_4}\right) \text{ pentru } a_3 \leqslant t \leqslant a_4$$

rezultă γ netedă pe porțiuni și imaginea sa este o curbă închisă ($\gamma(a_0) = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $\gamma(a_4) = x_1 + \mathrm{i}y_1$) cu suportul coincizînd cu dreptunghiul avînd vîrfurile în $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_1$, $z_3 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, $z_4 = x_4 + \mathrm{i}y_2$; în particular, pentru $a = a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = 1$, $x_3 = 1$, $y_3 = 1$, $x_4 = 0$, $y_4 = 1$ rezultă

$$\gamma(t) = t, \text{ pentru } t \in [0,1[,\ \gamma(t) = 1 + \mathrm{i}(t-1) \text{ pentru } t \in [1,2[,$$

$\gamma(t) = 3 - t + \mathrm{i}$ pentru $t \in [2, 3[$ și $\gamma(t) = (4 - t)\,\mathrm{i}$ pentru $t \in [3, 4]$, iar γ va fi imaginea pătratului unitate cu vîrfurile în punctele $0, 1, 1 + \mathrm{i}, \mathrm{i}$.

Definiția 2. *Fie* $\gamma : [a, b] \to D$ *un drum parametrizat și* $f : D \times D^* \to \mathbb{C}$; *integrala lui* f *calculată pe* γ *notată*

$$\int_\gamma f \left(= \int_\gamma f(z, \bar{z})\, \mathrm{d}z \right)$$

este limita (dacă există) *sumei integrale* $\sum_{j=1}^{n} f \circ \gamma(t_j)[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})]$, *adică*

$$\int_\gamma f = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f\,[(t_j)]\,[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})], \tag{1}$$

unde $||P||$ *este norma diviziunii* $P = (a_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$, *adică* $||P|| = \max\{t_1 - t_0,\ t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}\}$

Observația 2. Funcțiile f luate în considerație se presupun obținute din $u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, cu $u, v : D_2 \to \mathbb{R}$ (ca de obicei $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ coincide cu D dacă punctele lui $\mathbb{R}^2$ se identifică cu punctele lui $\mathbb{C}$) prin înlocuirea lui x și y prin $\frac{1}{2}(\bar{z} + z)$, respectiv $\frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{z} - z)$; ipoteza de diferențiabilitate pentru f va fi luată ulterior în discuție.

Teorema 1. *Dacă* γ *este un drum neted pe porțiuni din* D *iar* f *este continuă în vecinătatea lui* γ, *atunci integrala lui* f *calculată pe* γ *există și are loc egalitatea*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f[\gamma(t), \overline{\gamma}(t)]\gamma'(t)\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Dacă γ este un drum neted, fie $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$; cum $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $x, y \in C^1([a, b])$ rezultă

$$\sum_{j=1}^{n} f[\gamma(\tau_j), \overline{\gamma}(\tau_j)][\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] = \sum_{j=1}^{n} f_j[x(t_j) - x(t_{j-1})] + \\ + i\sum_{j=1}^{n} f_j[y(t_j) - y(t_{j-1})], \quad \text{unde} \tag{3}$$

s-a notat $f_j = f[\gamma(\tau_j), \overline{\gamma}(\tau_j)]$. Luînd prima sumă, se poate scrie $\sum_{j=1}^{n} f_j[x(t_j) - x(t_{j-1})] =$

$= \sum_{j=1}^{n} f_j x'(\theta_j)(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f_j x'(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) + R_1$ cu $\tau_j, \theta_j \in]t_{j-1}, t_j[, j = 1, 2, \ldots, n$

și $R_1 = \sum_{j=1}^{n} f_j[x'(\theta_j) - x'(\tau_j)](t_j - t_{j-1})$; cum f este continuă, va fi mărginită, iar $x' = x'(t)$ fiind deasemenea continuă pe $[a, b]$, va fi uniform continuă și deci alegînd $\| P \|$ suficient de mică avem $|x'(\theta_j) - x'(\tau_j)| < \varepsilon$ dacă $\| P \| < \delta$ ($|\theta_j - \tau_j| \leqslant$ $\leqslant t_j - t_{j-1} \leqslant \| P \|$). Deci

$$|R_1| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |f_j| \, |x'(\theta_j) - x'(\tau_j)| (t_j - t_{j-1}) \leqslant M\varepsilon(b - a) \to 0, \text{ dacă } \| P \| \to 0.$$

În mod analog se tratează a doua sumă din (3); cum membrul stîng din (3) este o sumă Riemann pentru integrala $\int_a^b f[\gamma(t), \overline{\gamma}(t)]\gamma'(t)\, dt$ (deoarece avem

$$\sum_{j=1}^{n} f[\gamma(\tau_j), \overline{\gamma}(\tau_j)][\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] = \sum_{j=1}^{n} f[\gamma(\tau_j), \overline{\gamma}(\tau_j)]\gamma'(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) + R, \tag{4}$$

cu $R = \sum_{j=1}^{n} f[\gamma(\tau_j), \overline{\gamma}(\tau_j)][\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})]$, unde $R \to 0$, odată cu R_1 și R_2, R_2 avînd aceeași semnificație ca și R_1, dar pentru suma a doua din membrul drept al lui (3)) există și în baza lui (1) rezultă valabilitatea egalității (2).

Dacă însă drumul γ este neted pe porțiuni, rămîne de văzut ce se întîmplă în punctele de discontinuitate ale lui γ': cum aceste puncte de discontinuitate sînt în număr finit, contribuția lor în egalitatea (4) va fi mărginită de o constantă înmulțită cu $\| P \|$. Deci va exista limita sumei din membrul stîng al lui (3) cînd $\| P \| \to 0$.

Observația 2. Deoarece $\gamma'(t)\,dt = [x'(t) + iy'(t)]dt = x'(t)\,dt + iy'(t)dt = dx + idy$ și $f[\gamma(t), \overline{\gamma}(t)] = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]$, (2) se poate scrie sub forma

$$\int_\gamma f(z, \bar{z})\,dz = \int_\gamma f = \int_\gamma [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy) = \tag{5}$$

$$= \int_\gamma u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_\gamma v(x, y)dx + u(x, y)\,dy$$

care va fi utilizată ulterior; (5) arată că integralele în complex $\int_\gamma f$ sînt de fapt combinații de integrale curbilinii de tipul al doilea din $\mathbb{R}^2$ (vezi A.M. cap. IV, punctul 4) și deci proprietățile integralei (1) se deduc direct din proprietățile acestor integrale curbilinii.
În particular, avem

$$\left|\int_\gamma f\right| \leqslant (\max_\gamma |f|)|\gamma|, \quad |\gamma| = \text{măsura lui } \gamma \tag{6}$$

$$\int_\gamma f = -\int_{\gamma^-} f \tag{7}$$

unde γ^- este drumul γ, dar parcurs în sens invers : $\gamma^-(t)=\gamma(b+a-t)$. Apoi

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \tag{8}$$

unde $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este juxtapunerea drumurilor γ_1 și γ_2 care sînt astfel încît $\gamma_1 : [a, b] \to D$, $\gamma_2 : [b, c] \to D$, iar $\gamma_1(a) = \gamma_2(b)$.

Observația 3. În A.M. cap. IV, punctul 4 s-a demonstrat formula (identitatea) lui Green

$$\int_{\partial D_2} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{9}$$

valabilă pentru $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \in C^\circ(D_2)$, $P, Q \in C^\circ(D_2^-)$, $D_2^- = D_2 \cup \partial D_2$ presupunînd D_2^- un compact din $\mathbb{R}^2$, iar $\partial D_2 = \gamma$ fiind un drum parametrizat continuu din $\mathbb{R}^2$. Aplicînd (9) la identitatea (5) deoarece

$$\int_{\partial D_2} u(x, y)\mathrm{d}x - v(x, y)\mathrm{d}y = -\iint_{D_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)(x, y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$\int_{\partial D_2} v(x, y)\mathrm{d}x + u(x, y)\mathrm{d}y = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(x, y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

rezultă identitatea

$$\int_{\partial D = \gamma} f(z, \bar{z})\mathrm{d}z = 2\mathrm{i} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z})\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \tag{10}$$

avînd în vedere că $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $f \in C^1(D)$; ținînd seama că $\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z = (\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, cu ajutorul produsului exterior al diferențialelor $\mathrm{d}z$ și $\mathrm{d}\bar{z}$ identitatea (10) se transcrie

$$\int_{\partial D=\gamma} f(z, \bar{z})\,\mathrm{d}z = \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z})\,\mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z \tag{10'}$$

și poate fi considerată ca fiind formula lui Green în $\mathbb{C}$, sensul de parcurs pe γ fiind sensul direct (invers sensului de mers al acelor ceasornicului).

Observația 4. Ținînd seama de definiția operatorului diferențial $\frac{\partial}{\partial z}$ de la punctul 1 $\left[\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ f = u + \mathrm{i}v\right]$, aplicînd procedeul care a condus la identitatea (10') rezultă o altă identitate integrală

$$\int_{\gamma=\partial D} f(z, \bar{z})\mathrm{d}z = \iint_D \frac{\partial f}{\partial z}(z, \bar{z})\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \tag{11}$$

asemănătoare cu (10').

Definiții. 3. *Vom numi contur simplu din $\mathbb{C}$ orice drum parametrizat neted și închis care este parcurs o singură dată dacă $t \in [a, b]$* (se va utiliza și noțiunea de *contur* din $\mathbb{C}$ care diferă de un contur simplu prin faptul că poate fi parcurs de mai multe ori). Dacă γ este un contur, el poate fi considerat frontiera unui domeniu $D \subset \mathbb{C}$, iar sensul de parcurs pe γ este cel direct (prin parcurgerea lui γ, domeniul D rămîne la stînga) (deci dacă γ este un contur simplu, există cel mult un punct $P \in \gamma$ care se obține pentru valori diferite ale lui t).

Dacă în D orice contur simplu este omotop cu un drum constant, atunci D se va numi domeniu simplu-conex.

Fie γ un drum din $\mathbb{C}$, neted sau neted pe porțiuni, închis sau nu și f o funcție continuă pe γ; o integrală de forma

$$F(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \tag{12}$$

se numește *integrală de tip Cauchy* cu densitatea g și nucleul $K(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$. Evident integrala din (12) este o integrală cu parametrul complex z și va defini o funcție în $\mathbb{C}$ (chiar în $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) excep-

tînd punctele lui γ; aşadar $F:\mathbb{C}\setminus\gamma \to \mathbb{C}$ şi se poate arăta că F este o funcţie diferenţiabilă în $\mathbb{C}\setminus\gamma$, în baza următorului rezultat:

Teorema 2. *Fie γ un drum din $\mathbb{C}$ (neted sau neted pe porţiuni) închis sau nu, $f:\gamma \times D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, f fiind continuă pe γ şi diferenţiabilă în D; atunci funcţia $F:D \to \mathbb{C}$ definită prin integrala cu parametru*

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta \tag{13}$$

este diferenţiabilă în D, derivata F' obţinîndu-se prin derivare sub semnul integral (regula lui Leibniz):

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{14}$$

Fie $z, h \in \mathbb{C}$, $z, z+h \in D$ şi să considerăm diferenţa

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta = \int_\gamma \left[\frac{f(\zeta, z+h)-f(\zeta, z)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)\right]\mathrm{d}\zeta;$$

În baza diferenţiabilităţii în raport cu z a funcţiei f se deduce

$$\max_{\zeta\in\gamma}\left|\frac{f(\zeta, z+h)-f(\zeta, z)}{h} - \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)\right| \to 0 \quad (h \to 0)$$

şi cum γ are lungime finită, va rezulta

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta\in\gamma}\left|\frac{f(\zeta, z+h)-f(\zeta, z)}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)\right| |\gamma| \to 0 \quad (h \to 0)$$

ceea ce conduce la egalitatea (14).

Observaţia 5. În demonstraţia teoremei 2 s-a presupus γ avînd lungimea finită: $|\gamma| < \infty$; rezultatul rămîne însă valabil dacă $|\gamma| = \infty$ cu condiţia ca integrandul f să admită proprietăţi suplimentare (de exemplu, $|f(\zeta, z)| \to 0$, uniform cînd ζ tinde spre extremităţile lui γ); aceste integrale vor fi integrale improprii din $\mathbb{C}$.

Observația 6. Deoarece în cazul integralei (12) avem $f(\zeta, z) = \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}$ și se verifică ipotezele teoremei 2, se deduce că F definită prin această integrală este o funcție diferențiabilă în $\mathbb{C}^- \setminus \gamma$, iar $F(\infty) = 0$ (deoarece dacă $|\zeta| < z$ se poate scrie $\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\zeta}{z} - \ldots - \frac{\zeta^{n-1}}{z^n} - \ldots$, și integrînd termen cu termen, posibil deoarece seria este uniform convergentă, se deduce

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \zeta^{n-1} g(\zeta)\, d\zeta \right) \frac{1}{z^n} \Big).$$

Exemplul 3. Dacă $\operatorname{Re} z > 0$ integrala improprie

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{z-1}\, d\zeta$$

este convergentă și definește o funcție diferențiabilă (această funcție este funcția gamma în complex); în acest caz avem $f(\zeta, z) = e^{-\zeta} \zeta^{z-1}$, dar $\gamma = [0, \infty[\subset \mathbb{R}$, deci drumul de integrare are lungime infinită. Scriind $\Gamma(z) = \int_0^a e^{-\zeta} \zeta^{z-1}\, d\zeta + \int_a^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{z-1}\, d\zeta$, $a > 0$, prima integrală verifică ipotezele teoremei 2 (deci va defini o funcție diferențiabilă dacă $\operatorname{Re} z > 0$), iar a doua integrală devine arbitrar de mică pentru a suficient de mare deoarece $\left| \int_a^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{z-1}\, d\zeta \right| \leqslant \int_a^{\infty} |e^{-\zeta} \zeta^{z-1}|\, d\zeta = \int_a^{\infty} e^{-\zeta} \zeta^{\operatorname{Re} z - 1}\, d\zeta < k! \int_a^{\infty} \zeta^{-k + \operatorname{Re} z - 1}\, d\zeta =$

$= \frac{k!}{(\operatorname{Re} z - k) a^{k - \operatorname{Re} z}}$ (deoarece $e^{\zeta} > \frac{\zeta^k}{k!}$ și se poate alege $k \in \mathbb{N}$ astfel încît să avem $k - \operatorname{Re} z > 0$). În concluzie funcția gamma este definită și diferențiabilă pentru $z \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} z > 0$ (vom reveni la punctul 8 asupra acestei funcții).

3. Fomula lui Pompeiu și consecințele ei

La punctul 1 s-a introdus operatorul diferențial $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ care s-a definit prin

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{1}$$

și care este aplicabil funcțiilor $f = f(z, \bar{z}) = u\left[\frac{1}{2}(\bar{z}+z), \frac{i}{2}(\bar{z}-z)\right] +$ $+ iv\left[\frac{1}{2}(\bar{z}+z), \frac{i}{2}(\bar{z}-z)\right]$, $u, v \in C^1(D_2), D_2 \subset \mathbb{R}^2$ fiind o mulțime deschisă. Operatorul (1) este important deoarece, pe de o parte reprezintă transcrierea sub formă complexă a condițiilor Cauchy-Riemann $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ dacă și numai dacă } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right)$, iar pe de altă parte apare în forma complexă a formulei lui Green (vezi (10) sau (10′) de la punctul 2).

Proprietățile cele mai simple ale operatorului $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ se pot deduce direct din definiție; astfel:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(af) = a\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad a \in \mathbb{C};$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}};$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \cdot g) = f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}};$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f) = g'(f)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \ g \in C^1;$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right);$$

ultima egalitate fiind evident valabilă în punctele în care g nu se anulează (ipotezele pentru f și g apar direct din relațiile respective. Formula de derivare a unui produs $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \cdot g) = f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ are o formă simplă dacă g este olomorfă în D, deoarece în acest caz se deduce $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ și formula în cauză devine

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \cdot g) = g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \tag{2}$$

ceea ce arată că *în raport cu operația de derivare* $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ *funcțiile olomorfe se comportă ca niște funcții constante.*

Teorema 1. (*Pompeiu*). *Dacă* $f \in C^1(D) \cup C^0(D^-)$, $D \subset \mathbb{C}$ *fiind un domeniu simplu conex, iar* D^- *un compact din* $\mathbb{C}$ *având frontiera* ∂D

netedă pe porțiuni, atunci pentru orice $z \in D$ are loc identitatea

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \, dz + \frac{1}{2\pi i} \iint_{D} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\zeta, \bar{\zeta}) \frac{1}{\zeta - z} \, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta \qquad (3)$$

∂D fiind parcursă în sens direct și considerată un contur simplu.

Pentru demonstrație se aplică formula integrală (10) în ipoteza $f(\zeta, \bar{\zeta}) \to \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}$ însă în domeniul $D_\varepsilon = D \setminus B_\varepsilon(z)$ cu $\varepsilon > 0$ suficient de mic pentru a avea $B_\varepsilon(z) \subset D$; deoarece $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \gamma_\varepsilon(z)$, unde $\gamma_\varepsilon(z) = \{\zeta | \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta - z| = \varepsilon\}$, identitatea (10) devine, ținînd seama că sensul de parcurs pe $\gamma_\varepsilon(z)$ nu este cel direct,

$$2i \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \right] d\xi \wedge d\eta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \, d\zeta - \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \, d\zeta, \; \zeta = \xi + i\eta$$

sau, deoarece în baza lui (2) avem $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \left[\frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \right] = \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\zeta, \bar{\zeta})$, rezultă:

$$2i \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\zeta, \bar{\zeta}) \frac{d\xi \wedge d\eta}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \, d\zeta - \int_{\gamma_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \, d\zeta. \qquad (4)$$

Pe $\gamma_\varepsilon(z)$ avem $\zeta = z + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $d\zeta = \varepsilon i e^{it} dt$ și deci

$$\int_{\gamma_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \, d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it}, \bar{z} + \varepsilon e^{-it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} \, dt =$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it}, \bar{z} + \varepsilon e^{-it}) \, dt$$

ceea ce face ca identitatea (4) să se transcrie sub forma

$$2i \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\zeta, \bar{\zeta}) \frac{d\xi \wedge d\eta}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \, d\zeta - i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{iz}, \bar{z} + \varepsilon e^{-it}) \, dt \qquad (4')$$

valabilă pentru orice $\varepsilon < 0$, suficient de mic; conform teoriei integralelor simple cu parametru, cum f este continuă în D, iar ∂D este un contur simplu, vom avea

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it}, \bar{z} + \varepsilon e^{-it}) \, dt = \int_0^{2\pi} [\lim_{\varepsilon \to 0} f(z + \varepsilon e^{it}, \bar{z} + \varepsilon e^{it})] \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(z, \bar{z}) dt = 2\pi f(z, \bar{z}).$$

Revenind la identitatea (4'), deoarece există limita din membrul drept, va exista limita și în membrul sting, cele două limite fiind egale; rezultă, deoarece $\lim_{\varepsilon \to 0} D_\varepsilon = D$, identitatea

$$2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\zeta, \bar{\zeta}) \frac{d\xi \wedge d\eta}{\zeta - z} = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z, \bar{z})$$

care coincide cu (3) deoarece $\overline{d\zeta} \wedge d\zeta = (d\xi - i\, d\eta) \wedge (d\xi + i\, d\eta) = 2i\, d\xi \wedge d\eta$.

Observația 1. În identitatea (3) integrala dublă

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\zeta, \bar{\zeta}) \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$$

este o integrală improprie (integrandul fiind nemărginit în D); de monstrația teoremei 1 arată că această integrală improprie este convergentă în sensul valorii principale (deoarece s-a extras din D nu o vecinătate oarecare a punctului z ci o vecinătate particulară, mai precis un disc $B_\varepsilon(z)$).

Observația 2. Plecînd de la identitatea (4) se poate obține o relația asemănătoare cu (3) și anume

$$f(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d\bar{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{\partial f}{\partial z} (\zeta, \bar{\zeta}) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}.$$

Observația 3. Formula lui Pompeiu (3) rămîne valabilă dacă $f \in H_1$, H_1 fiind spațiul Sobolev introdus în cap. I, punctul 7; față de teoria expusă la acel punct, aici trebuie considerate funcțiile de forma $u + iv$, unde u și v sînt funcții de două variabile definite și indefinit derivabile într-un pătrat din $\mathbb{C}$ care conține pe D. Conform definiției, $f \in H_1$ dacă există un șir fundamental $(u_n + iv_n)_{n \geqslant 1}$ în acel pătrat astfel încît $F_{u_n + iv_n} \xrightarrow{\mathfrak{L}} F_{f = u + iv}$, unde $F_{u_n + iv_n}$ este distribuția periodică corespunzătoare funcției $u_n + iv_n$, iar convergența se consideră în raport cu norma dedusă din produsul scalar

$$(f, g)_1 = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \Big[f(z, \bar{z}) \bar{g}(z, \bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial x} (z, \bar{z}) \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} (z, \bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial y} (z, \bar{z}) \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} (z, \bar{z}) \Big] dx \wedge dy. \tag{5}$$

Valabilitatea identității (3) pentru $f \in H_1$ rezultă din faptul că în cazul convergenței în norma dedusă din produsul scalar (5) se poate trece la limită sub semnul integral (fie că este cazul unei integrale simple, fie că este cazul unei integrale duble, vezi A.M. pag. 148), iar identitatea (3) are loc pentru $u_n + iv_n$. De remarcat că norma

dedusă din produsul scalar (5) este echivalentă cu norma dedusă din produsul scalar

$$(f, g) = \iint_D \left[f(z, \bar{z})\bar{g}(z, \bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial z}(z, \bar{z}) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z, \bar{z}) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) \frac{\partial \bar{g}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] d\bar{z} \wedge dz \tag{5'}$$

unde $\frac{\partial}{\partial z}$ și $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sînt operatorii de derivare introduși la punctul 1; justificarea acestei echivalențe se realizează imediat ținînd seama de de linearitatea derivatelor în cauză.

Acum vom deduce două rezultate importante pentru teoria funcțiilor $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferențiabile.

Teorema 2. (*Cauchy*). *Dacă $D \subset \mathbb{C}$ este un domeniu simplu conex, $\gamma \subset D$ un drum neted sau neted pe porțiuni închis omotop cu zero, și f olomorfă în D atunci*

$$\int_\gamma f = 0. \tag{6}$$

Deoarece pentru $f \in C^1(D)$ are loc identitatea (10') de la punctul 2

$$\int_{\gamma = \partial D_\gamma} f(z, \bar{z})\, dz = \iint_{D_\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z})\, d\bar{z} \wedge dz$$

în ipotezele teoremei avem $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, pentru orice z (în acest caz vom scrie $f(z, \bar{z}) = f(z)$); rezultă astfel (6), presupunînd că γ este frontiera unui domeniu simplu conex $D_\gamma \subset D$

Observația 4. Teorema lui Cauchy 2 rămîne valabilă dacă se presupune $f \in H_1(D)$, iar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ în D, γ putînd fi un contur simplu sau nu.

Teorema 2 admite o consecință importantă cunoscută de asemeni sub numele de teorema lui Cauchy:

Teorema 2'. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă; să presupunem f olomorfă în D și fie γ_1, $\gamma_2 \subset D$ două drumuri închise, netede pe porțiuni, omotope în D ($\gamma_1 \sim \gamma_2$). Atunci*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f. \tag{7}$$

Demonstrația se deduce imediat considerînd Fig. III.1 unde sînt trasate imaginile drumurilor γ_1, γ_2 și $\gamma \subset D$, neted pe porțiuni definit de γ_1 (parcurs în sens direct,) segmentul A_1A_2, γ_2 (parcurs în sens invers) și segmentul A_2A_1 (adică segmentul A_1A_2 parcurs

în sens invers) ; în D_γ simplu conex, f va fi evident olomorfă, și deci în baza teoremei 2 avem $\int_\gamma f = 0$. Cum $\gamma = \gamma_1 \cup A_1A_2 \cup \gamma_2^- \cup A_2A_1$ se deduce

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{A_1A_2} f + \int_{\gamma_2^-} f + \int_{A_2A_1} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{A_1A_2} f - \int_{\gamma_2} f - \int_{A_1A_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

ținînd seama de egalitatea $\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$ (vezi (7) de la punctul 2) se obține (7). Evident nu este obligatoriu ca drumurile în cauză să fie contururi simple.

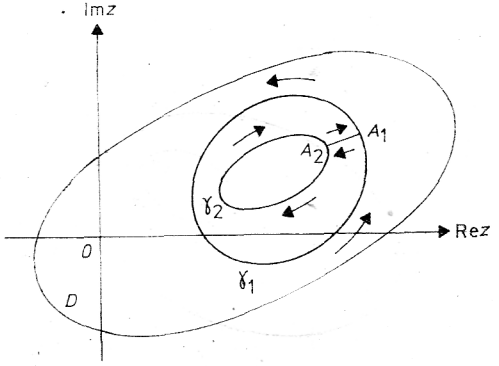

Fig III.1

Consecința 1. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și conexă, $z_1, z_2 \in D$ două puncte oarecare și γ_1, γ_2 două drumuri din D netede pe porțiuni avînd extremitățile în z_1 și z_2 ; dacă $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^- = \partial D_\gamma$, D_γ este simplu conex și f este olomorfă în D_γ, atunci*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f \tag{8}$$

Într-adevăr, în acest caz avem $\int_{\gamma_1 = \gamma_1 \cup \gamma_2^-} f = 0$ și cum $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^-} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$,

(8) este justificată.

Observația 5. *Din rezultatele anterioare se deduce că pentru integralele funcțiilor olomorfe din $\mathbb{C}$ sînt valabile proprietățile integralelor curbilinii de tipul al doilea independente de drum* (vezi A.M. cap. IV, punctul 4).

Teorema 3 (*formula integrală Cauchy*). *Fie f olomorfă în domeniul simplu conex $D \subset \mathbb{C}$ și $\gamma \subset D$ un contur simplu, neted pe porțiuni, care conține la interior punctul z* (*vezi* Fig. III.2). *Atunci*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \tag{9}$$

conturul simplu γ fiind parcurs în sens direct.

Demonstrația rezultă direct din formula lui Pompeiu (3) (cu γ în loc de ∂D)

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \iint_{D_\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (\zeta, \bar{\zeta}) \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}$$

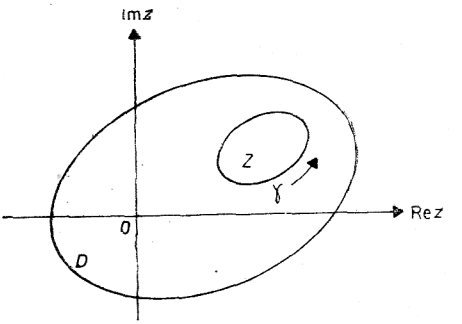

Fig. III.2

în care avem $f(z, \bar{z}) = f(z)$ $\left(\text{deoarece } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (z, \bar{z}) = 0 \text{ pentru orice } z \in D \right)$, iar evident integrala dublă dispare.

Observația 6. Formula integrală Cauchy va fi valabilă pentru $f \in H_1(D)$ unde $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(= f(z, \bar{z}))$, dacă f este continuă în D, iar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (z, \bar{z}) = 0$ pentru orice $z \in D$ (ipotezele pentru D fiind acelea din teorema 3); această formulă permite reprezentarea oricărei funcții olomorfe printr-o integrală din $\mathbb{C}$ care depinde de un parametru complex. De aceea, se pot obține proprietăți ale funcțiilor olomorfe utilizînd teoria integralelor cu parametru.

O consecință imediată a teoremei 3 este următorul rezultat:

Teorema 4. *Orice funcție $f : D \to \mathbb{C}$, olomorfă în mulțimea deschisă D este analitică în D* (reamintim că f este analitică în punctul $z_0 \in D$ dacă există $R > 0$, astfel încît în discul $B_R(z_0) \subset D$, f este reprezentată printr-o serie Taylor centrată în z_0).

Fie $0 < r < R$ și fie γ_r drumul din $\mathbb{C}$ definit de circumferința cercului $|z - z_0| = r$ parcurs o singură dată în sens direct și $\overline{B}_r(z_0) \subset D$; dacă $|z - z_0| < r$ și $\zeta \in \gamma_r$ (Fig. III. 3) atunci $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = s < 1$ și scriind

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

șirul de funcții $g_m(\zeta) = f(\zeta) \sum_{n=0}^{m} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ va converge uniform pentru $\zeta \in \gamma_r$ (condvergența uniformă decurge din faptul că $0 \leqslant s < 1$) către funcția $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Așadar, în

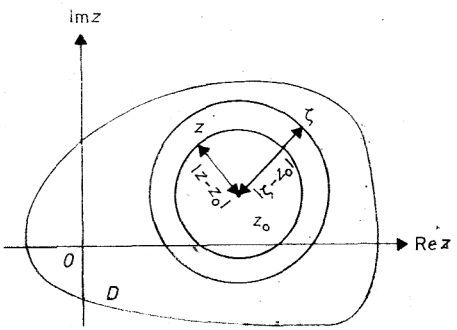

Fig. III. 3

formula integrală Cauchy (9), se poate înlocui integrandul prin $\lim_{m \to \infty} g_m(\zeta)$ și permutînd limita cu integrala se deduce

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{10}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \tag{11}$$

Observația 7. Deoarece o serie Taylor convergentă pentru $|z - z_0| < R$ se scrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$, prin comparație cu (10) și (11) rezultă

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \tag{12}$$

unde $\gamma \sim \gamma_r$ (cu condiția ca z_0 să aparțină mulțimii D_γ pentru care conturul neted pe porțiuni γ este frontieră : $\gamma = \partial D_\gamma$).

Observația 8. Utilizînd teoria derivării integralelor cu parametru, din formula integrală (9) rezultă

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

unde f și γ verifică ipotezele din teorema 3.

Definiția 1. *O funcție* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *olomorfă pentru orice* $z \in \mathbb{C}$ *se numește funcție întreagă.*

În baza acestei definiții, pentru orice $z_0 \in \mathbb{C}$ seria Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \tag{10}$$

are raza de convergență $R = \infty$.

Teorema 5. (*Liouville*). *Dacă* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *este o funcție întreagă și mărginită în* $\mathbb{C}$ *atunci* f *este o constantă.*

Prin ipoteză există $M \in \mathbb{R}$, astfel încît $|f(z)| \leqslant M$, $z \in \mathbb{C}$ și teorema va fi demonstrată dacă se arată că $f'(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$ (vezi sfîrșitul punctului 1) ; or, din (13) rezultă

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$$

unde $\gamma_R = \{\zeta | \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta - z_0| = R\}$ și utilizînd inegalitatea (6) de la punctul (2), se deduce ($\zeta = z + R e^{it}$, $t \in]0, 2\pi]$, $d\zeta = iR e^{it}\, dt$)

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\max |f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} R\, dt = \frac{M}{R} \to 0 \quad (R \to 0)$$

și deci $f'(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Consecința 2. (*Teorema fundamentală a algebrei*). *Orice funcție polinomială neconstantă* p *cu coeficienți din* $\mathbb{C}$ *admite o rădăcină în* $\mathbb{C}$.

Fie $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o astfel de funcție, deci

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,\ a_0 \neq 0,\ n \geqslant 1 ;$$

deoarece $\lim\limits_{|z| \to \infty} \dfrac{|p(z)|}{|z|^n} = |a_0|$, pentru $|z| \geqslant R$, cu R suficient de mare vom avea

$$\left| \frac{|p(z)|}{|z^n|} - |a_0| \right| \leqslant \frac{|a_0|}{2}, \text{ deci } \quad |p(z)| \geqslant \frac{1}{2}|a_0||z|^n \text{ dacă } |z| \geqslant R.$$

Să presupunem că p nu are rădăcini în $\mathbb{C}$: $p(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$; atunci $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ va fi o funcție întreagă, nulă pentru $z = \infty$. Va rezulta $|f(z)| = \dfrac{1}{|p(z)|} \leqslant \dfrac{2}{|a_0||z|^n}$ dacă $|z| \geqslant R$ deci f va fi mărginită în $\mathbb{C}$ și conform teoremei lui Liouville 5, f va fi o constantă : $f(z) = A \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, adică $p(z) = \dfrac{1}{A}$ ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare, dacă $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ este diferențiabilă în $D\subset\mathbb{C}$, atunci f admite derivate de orice ordin în orice punct din D și este analitică în vecinătatea oricărui punct $z_0\in D$.

4. Zerouri. Singularități izolate. Funcții meromorfe

Definiția 1. *Fie $f: D\to\mathbb{C}$, D fiind o mulțime deschisă din $\mathbb{C}$; punctul $z_0\in D$ se numește zero al funcției f dacă $f(z_0)=0$; presupunînd f olomorfă în D, z_0 va fi zero de ordinul $n=1,2,\ldots$ sau zero de multiplicitate n dacă în $B_r(z_0)$, cu $r>0$ convenabil ales are loc egalitatea*

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z), \tag{1}$$

unde g este olomorfă în $B_r(z_0)$ și $g(z_0)\neq 0$. Dacă $n=1$, zeroul se numește simplu.

Definiția 2. *Funcția $f: D\to\mathbb{C}$, olomorfă în mulțimea deschisă D admite în punctul $z_0\in\mathbb{C}$ o singularitate izolată dacă $z_0\notin D$ și există un $\delta>0$ astfel încît $z\in D$ dacă $0<|z-z_0|<\delta$.*

Definiția 3. *Singularitatea izolată z_0 se spune că este un pol multiplu de ordinul n sau pol de multiplicitate n pentru f dacă $\frac{1}{f}$ este olomorfă în $B_\delta(z_0)$ cu $\delta>0$, iar z_0 este un zero multiplu de ordinul n pentru funcția $\frac{1}{f}$. Dacă $n=1$, polul se numește simplu.*

Observația 1. *Punctul $z_0\in D$ va fi un zero avînd ordinul de multiplicitate n pentru funcția f olomorfă în D, dacă și numai dacă se îndeplinesc condițiile*

$$f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(n-1)}(z_0)=0,\quad f^{(n)}(z_0)\neq 0 \tag{2}$$

Într-adevăr, deoarece $f(z)=f(z_0)+\frac{z-z_0}{1!}f'(z_0)+\ldots+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0)+$

$+\frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0)+\ldots$, rezultă $f(z)=(z-z_0)^n\frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(z_0)+\frac{z-z_0}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z_0)+\ldots\right]$

și notînd $g(z)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)+\frac{z-z_0}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z_0)+\ldots$, g va fi olomorfă în vecinătatea lui z_0 (fiind suma unei serii de puteri cu $R>0$), iar $g(z_0)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\neq 0$; reciproc, din (1) rezultă (2) prin derivarea lui f.

Observația 2. Dacă f admite în z_0 o singularitate izolată de tip pol de ordinul n, din definițiile 1 și 3 rezultă $\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^n g(z)$, $z\in B_\delta(z_0)$ adică

$$f(z)=\frac{g_1(z)}{(z-z_0)^n},\quad g_1(z)=\frac{1}{g(z)},\quad g_1(z_0)=\frac{1}{g(z_0)}\neq 0,\quad z\in B_\delta(z_0), \tag{3}$$

iar g_1 va fi olomorfă în $B_\delta(z_0)$ (avem $g_1 = \frac{1}{g}$, iar g este olomorfă în vecinătatea lui z_0 și nu se anulează în z_0).

Exemple. 1. Dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$ $z = 0$ va fi un zero multiplu de ordinul n pentru f, iar dacă $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{z^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $z = 0$ va fi un pol multiplu de ordinul n pentru g $\left(\text{avem } \frac{1}{g} = f\right)$.

2. Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$; f va admite o singularitatea izolată în punctul z_0, deoarece f este derivabilă în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Aceasta întrucît f se prezintă ca o compunere $f = g \circ h$ unde $g(w) = \sin w$ și $h(z) = \frac{1}{z - z_0}$. Cum g este derivabilă în $\mathbb{C}$ și h derivabilă în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ teorema de derivare a funcțiilor compuse (vezi propoziția 3 de la punctul 1) arată că f va fi derivabilă în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

3. Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)$ și f nu se presupune definită în z_0; evident, conform definiției 3, z_0 este o singularitate izolată pentru f.

Definiția 4. *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ o singularitate izolată pentru f, f fiind olomorfă în D; vom spune că z_0 este o singularitate aparentă sau eliminabilă pentru f dacă f poate fi definită și în punctul z_0 astfel încît să devină olomorfă în $D \cup \{z_0\}$.*

Exemplul. 4 Punctul z_0 din exemplul 3 este o singularitate eliminabilă pentru f, deoarece definind f în z_0 și punînd $f(z_0) = \exp(z_0)$, va rezulta funcția $f(z) = \exp(z)$ care este olomorfă în $\mathbb{C}$ (deci și în z_0).

Teorema 1. *Singularitatea izolată a funcției f va fi o singularitate eliminabilă dacă, și numai dacă, f este mărginită în vecinătatea lui z_0.*

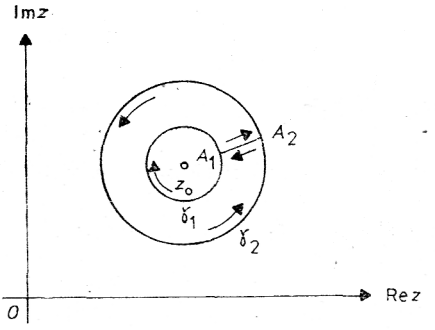

Fig. III.4

Dacă z_0 este o singularitate eliminabilă pentru f, se deduce că f poate fi definită în z_0 astfel încît f să fie olomorfă în $B_\delta(z_0)$; cum o funcție olomorfă este continuă, va rezulta că f va fi mărginită în vecinătatea lui z_0 (aceasta înseamnă că avem $|f(z)| \leqslant M$ dacă $0 < |z - z_0| < \delta$). Reciproc, să presupunem că avem $|f(z)| \leqslant M$ pentru z astfel încît $0 < |z - z_0| < \delta$ și fie $0 < r_1 < r_2$ astfel încît $B_{r_2}(z_0) \subset D$ (vezi Fig. III.4); fie γ_1, γ_2 drumurile netede definite prin $\partial B_{r_1}(z_0)$ respectiv $\partial B_{r_2}(z_0)$ și γ drumul neted pe porțiuni definit prin $\gamma_2 \cup A_2A_1 \cup \gamma_1^- \cup A_1A_2$ (considerate ca drumuri simple).

Evident γ închide la interior un domeniu simplu conex D și pentru orice $z \in D$ este valabilă formula integrală Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (4)$$

deoarece $\int_{A_1A_2} = -\int_{A_2A_1}$; evaluînd ultima integrală (în baza inegalității (6) de la punctul 2), rezultă

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta \in \gamma_1} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \cdot 2\pi r_1 \to 0 \ (r_1 \to 0)$$

$\left(\text{avem } \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \leqslant \frac{M}{|\zeta - z|} \text{ iar } \zeta \neq z\right)$. Trecînd la limită (pentru $r_1 \to 0$) în egalitatea (4) avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{4'}$$

iar această integrală va defini în $B_{r_2}(z_0)$ o funcție olomorfă dacă se presupune f definită și în punctul z_0 prin (4'), deci

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta.$$

Exemple 5. Funcția $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ admite o singularitate eliminabilă în origină; punînd $f(0) = 1$ funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ dacă $z \neq 0$, $f(0) = 1$ va fi o funcție întreagă $\left(\text{deoarece } \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \ldots \text{ avem } \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \right.$ $\left. + \frac{z^4}{5!} - \ldots, \text{ pentru } z \neq 0, \text{ și evident seria de puteri din membrul drept este convergentă pentru orice } z \in \mathbb{C}\ (R = \infty), \text{ iar pentru } z = 0 \text{ suma ei este egală cu unitatea}\right)$.

6. Dacă $f: D \to \mathbb{C}$, $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, $g(z_0) \neq 0$, g olomorfă în D, iar $n \geqslant 2$, atunci funcția $h: D\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$, $h(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}$, $k \leqslant n$ va avea o singularitate eliminabilă în punctul z_0; scriind $h_1(z) = (z - z_0)^{n-k} g(z)$ pentru $z \in D\setminus\{z_0\}$, $h_1(z_0) = 0$ dacă $0 < k < n$, $h_1(z_0) = g(z_0)$, pentru $k = n$ funcția h_1 va fi olomorfă în D.

Definiția 5. *Dacă funcția f admite o singularitate izolată în z_0 care nu este nici singularitate de tip pol nici singularitate eliminabilă, atunci z_0 va fi o singularitate esențială pentru f.*

Prin urmare, definițiile 3, 4 și 5 arată că o singularitate izolată pentru funcțiile olomorfe poate fi sau un pol sau un punct singular esențial sau o singularitate eliminabilă (aparentă).

Pentru a caracteriza singularitățile esențiale este important următorul rezultat:

Teorema 2. (*Casorati-Weierstrass*). *Dacă z_0 este o singularitate esențială pentru funcția olomorfă f, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $a \in \mathbb{C}$ există un $z \in \mathbb{C}$ astfel încît $|z - z_0| < \varepsilon$ și $|f(z) - a| < \varepsilon$* (altfel

spus, f este complet nedeterminată în vecinătatea unui punct singular esențial : diferența $|f(z) - a|$ este oricît de mică pentru z suficient de apropiat de z_0, oricare ar fi numărul complex a).

Să presupunem că teoerma nu este adevărată; atunci pentru un $\varepsilon > 0$ și un $a \in \mathbb{C}$ vom avea $|f(z) - a| \geqslant \varepsilon$ deși $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Rezultă că funcția $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - a}$ verifică inegalitatea $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z) - a|} \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ dacă $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, deci g este mărginită în vecinătatea lui z_0, adică acest punct este o singularitate aparentă pentru g și, conform teoremei, h poate fi considerată olomorfă în $B_r(z_0)$ cu $r > 0$ suficient de mic, deci avem $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, $h(z_0) \neq 0$. Rezultă

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

deci

$$f(z) = a + \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}$$

și f va avea în z_0 fie o singularitate eliminabilă (dacă $m = 0$), fie o singularitate de tip pol (dacă $m > 0$), funcția k fiind evident olomorfă în vecinătatea lui z_0 : $k = \dfrac{1}{h}$, $h(z_0) \neq 0$).

Rezultatul obținut prin teorema 2 poate fi precizat în sensul următor : dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ este o singularitate esențială pentru f, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $a \in \mathbb{C}$, exceptînd cel mult un număr complex, există z astfel încît $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ și $f(z) = a$.

Exemplul 7. Fie $f(z) = \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $z \neq 0$; scriind $f(z) = a$, $a \neq 0$, ecuația $e^{\frac{1}{z}} = a$ admite soluție și deci $z = 0$ este un punct singular esențial pentru $\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

În teoria funcțiilor de o variabilă complexă se consideră $f(z_0) = \infty$ dacă z_0 este un pol al funcției olomorfe f, iar dacă z_0 este o singularitate eliminabilă se presupune $f(z_0) \in \mathbb{C}$ convenabil determinat; cu aceste convenții se poate extinde noțiunea de funcție olomorfă, introducîndu-se noțiunea de funcție meromorfă.

Definiția 6. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; o funcție $f : D \to \mathbb{C}^-$ se numește meromorfă în D dacă pentru orice $z \in D$, z este un pol pentru f sau f este olomorfă în vecinătatea lui z.*

Exemplul 8. Dacă p și q sînt funcții polinominale, atunci citul lor, care se numește funcție rațională, va fi o funcție meromorfă în $\mathbb{C}$, deoarece scriind $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, avem $f(z) \in \mathbb{C}$ dacă $q(z) \neq 0$ și $f(z) = \infty$ dacă $q(z) = 0$.

Revenind la problema zerourilor funcțiilor olomorfe sînt importante următoarele rezultate :

Propoziția 1. *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu și f olomorfă în D, f fiind nenulă în cel puțin un punct din D; atunci mulțimea zerourilor lui f este formată numai din puncte izolate.*

Fie $A \subset D$, $A = \{z | z \in D,\ f(z) = 0\}$ și $a \in D$ un punct de acumulare al mulțimii A; va exista un șir $(z_n)_{n \geqslant 1}$ din A convergent către a și trecînd la limită în egalitatea $f(z_n) = 0$ se deduce $f(a) = 0$ (în baza continuității lui f, consecință a olomorfiei acestei funcții), deci $a \in A$. Cum D este o mulțime deschisă (fiind un domeniu), va exista $B_R(a) \subset A$, $R > 0$ în care se poate scrie $f(z) = (z - a)^m g(z)$, $g(a) \neq 0$, $z \in B_R(a)$ dacă m este ordinul de multiplicitate al zeroului a; cum $z_n \to a$ $(n \to \infty)$, iar g este olomorfă în $B_r(a)$ $0 < r \leqslant R$, avem $z_n \in B_r(a)$ pentru $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$, iar cum $z_n \neq a$ rezultă $f(z_n) = (z_n - a)^m g(z_n) = 0$, $n \geqslant n_0$. Se deduce $g(z_n) = 0$ pentru $n \geqslant n_0$, iar prin trecere la limită $(n \to \infty)$ rezultă $g(a) = 0$, ceea ce este contrar ipotezei.

Consecința 1. *Dacă f este olomorfă în domeniul D și f se anulează pe o mulțime avînd un punct de acumulare z_0 în D, atunci f este nulă în orice punct din $B_R(z_0)$ cu $0 < R < \rho$ = distanța dintre z_0 și ∂D.*

Într-adevăr, dacă f n-ar fi nulă în cel puțin un punct din D, s-ar aplica propoziția 1 și mulțimea zerourilor lui f ar fi formată numai din puncte izolate, ceea ce contrazice ipoteza ; deci $f(z) = 0$, $z \in B_R(z_0)$.

Consecința 2. *Dacă f este olomorfă în domeniul $D \subset \mathbb{C}$ și există $z_0 \in D$ astfel încît $f^{(n)}(z_0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, atunci $f(z)$ este nulă în D.*

Deoarece f este olomorfă în $z_0 \in D$, iar D este o mulțime deschisă, există $R > 0$ astfel încît în $B_R(z_0)$ avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0$$

Fie $a \in D$ și să arătăm că f este nulă în vecinătatea acestui punct ; cum D este o mulțime conexă, z_0 se poate uni cu a printr-un drum γ neted, $\gamma \subset D$ avînd lungimea finită. Deci γ este o mulțime compactă din $\mathbb{C}$ și va putea fi acoperită cu un număr finit de discuri aflate în întregime în D, fiecare disc avînd centrul în cel precedent. Aplicînd de un număr finit de ori consecința 1 se deduce că f va fi nulă în fiecare disc și deci $f(a) = 0$.

Consecința 3. *Dacă $f, g : D \to \mathbb{C}$ sînt olomorfe în domeniul D atunci $f = g$ dacă avem $f(z) = g(z)$ pentru $z \in A$, unde A este o mulțime cu punct de acumulare în A.*

Într-adevăr, funcția $f - g$ este olomorfă în D și este nulă pentru $z \in A$, iar consecințele 1 și 2 arată că $f - g$ va fi nulă în D ; avînd în vedere importanța acestui rezultat îl vom reformula sub formă de teoremă.

Teorema 3. (*Principiul identității funcțiilor olomorfe*). *Dacă funcțiile f și g coincid pe o mulțime cu punct de acumulare din domeniul lor comun de olomorfie D, atunci $f(z) = g(z)$, $z \in D$.*

Cu alte cuvinte dacă f și g sînt funcții olomorfe în D care coincid de exemplu pe un drum $\gamma \subset D$, atunci ele vor coincide în D. Acest principiu poate fi utilizat la extinderea în $\mathbb{C}$ a unor relații valabile în $\mathbb{R}$; astfel dacă avem $f(x) = g(x)$ pentru $x \in I$, unde I este un interval al axei reale iar f și g devin funcții olomorfe într-un domeniu $D \subset \mathbb{C}$ (cu $I \subset D$) prin înlocuirea lui $x \in \mathbb{R}$ prin $z \in \mathbb{C}$, obținem $f(z) = g(z)$, $z \in D$.

Exemple 9. Identitatea fundamentală a trigonometriei $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ este valabilă pentru $x \in \mathbb{R}$; *or funcțiile* $\cos z$ *și* $\sin z$ *sînt olomorfe în* $\mathbb{C}$, deoarece

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, \quad \sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

($R = \infty$) și deci în $\mathbb{C}$ avem $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

10. Funcția $f(z) = \sin z$) este olomorfă în $\mathbb{C}$ și are o infinitate de zerouri $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dar aceasta nu contrazice rezultatele anterioare deoarece mulțimea în cauză nu are puncte de acumulare la distanță finită.

11. Funcția $f(z) = \sin\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ este olomorfă în $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ (fiind compunerea funcțiilor $\sin(w)$ și $w = \frac{1+z}{1-z}$ și se anulează în punctele $z_k = \frac{k\pi - 1}{k\pi + 1}$; cum $z_k \to 1$ ($k \to \infty$), $z = 1$ va fi un punct de acumulare de zerouri ale lui f, dar acest punct nu aparține domeniului de olomorfie al acestei funcții.

12. În cazul funcției gamma avem relațiile

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1),\ x > 0,\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},\ 0 < x < 1;$$

deoarece funcția gamma se poate extinde și la valori complexe ale variabilei (vezi considerațiile din finalul punctului 3) cu ipoteza $\operatorname{Re} z > 0$ rezultă că formulele de mai sus vor valabile și pentru $x \in \mathbb{C}$; așadar avem

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \text{ dacă } \operatorname{Re} z > 0$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \text{ dacă } 0 < \operatorname{Re} z < 1 \text{ sau } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$

5. Dezvoltări Laurent. Reziduuri

Definiția 1. *Dacă pentru $z_0 \in \mathbb{C}$ are loc o dezvoltare în serie de puteri bilaterală*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \ldots + a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \\ + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots \qquad (1)$$

atunci această serie poartă numele de dezvoltare Laurent centrată în z_0. Seria care conține termenii care au puteri negative ale lui $z - z_0$ formează *partea principală* sau *partea singulară* a dezvoltării Laurent, iar seria $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$ formează partea *tayloriană* a dezvoltării Laurent (1).

Teorema 1. *Dacă* f *este olomorfă în inelul* $D = \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$, *atunci pentru orice* $z \in D$ *este valabilă dezvoltarea Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R \tag{2}$$

în care coeficienții a_n, $n \in \mathbb{Z}$ *sînt unic determinați și pot fi calculați prin integralele*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

C fiind un contur simplu din D care ocolește punctul z_0.

Fie $r < |z - z_0| < R$ și $r_1, R_1 \in \mathbb{R}$ astfel încît $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$ și să notăm prin γ_1 și γ_2 circumferințele $|z - z_0| = r_1$ respectiv $|z - z_0| = R_1$; în baza calculului din demonstrația teoremei 1 de la punctul 5, se poate scrie

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = f_2(z) + f_1(z).$$

S-a notat

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta;$$

f_2 este o funcție olomorfă pentru $|z - z_0| < R_1$ și deci utilizînd teorema 4 de la punctul 2, avem

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R_1 \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Apoi

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - z_0} \int_{\gamma_1} f(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

și deoarece pe γ_1 avem $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$, rezultă $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n$

seria fiind uniform convergentă ; prin permutare cu integrala, se deduce

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \int_{\gamma_1} (\zeta - z_0)^n f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

cu $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$. S-au obținut astfel coeficienții (3), ținînd seama de olomorfia lui f între drumurile γ_1 și C, iar evident f_1 va fi olomorfă pentru $|z - z_0| > r_1$, r_1 putînd fi înlocuit prin r în baza raționamentului anterior. Prin urmare dezvoltarea (2) este justificată și teorema va fi demonstrată dacă arătăm că șirul bilateral $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ al coeficienților dezvoltării Laurent este unic determinat ; să presupunem deci valabilă dezvoltarea Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2}$$

care este uniform convergentă în inelul $D = \{z \mid 0 < r < |z - z_0| < R\}$. Deci seria (2) este uniform convergentă pe C (definit anterior) și va putea fi integrată termen cu termen ; rezultă

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right] dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^n\, dz = 2\pi i a_{-1}$$

deoarece

$$\int_C (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{pentru } n = -1 \end{cases} \tag{4}$$

(într-adevăr, scriind $z = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, ρ fiind raza lui C,

avem $$\int_C (z - z_0)^n\, dz = i \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} e^{i(n+1)t}\, dt$$

de unde rezultă (4) ; faptul că C poate fi cercul menționat cu $r < \rho < R$ rezultă din olomorfia funcției f.

Înmulțind acum (2) cu $(z - z_0)^{-m-1}$, după integrare rezultă

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}}\, dz, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Observația 1. Teorema 1 deși a fost demonstrată pentru cazul unui inel, rămîne valabilă și în cazul în care f este olomorfă într-un domeniu D și are o singularitate izolată în z_0 iar dezvoltarea Laurent (2) este valabilă pentru $z \in D$ cu $0 < |z - z_0| < R$, pentru un $R > 0$ convenabil ales.

Definiția 2. *Dacă are loc dezvoltarea Laurent*

$$f(z) = \ldots + a_{-n}(z - z_0)^n + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + \\ + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$$

coeficientul a_{-1} se numește reziduul lui f relativ la punctul singular izolat z_0 și se notează $a_{-1} = \operatorname{Res}(f; z_0)$.

Observația 2. Din dezvoltarea Laurent se deduce că o funcție olomorfă nu poate avea alte singularități izolate în afara acelora menționate la punctul 5; astfel, dacă toți a_{-n}, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sînt nuli, z_0 va fi un punct singular eliminabil; dacă $a_{-m} \neq 0$, iar $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \ldots = 0$, z_0 va fi un punct singular de tip pol avînd ordinul de multiplicitate m, iar dacă o infinitate de coeficienți cu indici negativi din (2) sînt nenuli, z_0 va fi un punct singular esențial.

Într-adevăr, dacă în dezvoltarea Laurent (2) avem $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-n} = \ldots = 0$, rămîne din dezvoltarea considerată doar partea taylorîană

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots \qquad (5)$$

convergentă pentru orice $z \neq 0$, $|z - z_0| < R$ ($R > 0$ fiind suficient de mic) rezultînd mărginirea lui f în $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$; se aplică teorema 1 de la punctul 4 rezultînd faptul că z_0 este o singularitate eliminabilă, seria din (5) definind o funcție olomorfă în $B_R(z_0)$ dacă se presupune $f(z_0) = a_0$.

Dacă însă $a_{-m} \neq 0$ și $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \ldots = a_{-m-k} = \ldots = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ din (2) se deduce (pentru $z \neq z_0$):

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \\ + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \qquad (5')$$

unde g este definită prin

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m-1}(z - z_0) + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \\ + a_0(z - z_0)^m + \ldots, \quad z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}; \qquad (6)$$

aplicînd raționamentul din cazul dezvoltării (5), rezultă că g va avea o singularitate eliminabilă în z_0 și punînd $g(z_0) = a_{-m}$, g va defini o funcție olomorfă în $B_R(z_0)$, pentru $R > 0$ convenabil ales. În baza definiției 3 de la punctul 5, cum $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$ se deduce că f va avea în z_0 un pol avînd ordinul de multiplicitate m. Prin urmare, dacă dezvoltarea Laurent (2) are o infinitate de termeni nenuli, cu indici negativi, z_0 nu va putea fi nici singularitate (izolată) aparentă nici singularitate de tip pol ceea ce (în baza definiției 5 de la punctul 5) conduce la faptul că această singularitate este esențială.

Observația 3. Din dezvoltarea Laurent (5′) se deduce că reziduul a_{-1} se poate calcula cu ajutorul egalității

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0), \quad g(z) = (z - z_0)^m f(z), \quad m = 1, 2, \ldots ; \tag{7}$$

derivînd g definit prin (6) de $(m-1)$ ori, se obține

$$g^{(m-1)}(z) = f(m-1)!\ a_{-1} + m!\ a_0(z - z_0) + \ldots,$$

deci $g^{(m-1)}(z_0) = (m-1)!\, a_{-1}$. Cu ajutorul lui f (7) se transcrie

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \Big|_{z=z_0}, \quad m = 1, \ldots \tag{7′}$$

Observația 4. Dacă polul z_0 este simplu (deci dacă $m = 1$), iar f se scrie sub forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad h(z_0) = 0, \; h'(z_0) \neq 0 \tag{8}$$

g și h fiind olomorfe pentru $z \in B_R(z_0)$, reziduul lui f în z_0 se poate calcula simplu prin relația

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{8′}$$

Într-adevăr, din (7′) se deduce

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \left[(z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right]_{z=z_0} = g(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} =$$

$$= g(z_0) \cdot \frac{1}{h'(z_0)}$$

Exemple 1. Fie $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$, $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; deoarece $\dfrac{1}{f(z)} = \sin z$ admite numai zerouri simple în punctele $z_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, se deduce că f va admite o infinitate de poli simpli în punctele z_n, reziduul în z_n putîndu-se calcula cu ajutorul lui (8'), în care $g(z) = 1$ și $h(z) = \sin z$. Așadar,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}\,;\ n\pi\right) = \frac{1}{\sin'(n\pi)} = \frac{1}{\cos(n\pi)} = (-1)^n$$

2. Dacă $f(z) = \operatorname{ctg} z$, $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ deoarece $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$; în baza exemplului 1 se deduce că f admite poli simpli în $z_n = n\pi$, iar

$$\operatorname{Res}(\operatorname{ctg} z\,;\ n\pi) = \frac{\cos(n\pi)}{\sin'(n\pi)} = 1$$

3. Pentru funcția $f(z) = \dfrac{1}{z^k \sin z}$ $k = 1, 2, \ldots$, $z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, în baza exercițiului 1 se deduce că f va admite poli simpli în punctele $\pm\pi$, $\pm 2\pi, \ldots$ și un pol multiplu de ordinul $k+1$ în origine; prin urmare, aplicînd formulele (8') și (7') se deduce

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^k \sin z}\,;\ n\pi\right) = \frac{1}{(z^k \sin z)'}\bigg|_{z=n\pi} = \frac{1}{n^k\pi^k \cos(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{n^k\pi^k},\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\operatorname{Rez}\left(\frac{1}{z^k \sin z}\,;\ 0\right) = \frac{1}{k!}\,[z^{k+1} f(z)]^{(k)}(0) = \frac{1}{k!}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^{(k)}(0)$$

4. Funcția $f(z) = z^k \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ admite o singularitate esențială în origine, deoarece din dezvoltarea în serie a funcției exponențiale rezultă (pentru $z \neq 0$)

$$f(z) = z^k\left[1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{k!z^k} + \frac{1}{(k+1)!z^{k+1}} + \ldots\right] =$$

$$= z^k + \frac{z^{k-1}}{1!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!z} + \ldots$$

și deci o infinitate de termeni ai dezvoltării Laurent în vecinătatea lui $z = 0$ va avea coeficienți nenuli pentru puterile negative ale dezvoltării. În plus,

$$\operatorname{Res}(z^k e^{\frac{1}{z}}\,;\ 0) = \frac{1}{(k+1)!} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

după cum se observă direct din dezvoltarea în serie Laurent a funcției considerate.

Observația 5. Dacă f admite o singularitate izolată în z_0 care este un pol simplu avînd reziduul nul, atunci această singularitate este de fapt eliminabilă.

6. Teorema reziduurilor și aplicații

În acest punct ne vom ocupa de modul în care se pot calcula integralele de forma $\int_\gamma f$, dacă γ este imaginea unui drum neted (sau neted pe porțiuni) din $\mathbb{C}$. În ipoteza că $\gamma \sim 0$ în D (deci drumul γ este închis în D și omotop cu un drum constant din D) și γ este un contur simplu, calculul integralei în cauză se poate realiza utilizînd teorema lui Cauchy : dacă f nu admite singularități nici în domeniul a cărui frontieră este γ nici pe γ, atunci $\int_\gamma f = 0$ (teorema 2 de la punctul 3). Dacă în interiorul domeniului mărginit de γ f admite o singularitate izolată z_0 (rămînînd olomorfă în rest, inclusiv pe γ), atunci integrala se poate calcula cu ajutorul formulei (3) de la punctul 5 în care $n = -1$ și deci

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_0). \tag{1}$$

Din acest rezultat se poate deduce importanța reziduului a_{-1} în calculul unor integrale ; dacă z_0 este o singularitate eliminabilă pentru f, cum $a_{-1} = 0$ (vezi observația 5 de la punctul anterior), atunci $\int_\gamma f = 0$ și deci formula (1) va fi aplicabilă în viitor în cazul singularităților izolate de tip pol sau esențiale.

Dacă $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$, iar f este olomorfă în D avînd singularități izolate în punctele $z_1, \ldots, z_n$ atunci este valabil rezultatul următor :

Teorema 1. (*teorema reziduurilor*). *Fie f olomorfă în domeniul D exceptînd singularitățile izolate $z_1, z_2, \ldots, z_n$ și fie C un contur simplu din D omotop cu o constantă ($C \sim 0$) în D care conține la interior punctele $z_1, \ldots, z_n$.*
Atunci

$$\int_C f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_j) \tag{2}$$

Demonstrația se bazează pe egalitatea

$$\int_C f = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f \tag{3}$$

unde γ_j pentru un j fixat ($1 \leqslant j \leqslant n$) este un contur simplu care conține la interior doar singularitatea izolată z_j; egalitatea (3) este o consecință a teoremei lui Cauchy (vezi teorema 2 de la punctul 3) considerînd drumul simplu γ din Fig. III.5 și repetînd raționamentul din demonstrația teoremei 2′ de la punctul 3. Se constată că dacă conturul simplu C este parcurs în sens direct și γ este constituit din drumurile simple A_0A_1, A_2A_3, ..., $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, drumurile $A_{2j}A_{2j+1}$, $j=0,1,2,\ldots$ vorfi parcurse de două ori în sensuri inverse, iar drumurile simple care ocolesc punctele singulare izolate $z_1, \ldots, z_n$ vor fi parcurse în sens invers; utilizînd proprietățile integralelor din $\mathbb{C}$ (vezi punctul 2) rezultă (3). În acest mod, egalitatea (2) se deduce aplicînd (1) la egalitatea (3).

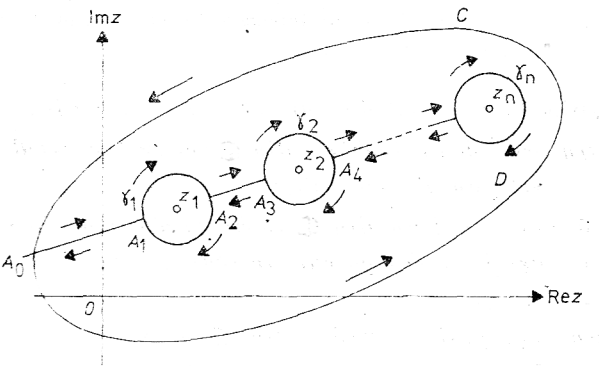

Fig. III.5

Teorema reziduurilor a fost demonstrată inițial de către Cauchy și ea poate fi utilizată în ambele sensuri adică se poate calcula reziduul unei funcții prin intermediul unei integrale din $\mathbb{C}$ sau invers, ultima variantă fiind cea mai uzuală dar care implică posibilitatea calculului direct al reziduurilor lui f, ceea ce se realizează relativ ușor dacă singularitățile funcției sînt de tip pol.

De asemenea, această teoremă poate fi generalizată în mai multe direcții; vom prezenta două dintre aceste generalizări.

Definiția 1. *Dacă γ este un drum* (neted sau neted pe porțiuni) *închis din $\mathbb{C}$, iar $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, atunci indicele drumului γ în raport cu punctul z_0 este numărul $n(\gamma; z_0)$ definit prin integrala*

$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \tag{4}$$

Exemplul 1. Fie $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + R \exp(2\pi i\, kt)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, z_0 \in \mathbb{C}$; din punct de vedere geometric, deoarece avem $|\gamma(t) - z_0| = R$, rezultă că drumul γ este circumferința cercului de rază R centrat în $z_0 \in \mathbb{C}$, parcursă de k ori; calculînd integrala din (4) găsim în acest caz

$$n(\gamma ; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i\, kR \exp(2\pi i\, kt)}{R \exp(2\pi i\, kt)}\, dt = k.$$

Prin urmare, indicele drumului închis γ definit în acest exemplu este numărul întreg care arată de cîte ori se parcurge conturul simplu atașat acestui drum (dacă z_0 este în exteriorul lui γ, conform teoremei lui Cauchy integrala din (4) va fi nulă și deci în acest caz indicele lui γ în raport cu z_0 este nul).

Propoziția 1. *Sînt valabile următoarele afirmații:*

i. *Pentru orice drum închis γ din $\mathbb{C}$ (neted sau neted pe porțiuni), indicele lui γ este un număr întreg.*

ii. *Dacă γ este un drum din $\mathbb{C}$ închis (neted sau neted pe porțiuni) iar γ^- este același drum dar parcurs în sens invers atunci* $n(\gamma^- ; z_0) = -n(\gamma ; z_0)$, $z_0 \notin \gamma$.

iii. *Dacă γ_1 și γ_2 sînt drumuri din $\mathbb{C}$ închise (netede sau netede pe porțiuni) care au același punct inițial atunci* $n(\gamma_1 \cup \gamma_2, z_0) = n(\gamma_1 ; z_0) + n(\gamma_2 ; z_0)$, $z_0 \notin \gamma_1 \cup \gamma_2$.

iv. *Dacă g_1 și γ_2 sînt drumuri din $\mathbb{C}$ închise (netede sau netede pe porțiuni) omotope în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, atunci* $n(\gamma_1 ; z_0) = n(\gamma_2 ; z_0)$, $z_0 \notin \gamma_1 \cup \gamma_2$; *în particular* $n(\gamma ; a) = 0$ dacă $\gamma \sim 0$ în $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

În afară de afirmația i toate celelalte sînt ușor de justificat utilizînd proprietățile integralelor din $\mathbb{C}$; de aceea fie $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ un drum închis din $\mathbb{C}$, neted sau neted pe porțiuni și să calculăm integrala din (4). Se deduce, presupunînd γ neted (pentru γ neted pe porțiuni justificarea se face prin generalizare)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt$$

și dacă se definește funcția $h : [0, 1] \to \mathbb{C}$ punînd

$$h(s) = \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt \qquad (5)$$

rezultă $h(0) = 0$, $h(1) = 2\pi i\, n(\gamma ; z_0)$, $h'(s) = \dfrac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}$, $s \in]0, 1[$; calculînd derivata funcției $F : [0, 1] \to \mathbb{C}$, definită prin $F(s) = e^{-h(s)} \cdot [\gamma(s) - z_0]$, funcția h fiind dată de (5), rezultă $F \in C^0([0, 1])$, $F \in C^1(]0, 1[)$

$$F'(s) = -e^{-h(s)}h'(s)[\gamma(s) - z_0] + e^{-h(s)}\gamma'(s) = e^{-h(s)}\left\{\gamma'(s) - \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}[\gamma(s) - z_0]\right\} = 0.$$

Deci F este o constantă în $[0, 1]$ și prin urmare $F(0) = F(1)$, adică

$$e^{-h(s)}[\gamma(1) - z_0] = \gamma(0) - z_0 ;$$

cum $\gamma(0) = \gamma(1)$, se deduce $h(1) = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$ și deoarece $h(1) = 2\pi i\, n(\gamma ; z_0)$ avem $n(\gamma ; z_0) \in \mathbb{Z}$.

Din propoziția 1 (punctele i, iv) se deduce acum să situația observată în cazul exercițiului 1 nu este singulară și de aceea avem dreptul să spunem că indicele $n(\gamma ; z_0)$ definește numărul de rotiri în jurul lui z_0 (presupunînd evident z_0 aflat în interiorul domeniului D_γ cu $\partial D_\gamma = \gamma$) a drumului γ, dacă γ este omotop cu drumul γ_0 definit prin $z_0 + R \exp(2\pi i k t)$, $t \in [0, 1]$.

Dacă nu se mai presupune γ un contur simplu, atunci formula integrală Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

trebuie transcrisă sub forma

$$n(\gamma ; z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{6}$$

Într-adevăr, dacă $\gamma \subset D$, $\gamma \sim 0$, f fiind olomorfă în D, funcția $\dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$ va avea o singularitate eliminabilă în $z = a$ și definind-o în punctul $a \in D$ prin $f'(a)$ se va obține o funcție olomorfă în D; pin urmare avem

$$0 = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\varsigma - f(z)\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

ceea ce coincide cu (6).

Trecînd la cazul teoremei reziduurilor, care este exprimată prin egalitatea (2) aceasta se va transcrie, din cauza egalității (6), sub forma

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} n(\gamma ; z_j) \operatorname{Res}(f ; z_j). \tag{2'}$$

În viitor însă vom presupune γ un contur simplu, ceea ce va antrena $n(\gamma ; z_j) = 1$.

A doua extensie a teoremei 1 se poate obține dacă f admite singularități izolate pe γ, dar asupra acestor singularități trebuie făcute ipoteze foarte restrictive; de exemplu are loc:

Teorema 2. (*a semireziduurilor*). *Dacă γ este un contur simplu neted, iar f admite în interiorul domeniului mărginit de γ singularitățile izolate $z_1, \ldots, z_n$, iar pe γ admite polii simpli $a_1, \ldots, a_m$, atunci formula* (2) *se transcrie sub forma*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f ; z_j) + \pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f ; a_k). \tag{7}$$

(Formula (7) este numită *teorema* sau *formula semireziduurilor* pentru că singularitățile de pe γ au coeficientul πi, iar nu $2\pi i$.)

Justificarea membrului drept din (7) se realizează la fel ca și în cazul teoremei 1 pentru prima sumă; pentru cea de a doua sumă se elimină cîte un disc de rază $\delta > 0$ centrat în $a_1, \ldots, a_m$, $\delta > 0$ fiind astfel ales încît discurile să nu se intersecteze și se consideră conturul simplu definit de γ în care s-a înlocuit $\gamma_k = \gamma \cap B_\delta(a_k)$ prin circumferința c_k lui $B_\delta(a_k)$ aflată în domeniul a cărui frontieră este γ. Dacă polul a_k este simplu avem

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\int_{c_k} f(z)\,dz - \int_{c_k} \frac{\alpha_k\,dz}{z - a_k} \right] = 0 \qquad \alpha_k = \operatorname{Res}(f ; a_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, m ;$$

într-adevăr, deoarece $c_k : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $c_k(t) = a_k + \delta e^{it}$,

$$\left| \int_{c_k} f(z)\,dz - \int_{c_k} \frac{\alpha_k\,dz}{z - a_k} \right| = \int_{c_k} \left[\frac{\alpha_k}{z - a_k} + g(z) \right] dz - \int_{c_k} \frac{\alpha_k\,dz}{z - a_k} \Bigg| =$$

$$= \left| \int_{c_k} g(z)\,dz \right| = \left| \int_{\delta_1}^{\pi - \delta_2} g(a_k + \delta e^{it}) i \delta e^{it}\,dt \right| \to 0 \ (\delta \to 0)$$

(deoarece $\delta_1 \to 0$, $\delta_2 \to 0$ cînd $\delta \to 0$). Prin urmare, integrala pe c_k din f se poate înlocui prin $\displaystyle\int_{c_k} \frac{\alpha_k\,dz}{z - a_k} = \alpha_k \pi i$ (cînd $\delta \to 0$).

Observația 1. Dacă drumul γ este neted pe porțiuni și a_k coincide cu un punct al lui γ în care tangentele laterale formează între ele un unghi θ_k, atunci în formula (7) termenul $\pi i \operatorname{Res}(f; a_k)$ trebuie înlocuit prin $\theta_k i \operatorname{Res}(f; a_k)$.

Exemple. 1. Să calculăm $I = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^4}$ cu autorul teoremei reziduurilor. Deoarece integrandul $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ este o funcție pară care admite în semiplanul $\operatorname{Im} z > 0$ polii simpli $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}i}$, vom avea

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} 2\pi i\,[\operatorname{Res}(f; z_1) + \operatorname{Res}(f; z_2)] =$$

$$= \pi i[\operatorname{Res}(f; z_1) + \operatorname{Res}(f; z_2)]$$

unde γ_R este conturul simplu (neted pe porțiuni din Fig. III.6,a) format din segmentul $[-R, R]$ și semicercul $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ parcurs în sens direct. Egalitatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz$$

se obține imediat, deoarece

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx + \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx +$$

$$+ \int_0^\pi \frac{R^2 e^{2it}}{1+R^4 e^{4it}} \cdot Ri\, e^{it}\,dt,$$

iar pentru $R \to \infty$ ultima integrală tinde la zero (în raport cu R gradul numitorului este mai mare decît gradul numitorului). Deoarece

$$\operatorname{Res}(f; z_1) = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1},\quad \operatorname{Res}(f; z_2) = \frac{1}{4z_2}$$

(s-a folosit (8) de la punctul 5), avem

$$\operatorname{Res}(f; z_1) + \operatorname{Res}(f; z_2) = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)^2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} i \text{ și deci } I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

În locul conturului din Fig. III6 a se poate considera conturul dreptunghiular γ din Fig. III.6 .b și se va obține același rezultat pentru $\alpha, \beta \to \infty$.

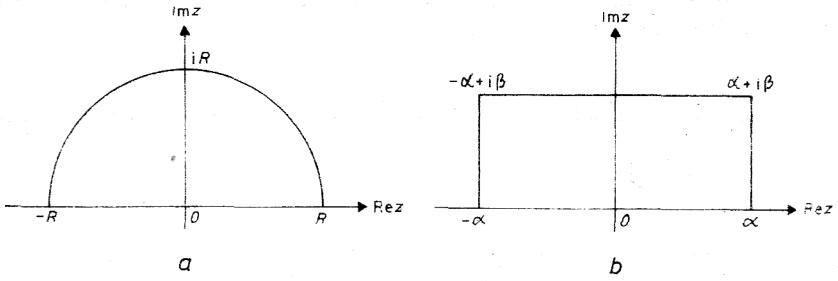

Fig. III.6

2. Generalizînd exemplul 1, utilizînd Fig. III. 6, a. este ușor de arătat că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)};\ z_j\right)$$

dacă p și q sînt funcții polinomiale, gradul numitorului fiind cu cel puțin două unități mai mare decît gradul numărătorului, $q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, iar z_j sînt rădăcinile lui q aflate în semiplanul $\operatorname{Im} z > 0$.

3. În condițiile exercițiului 2, dacă q are și zerouri simple reale, se aplică teorema semireziduurilor și deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f; z_j) + \pi i \sum_k \operatorname{Res}(f; x_k), \tag{8}$$

$q(z_j) = 0$, $\operatorname{Im} z_j > 0$, $x_k \in \mathbb{R}$, $q(x_k) = 0$, $q'(x_k) \neq 0$ (sumele extinzîndu-se la toate zerourile lui q cu proprietățile menționate).

4. Formula (8) rămîne valabilă și în cazul în care funcția g este olomorfă pentru $\operatorname{Im} z > 0$, exceptînd un număr finit de singularități izolate, astfel încît $|g(z)| \to 0$ ($|z| \to \infty$, $0 < \arg z < \pi$), iar $f(z) = g(z)\, e^{iaz}$, $a > 0$.

7. Teoria Dunford-Taylor pentru matricea f(A)

La punctul 3 s-a arătat că orice funcție $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă în domeniul $D \subset \mathbb{C}$ se poate scrie sub forma unei integrale cu parametru

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - t}\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z - t)^{-1} f(z)\,dz \tag{1}$$

dacă $\gamma \subset D$ este un contur simplu.

Fie acum A o matrice pătrată oarecare, $A = [a_{jk}]$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, $a_{jk} \in \mathbb{C}$. Pentru această matrice se pot defini puterile naturale A^m, $m \in \mathbb{N}$, punînd

$$A^0 = I, A^m = A \cdot A^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

precum și matricea $p(A)$, unde $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcție polinomială; astfel dacă $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$, $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$, vom scrie, prin definiție

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_k A^k + \ldots + a_m A^m \tag{3}$$

unde I este matricea unitate, $I = [\delta_{jk}]$, δ_{jk} fiind numerele lui Kronecker. Se poate defini și matricea inversă A^{-1} a matricii A dar numai dacă matricea A este nesingulară, adică dacă $|A| = \det A \neq 0$, proprietatea de definiție fiind $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; în acest caz, au sens și puterile negative ale lui A scriind $A^{-m} = (A^{-1})^m$, $m = 1, 2, \ldots$

Definiția 1. *Matricea rezolventă a matricii A, notată $R_z(A)$ este matricea inversă a matricii $(zI - A)$,* adică

$$R_z(A) = (zI - A)^{-1} \tag{4}$$

(dacă această matrice are sens) considerată ca aplicație $z \to R_z(A)$.

Observația 1. Matricea rezolventă $R_z(A)$ va avea sens numai pentru acei $z \in \mathbb{C}$ pentru care $\det (zI - A) \neq 0$; or cum $\det (zI - A)$ este o funcție polinom de grad n în z, numită *polinomul caracteristic* al matricii A, se deduce, notînd prin P polinomul caracteristic

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n =$$

$$= (z - \lambda_1)^{n_1} (z - \lambda_2)^{n_2} \ldots (z - \lambda_p)^{n_p} \tag{5}$$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$, că matricea $R_z(A)$ va exista pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$.

Definiția 2. *Numerele complexe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ definite mai sus vor constitui valorile (numerele) proprii ale matricii A, iar mulțimea lor va forma spectrul matricii A.*

Definiția 3. (*Dunford-Taylor*). *Matricea $f(A)$ se definește prin relația*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (zI - A)^{-1} f(z) \mathrm{d}z = \int_\gamma R_z(A) f(z) \, \mathrm{d}z, \tag{6}$$

unde f este olomorfă și γ este un contur simplu din $\mathbb{C}$ care conține la interior spectrul matricii A, dar nu conține singularități ale lui f.

Formula Dunford-Taylor este aplicabilă în următoarea condiție de bază : *Matricea $f(A)$ este definită dacă f este olomorfă în domeniul care conține punctele spectrului matricii A.* Ulterior se va putea elimina condiția de olomorfie.

Înainte de a trece la expunerea teoriei generale legată de formula Dunford-Taylor (6), vom considera cîteva exemple.

Exemple. 1. Fie A o matrice pătrată de ordinul doi, deci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ a_{11}, \ldots, a_{22} \in \mathbb{C}\ ;\ \text{atunci}\ \ zI - A = \begin{bmatrix} z - a_{11} & a_{12} \\ -a_{21} & z - a_{22} \end{bmatrix},$$

$$P(z) = \begin{vmatrix} z - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & z - a_{22} \end{vmatrix} = z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

iar

$$R_z(A) = \frac{1}{p(z)} \begin{bmatrix} z - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & z - a_{11} \end{bmatrix}.$$

Formula Dunford-Taylor se va scrie :

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Upsilon R_z(A) f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Upsilon \frac{f(z)}{P(z)} \begin{bmatrix} z - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & z - a_{11} \end{bmatrix} dz.$$

Cum $\int_\Upsilon [a_{jk}(z)]\, dz = \left[\int_\Upsilon a_{jk}(z)\, dz \right]$, avem în definitiv,

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} \int_\Upsilon (z - a_{22}) \frac{f(z)}{P(z)}\, dz & a_{12} \int_\Upsilon \frac{f(z)}{P(z)}\, dz \\ a_{21} \int_\Upsilon \frac{f(z)}{P(z)}\, dz & \int_\Upsilon (z - a_{11}) \frac{f(z)}{P(z)}\, dz \end{bmatrix} \tag{7}$$

și evident matricea $f(A)$ are sens, fiecare din cele patru integrale calculîndu-se cu ajutorul teoremei reziduurilor.

Pentru calculul efectiv al matricii (7) vom considera două cazuri :

i. Spectrul matricii A este format din puncte distincte : $P(z_1) = 0$, $P(z_2) = 0$, $z_1 \neq z_2$; rezultă

$$f(A) = \begin{bmatrix} \frac{(z_1 - a_{22}) f(z_1)}{P'(z_1)} + \frac{(z_2 - a_{22}) f(z_2)}{P'(z_2)} & a_{12} \frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + a_{12} \frac{f(z_2)}{P'(z_2)} \\ a_{21} \frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + a_{21} \frac{f(z_2)}{P'(z_2)} & \frac{z_1 - a_{11} f(z_1)}{P'(z_1)} + \frac{(z_2 - a_{11}) f(z_2)}{P'(z_2)} \end{bmatrix} =$$

$$= f(z_1)\begin{bmatrix} \dfrac{z_1 - a_{22}}{P'(z_1)} & \dfrac{a_{12}}{P'(z_1)} \\ \dfrac{a_{21}}{P'(z_1)} & \dfrac{z_1 - a_{11}}{P'(z_1)} \end{bmatrix} + f(z_2)\begin{bmatrix} \dfrac{z_2 - a_{22}}{P'(z_2)} & \dfrac{a_{12}}{P'(z_2)} \\ \dfrac{a_{21}}{P'(z_2)} & \dfrac{z_2 - a_{11}}{P'(z_2)} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

ii. Spectrul matricii A este dublu : $z_1 = z_2$; va rezulta

$$f(A) = \begin{bmatrix} [(z - a_{22})f(z)]'(z_1) & a_{12}f'(z_1) \\ a_{21}f'(z_1) & [(z - a_{11})f(z)]'(z_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f(z_1) + (z_1 - a_{22})f'(z_1) & a_{12}f'(z_1) \\ a_{21}f'(z_1) & f(z_1) + (z_1 - a_{11})f'(z_1) \end{bmatrix} = f(z_1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \tag{9}$$

$$+ f'(z_1)\begin{bmatrix} z_1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & z_1 - a_{11} \end{bmatrix}.$$

Se observă că în cazul i $f(A)$ se mai poate scrie

$$f(A) = f(z_1)Z_1 + f(z_2)Z_2,\ Z_j = \begin{bmatrix} \dfrac{z_j - a_{22}}{P'(z_j)} & \dfrac{a_{12}}{P'(z_j)} \\ \dfrac{a_{21}}{P'(z_j)} & \dfrac{z_j - a_{11}}{P'(z_j)} \end{bmatrix},\ j = 1, 2, \tag{8'}$$

unde Z_1, Z_2 sînt matrici pătrate de același ordin ca și A, care nu depind de f ci numai de matricea A ; de aceea, matricele Z_1 și Z_2 se pot determina particularizînd funcțiile f; de exemplu, luînd $f(z) = 1$ și $f(z) = z$ se deduce sistemul matriceal $Z_1 + Z_2 = I$, $z_1Z_1 + z_2Z_2 = A$, din care rezultă Z_1 și Z_2. Se mai observă că nu putem avea $Z_1 = 0$ sau $Z_2 = 0$. Este evident că $f(A)$ se va defini prin (8) numai dacă f este definită pe spectrul matricii A.

Aceleași observații sînt valabile și în cazul $z_1 = z_2$, cînd $f(A)$ este determinată prin (9) ; avem

$$f(A) = f(z_1)Z_1 + f'(z_1)Z_2,\ Z_1 = I,\ Z_2 = \begin{bmatrix} z_1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & z_1 - a_{11} \end{bmatrix}, \tag{9'}$$

matricile Z_1 și Z_2 depinzînd doar de matricea A (nu depind de f) și de aceea pot fi obținute direct particularizînd f în (9') (se poate lua iarăși $f(z) = 1$ respectiv $f(z) = z$), iar $f(A)$ poate fi definită prin (9') numai dacă este diferențiabilă în vecinătatea punctului z_1 (f putînd fi și cu valori reale, dacă $z_1 \in \mathbb{R}$). Dacă $z_1 = z_2$, se poate întîmpla ca matricea Z_2 să fie nulă ; în acest caz avem neapărat

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{C},\ \text{iar } f(A) = \begin{bmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(a) \end{bmatrix}.$$

2. Să presupunem A o matrice pătrată de ordinul trei, deci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

$$zI - A = \begin{bmatrix} z - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & z - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & z - a_{33} \end{bmatrix}, \quad R_z(A) = (zI - A)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{P(z)} \begin{bmatrix} z^2 - (a_{22} + a_{33})z + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{12}z + a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{13}z + a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{21}z + a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & z^2 - (a_{11} + a_{33})z + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{23}z + a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11} \\ a_{31}z + a_{21}a_{22} - a_{22}a_{31} & a_{32}z + a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{11} \end{bmatrix} \tag{10}$$

iar

$$P(z) = z^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})z^2 + (a_{11}a_{22} + a_{13}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21} -$$

$$- a_{23}a_{32})z + a_{13}a_{31}a_{22} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{23}a_{31}. \tag{10'}$$

Pentru matricea $f(A)$ se obține egalitatea

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Upsilon R_z(A) f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Upsilon \frac{f(z)}{P(z)} \begin{bmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) & p_{13}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) & p_{23}(z) \\ p_{31}(z) & p_{32}(z) & p_{33}(z) \end{bmatrix} dz \tag{11}$$

unde polinomul caracteristic P este definit prin (10'), iar polinoamele p_{jk} sînt determinate prin elementele matricii rezolvente $R_z(A)$ definită prin (10). Repetînd calculele de la exemplul 1, avem

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} \int_\Upsilon p_{11}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz & \int_\Upsilon p_{12}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz & \int_\Upsilon p_{13}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz \\ \int_\Upsilon p_{21}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz & \int_\Upsilon p_{22}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz & \int_\Upsilon p_{23}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz \\ \int_\Upsilon p_{31}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz & \int_\Upsilon P_{32}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz & \int_\Upsilon p_{33}(z) \frac{f(z)}{P(z)} dz \end{bmatrix} \tag{11'}$$

integralele din (11′) calculîndu-se cu ajutorul teoremei reziduurilor (ca de obicei, f nu are singularități în interiorul lui γ unde se vor afla punctele spectrului lui A).

Calculul efectiv al matricii din (11′) se realizează în trei cazuri :

i. Spectrul matricii A este format din trei puncte distincte z_1, z_2, z_3, $z_j \neq z_k$, $j \neq k$; conform teoremei reziduurilor, se deduce

$$f(A) = \begin{bmatrix} p_{11}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{11}(z_2)\frac{f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{11}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)} \\ p_{21}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{21}(z_2)\frac{f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{21}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)} \\ p_{31}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{31}(z_2)\frac{f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{31}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)} \end{bmatrix}$$

$$p_{12}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{12}(z_2)\frac{f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{12}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)}$$

$$p_{22}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{22}(z_2)\frac{f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{22}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)} \qquad (12')$$

$$p_{32}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{32}(z_2)\frac{(f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{32}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)}$$

$$\left.\begin{matrix} p_{13}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{13}(z_2)\frac{f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{13}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)} \\ p_{23}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{23}(z_2)\frac{f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{23}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)} \\ p_{33}(z_1)\frac{f(z_1)}{P'(z_1)} + p_{33}(z_2)\frac{f(z_2)}{P'(z_2)} + p_{33}(z_3)\frac{f(z_3)}{P'(z_3)} \end{matrix}\right] = f(z_1)Z_1 + f(z_2)Z_2 + f(z_3)Z_3,$$

unde matricile de ordinul al treilea Z_1, Z_2, Z_3 nu depind decît de matricea A :

$$Z_j = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}(z_j)}{P'(z_j)} & \frac{p_{12}(z_j)}{P'(z_j)} & \frac{p_{13}(z_j)}{P'(z_j)} \\ \frac{p_{21}(z_j)}{P'(z_j)} & \frac{p_{22}(z_j)}{P'(z_j)} & \frac{p_{23}(z_j)}{P'(z_j)} \\ \frac{p_{31}(z_j)}{P'(z_j)} & \frac{p_{32}(z_j)}{P'(z_j)} & \frac{p_{33}(z_j)}{P'(z_j)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3 \ldots \qquad (12')$$

ii. O valoare proprie a matricii A este dublă : $z_1 = z_2$, iar $z_3 \neq z_1$; în acest caz tot teorema reziduurilor conduce la formula

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(z_1)\dfrac{(z_1-z_2)p'_{11}(z_1)-p_{11}(z_1)}{(z_1-z_2)^2} + f'(z_1)\dfrac{p_{11}(z_1)}{z_1-z_2} + f(z_2)\dfrac{p_{11}(z_2)}{P'(z_2)} & * & * \\ f(z_1)\dfrac{(z_1-z_2)p'_{21}(z_1)-p_{21}(z_1)}{(z_1-z_2)^2} + f'(z_1)\dfrac{p_{21}(z_1)}{z_1-z_2} + f(z_2)\dfrac{p_{21}(z_2)}{P'(z_2)} & * & * \\ f(z_1)\dfrac{(z_1-z_2)p'_{31}(z)-p_{31}(z)}{(z_1-z_2)^2} + f'(z_1)\dfrac{p_{31}(z_1)}{z_1-z_2} + f(z_2)\dfrac{p_{31}(z_2)}{P'(z_2)} & * & * \end{bmatrix} \tag{13}$$

termenii notați prin* din ultima matrice fiind asemănători celor scriși, dar cu schimbarea indicilor polinoamelor p_{jk}. Din (13) se deduce posibilitatea scrierii matricii $f(A)$ sub forma

$$f(A) = f(z_1)Z_{10} + f'(z_1)Z_{11} + f(z_2)Z_2 \tag{13'}$$

în care matricile Z_{10}, Z_{11} și Z_2 sînt de același ordin cu matricea A și nu depind decît de această matrice (nu depinde de f).

iii. Spectrul matriii A este triplu, adică polinomul caracteristic (10′) se scrie $P(z) = (z - z_1)^3$; matricea $f(A)$ va avea forma simplă

$$f(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(p_{11}f)''(z_1) & \frac{1}{2}(p_{12}f)''(z_1) & \frac{1}{2}(p_{13}f)''(z_1) \\ \frac{1}{2}(p_{21}f)''(z_1) & \frac{1}{2}(p_{22}f)''(z_1) & \frac{1}{2}(p_{23}f)''(z_1) \\ \frac{1}{2}(p_{31}f)''(z_1) & \frac{1}{2}(p_{31}f)''(z_1) & \frac{1}{2}(p_{33}f)''(z_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p''_{11}(z_1) & p''_{12}(z_1) & p''_{13}(z_1) \\ p''_{21}(z_1) & p''_{22}(z_1) & p''_{23}(z_1) \\ p''_{31}(z_1) & p''_{32}(z_1) & p''_{33}(z_1) \end{bmatrix} f(z_1) + \begin{bmatrix} p'_{11}(z_1) & p'_{12}(z_1) & p'_{13}(z_1) \\ p'_{21}(z_1) & p'_{22}(z_1) & p'_{23}(z_1) \\ p'_{31}(z_1) & p'_{32}(z_1) & p'_{33}(z_1) \end{bmatrix} f'(z_1) = \tag{14}$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_{11}(z_1) & p_{12}(z_1) & p_{13}(z_1) \\ p_{21}(z_1) & p_{22}(z_1) & p_{23}(z_1) \\ p_{31}(z_1) & p_{32}(z_1) & p_{33}(z_1) \end{bmatrix} f''(z_1) = f(z_1)Z_{10} + f'(z_1)Z_{11} + f''(z_1)Z_{12},$$

unde ca și pînă acum matricele de ordinul trei Z_{10}, Z_{11}, Z_{12} nu vor depinde decît de matricea A, nu și de f, iar din (10) se observă că

$$Z_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

deoarece $\deg p_{jj} = 2$, $\deg p_{jk} \leqslant 1$, dacă $j \neq k$, $j, k = 1, 2, 3$.

Evident, pentru construcția matricii $f(A)$ se pot folosi formulele (10)—(14) sau se pot determina matricele Z prin particularizarea lui f (așa cum s-a procedat la exemplul 1, luînd, de exemplu $f(z) = 1, z, z^2$ respectiv). De remarcat că în cazul formulei (10) toate matricile Z_1, Z_2, Z_3 sînt nenule, pe cînd în cazul formulei (13′) putem avea $Z_{11} = 0$ (dar $Z_{10} \neq 0$, $Z_2 \neq 0$), iar în cazul formulei (14) neapărat $Z_{10} \neq 0$, dar matricele Z_{11}, Z_{12} pot fi nule ; aceste circumstanțe vor fi lămurite în cazul general care va fi tratat în continuare.

3. Fie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; valorile proprii fiind $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, din (8) rezultă

$$f(A) = f(1)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + f(3)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} f(1)+f(3) & -f(1)+f(3) \\ -f(1)+f(3) & f(1)+f(3) \end{bmatrix}.$$

În particular

$$e^A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e+e^3 & -e+e^3 \\ -e+e^3 & e+e^3 \end{bmatrix} \quad A^{998} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+998^3 & -1+998^3 \\ -1+998^3 & 1+998^3 \end{bmatrix},$$

$$\ln A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \ln 3 & \ln 3 \\ \ln 3 & \ln 3 \end{bmatrix}$$

4. Dacă $a \in \mathbb{R}$ să calculăm $\lim\limits_{n \to \infty} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^n$.

Luînd $\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}$ rezultă $P(z) = z^2 - 2z + 1 + \frac{a^2}{n^2}$, $z_1 = 1 - i\frac{a}{n}$, $z_2 = 1 + i\frac{a}{n}$, iar formula (8) pentru $f(z) = z^n$ conduce la

$$A^n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{ia}{n}\right)^n \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ia}{n}\right)^n \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} e^{-ia}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{ia}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Deci $\lim\limits_{n \to \infty} A^n = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix}$.

Conform regulei de calcul a matricii inverse, matricea $R_z(A)$ va avea elementele funcții raționale de variabila complexă z,

$$R_z = [r_{jk}(z)] = \frac{B(z)}{P(z)}, \quad r_{jk}(z) = \frac{p_{jk}(z)}{P(z)}, \tag{15}$$

unde p_{jk} este o funcție polinomială de grad cel mult $n-1$ (este minorul normalizat al elementului aflat în linia k și coloana j din matricea $zI - A$), polinomul P este polinomul caracteristic al matricii A, iar B este matricea $[p_{jk}(z)]$.

Exemplul 5. Presupunînd

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ atunci } zI - A = \begin{bmatrix} z-3 & 1 & -1 \\ 1 & z-5 & 1 \\ -1 & 1 & z-3 \end{bmatrix},$$

iar $P(z) = z^3 - 11z^2 + 36z - 36$, spectrul matricii A fiind $\{2, 3, 6\}$; se deduce

$$R_z(A) = (zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z^2-8z+14}{P(z)} & -\frac{z-2}{P(z)} & \frac{z-4}{P(z)} \\ -\frac{z-2}{P(z)} & \frac{z^2-6z+8}{P(z)} & -\frac{z-2}{P(z)} \\ \frac{z-4}{P(z)} & -\frac{z-2}{P(z)} & \frac{z^2-8z+14}{P(z)} \end{bmatrix} = \frac{B(z)}{P(z)}$$

cu

$$B(z) = \begin{bmatrix} z^2-8z+14 & -z+2 & z-4 \\ -z+2 & z^2-6z+8 & -z+2 \\ z-4 & -z+2 & z^2-8z+14 \end{bmatrix}. \quad \bullet$$

Scriind polinomul caracteristic P și matricea B sub forma

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1}z + p_n, \tag{16}$$

$$B(z) = B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \ldots + B_{n-1}z + B_n \tag{16'}$$

cu $p_j \in \mathbb{C}$, $B_j \in \mathfrak{M}_n$*), $j = 1, 2, \ldots, n$; deoarece $R_z(A) = \dfrac{B(z)}{P(z)}$ are loc egalitatea $P(z)R_z(A) = B(z)$ din care, prin înmulțire la stînga cu $(zI - A)$ se obține

$$P(z)I = (zI - A)B(z);$$

*) $\mathfrak{M}_n$ este mulțimea matricilor pătrate de ordin n

înlocuind P și B prin (16), (16′) și egalînd coeficienții acelorași puteri ale lui z se deduc egalitățile

$$B_1 = I,\ B_j - AB_{j-1} = p_{j-1}I,\ j = 2, 3, \ldots, n,\quad -AB_n = p_nI$$

din care rezultă

$$B_1 = I,\ B_2 = A + p_1I,\ B_3 = A^2 + p_1A + p_2I,\ B_4 = \\ = A^3 + p_1A^2 + p_2A + p_3I, \ldots$$

Aceste egalități permit determinarea matricii $R_z(A)$ cu ajutorul coeficienților polinomului caracteristic și al puterilor succesive ale matricii A. În acest mod, înlocuind matricile $B_1, B_2, \ldots$ se găsește o nouă formă a matricii B:

$$B(z) = b_0(z)I + b_1(z)A + \ldots + b_{n-1}(z)A^{n-1} \qquad (16'')$$

unde $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sînt funcții polinomiale de grad cel mult $n-1$, $n-2, \ldots, 0$ respectiv.

Exemple 6. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ avem } zI - A = \begin{bmatrix} z & -1 & -1 \\ -1 & z & -1 \\ -1 & -1 & z \end{bmatrix},$$

iar $P(z) = z^3 - 3z - 2$, spectrul acestei matrici fiind $\{-1, 2\}$; deoarece

$$B(z) = B_1z^2 + B_2z + B_3,$$

cum

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

găsim ($p_1 = 0,\ p_2 = -3,\ p_3 = -2$).

$$B_1 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 = A^2 - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

și deci

$$B(z) = \begin{bmatrix} z^2 - 1 & z + 1 & z + 1 \\ z + 1 & z^2 - 1 & z + 1 \\ z + 1 & z + 1 & z^2 - 1 \end{bmatrix}$$

dică

$$R_z(A) = \frac{B(z)}{P(z)} = \begin{bmatrix} \frac{z^2-1}{P(z)} & \frac{z+1}{P(z)} & \frac{z+1}{P(z)} \\ \frac{z+1}{P(z)} & \frac{z^2-1}{P(z)} & \frac{z+1}{P(z)} \\ \frac{z+1}{P(z)} & \frac{z+1}{P(z)} & \frac{z^2-1}{P(z)} \end{bmatrix}$$

Definiția 4. *Dacă polinomul caracteristic $P(z)$ și matricea $B(z)$ sînt astfel încît au loc egalitățile*

$$P(z) = Q(z)P^*(z), \quad B(z) = Q(z)B^*(z) \tag{17}$$

unde Q este o funcție polinomială de grad $\geqslant 1$, iar P^* și elementele $p_{jk}(z)$ ale matricii $B(z)$ nu au divizori comuni de grad $\geqslant 1$ atunci funcția P^* se numește polinomul minimal al matricii A, iar matricea rezolventă se poate scrie sub forma

$$R_z(A) = \frac{B^*(z)}{P^*(z)}. \tag{17'}$$

Dacă $Q(z) = 1$, polinomul minimal coincide cu polinomul caracteristic (ceea ce se întîmplă, de exemplu, dacă valorile proprii ale matricii A sînt simple); în exemplul 5 evident $Q(z) = 1$, iar în exemplul 6 deoarece

$$P(z) = (z+1)^2(z-2), \quad B(z) = (z+1)B^*(z),$$

$$B^*(z) = \begin{bmatrix} z-1 & 1 & 1 \\ 1 & z-1 & 1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{bmatrix}$$

rezultă $Q(z) = z+1$, iar polinomul minimal $P^*(z)$ și matricea $B^*(z)$ vor fi

$$P^*(z) = (z+1)(z-2) = z^2 - z - 2, \quad B^*(z) = \frac{B(z)}{z+1}.$$

Din formula Dunford-Taylor (6) rezultă cîteva consecințe pentru funcțiile de matricea A:

Consecința 1. $P(A) = 0$, *adică orice matrice își anulează propriul său polinom minimal.*

Într-adevăr, deoarece $R_z(A) = \dfrac{B^*(z)}{P^*(z)}$, înlocuind în (6) f prin P^* (posibil deoarece P^* este diferențiabil în $\mathbb{C}$), găsim

$$P^*(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon \frac{B^*(z)}{P^*(z)}\,P^*(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon B^*(z)\,dz = 0$$

(ultima integrală este nulă, deoarece B^* este un polinom matriceal în variabila z, deci este funcție omolorfă în $\mathbb{C}$:

$$\int_\Upsilon B^*(z)\,dz = I\int_\Upsilon b_0(z)\,dz + A\int_\Upsilon b_1(z)\,dz + \ldots + A^{n-1}\int_\Upsilon b_{n-1}(z)\,dz = 0$$

$b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ fiind polinoame).

Deoarece $P(z) = Q(z)P^*(z)$, din $P^*(A) = 0$ se deduce $P(A) = Q(A)P^*(A) = 0$ și astfel s-a obținut teorema Hamilton-Cayley: *Orice matrice A anulează polinimul caracteristic al acestei matrici.*

Consecința 2. *Pentru orice funcție diferențiabilă f matricea $f(A)$ este de fapt un polinom în matricea A (avînd gradul cel mult egal cu deg P^*).*

Într-adevăr, înlocuind B în expresia lu $R_z(A)$ prin expresia sa din (16′′) se deduce

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon \left[\sum_{j=0}^{n-1} b_j(z)A^j\right]\frac{1}{P(z)}\,f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{n-1} A^j\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon \frac{b_j(z)}{P(z)}\,f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{n-1} c_j A_j,$$

$$c_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\Upsilon \frac{b_j(z)}{P(z)}\,f(z)\,dz;$$

menționăm că dacă polinomul minimal nu coincide cu polinomul caracteristic, atunci în loc de matericea B apare matricea B^* care se va exprima cu ajutorul coeficienților polinomului minimal P^* și a puterilor $A^0, A^1, \ldots, A^{m-1}$, $m = \deg P^*$, exact la fel ca și matricea B, deoarece are loc identitatea

$$P^*(z)I = (zI - A)B^*(z)$$

și deci în suma

$$f(A) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j A_j$$

trebuie înlocuit n prin m, iar $c_0, c_1, \ldots, c_m$ prin coeficienții corespunzători.

Rezultă așadar că este suficient că găsim coeficienții polinomului matricial B (respectiv B^*) pentru ca să putem obține matri-

cea $f(A)$; acești coeficienți însă sînt greu de calculat cu ajutorul integralelor care apar în difiniție și de aceea se pot imagina metode directe, legate de funcția f și de valorile proprii ale matricii A, utilizînd ideile din exemplele 1 și 2 precum și polinomul de interpolare Lagrange (dacă spectrul matricii A este simplu) sau polinomul de interpolare Hermite în caz contrar (vezi A.M. cap. 0, punctul 8).

Astfel, fie L polinomul de interpolare Lagrange definit prin

$$L(\lambda_j) = f(\lambda_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{18}$$

dacă valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricii A sînt simple; deoarece diferența $f(z) - L(z)$ se divide prin $z - \lambda_1, \ldots, z - \lambda_n$, ea se va divide și prin polinomul caracteristic $P(z)$, deci

$$f(z) - L(z) = \alpha(z)P(z),$$

α fiind o funcție olomorfă în aceleași condiții ca și f; din teorema Hamilton-Cayley se deduce $P(A) = 0$ și deci egalitatea anterioară devine

$$f(A) = L(A) \tag{18'}$$

Așadar, funcția $f(A)$ coincide cu polinomul $L(A)$, L fiind polinomu Lagrange de interpolare construit prin condițiile (18).

Dacă polinomul minimal al matricii A nu coincide cu polinomul caracteristic, dar are zerourile simple, atunci polinomul de interpolare Lagrange se determină tot din condițiile (18) dar în număr de $m < n$ (deci acest polinom va avea gradul $m - 1$).

Dacă polinomul minimal se scrie

$$P_1(z) = (z - \lambda_1)^{m_1}(z - \lambda_2)^{m_2} \ldots (z - \lambda_q)^{m_q}, \; m_1 + m_2 + \ldots +$$

$$+ m_q = m < n$$

condițiile (18) se înlocuiesc prin condițiile

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}z^j} L(z)\Big|_{z=\lambda_k} = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}z^j} f(z)\Big|_{z=\lambda_k}, \quad \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, m_k - 1 \\ k = 1, 2, \ldots, q \end{matrix} \tag{18''}$$

construindu-se astfel polinomul de interpolare Hermite.

Exemple 7. Reluînd exemplul 5 de mai sus, avem $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$; p inomul Lagrange de interpolare se scrie

$$L(z) = \frac{(z-3)(z-6)}{(2-3)(2-6)} f(2) + \frac{(z-2)(z-6)}{(3-2)(3-6)} f(3) + \frac{(z-2)(z-3)}{(6-2)(6-3)} f(6) =$$

$$= \frac{1}{4}(z-3)(z-6)f(2) - \frac{1}{3}(z-2)(z-6)f(3) + \frac{1}{12}(z-2)(z-3)f(6),$$

iar

$$f(A) = L(A) = \frac{f(2)}{4}(A - 3I)(A - 6I) - \frac{f(3)}{3}(A - 2I)(A - 6I) +$$

$$+ \frac{f(6)}{12}(A - 2I)(A - 3I) = \frac{1}{12}[3f(2) - 4f(3) + f(6)]A^2 +$$

$$+ \frac{1}{12}[-27f(2) + 32f(3) - 5f(6)]A + \frac{1}{2}[9f(2) - 8f(3) + f(6)]I.$$

Deoarece

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 7 \\ -9 & 27 & -9 \\ 7 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

se deduce

$$f(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{3}f(3) + \frac{1}{6}f(6) & \frac{1}{3}f(3) - \frac{1}{3}f(6) & -\frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{3}f(3) + \frac{1}{6}f(6) \\ \frac{1}{3}f(3) - \frac{1}{3}f(6) & -\frac{27}{2}f(2) + \frac{55}{3}f(3) - \frac{23}{6}f(6) & \frac{1}{3}f(3) - \frac{1}{3}f(6) \\ -\frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{3}f(3) + \frac{1}{6}f(6) & \frac{1}{3}f(3) - \frac{1}{2}f(6) & \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{3}f(3) + \frac{1}{6}f(6) \end{bmatrix}.$$

În particular

$$\exp(A) = \exp\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{6}e^6 & \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}e^6 & -\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{6}e^6 \\ \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}e^6 & -\frac{27}{2}e^2 + \frac{55}{3}e^3 - \frac{23}{6}e^6 & \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}e^6 \\ -\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{6}e^6 & \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}e^6 & \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{6}e^6 \end{bmatrix}$$

$$\sin(A) = \sin\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{6}\sin(6) & \frac{1}{3}\sin(3) - \frac{1}{3}\sin(6) & -\frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{6}\sin(6) \\ \frac{1}{3}\sin(3) - \frac{1}{3}\sin(6) & -\frac{27}{2}\sin(2) + \frac{55}{3}\sin(3) - \frac{23}{6}\sin(6) & \frac{1}{3}\sin(3) - \frac{1}{3}\sin(6) \\ -\frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{6}\sin(6) & \frac{1}{3}\sin(3) - \frac{1}{3}\sin(6) & \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{6}\sin(6) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{6}\sin(6) \\ \frac{1}{3}\sin(3) - \frac{1}{3}\sin(6) \\ \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{3}\sin(3) + \frac{1}{6}\sin(6) \end{bmatrix}$$

8. În exemplul 6 tratat anterior, avem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

și polinomul minimal este $P^*(z) = (z+1)(z-2)$; polinomul de interpolarea Lagrange pentru f va fi

$$L(z) = \frac{z-2}{1-2} f(-1) + \frac{z+1}{2+1} f(2) = \frac{1}{3}(z+1)f(2) - (z-2)f(-1),$$

iar

$$f(A) = L(A) = \frac{1}{3}(A+I)f(2) - (A-2I)f(-1) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}[f(2)+2f(-1)] & \frac{1}{3}[f(2)-f(-1)] & \frac{1}{3}[f(2)-f(-1)] \\ \frac{1}{3}[f(2)-f(-1)] & \frac{1}{3}[f(2)+2f(-1)] & \frac{1}{3}[f(2)-f(-1)] \\ \frac{1}{3}[f(2)-f(-1)] & \frac{1}{3}[f(2)-f(-1)] & \frac{1}{3}[f(2)+2f(-1)] \end{bmatrix}.$$

În particular

$$\operatorname{sh}(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) - 2\operatorname{sh}(1)] & \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) + \operatorname{sh}(1)] & \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) + \operatorname{sh}(1)] \\ \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) + \operatorname{sh}(1)] & \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) - 2\operatorname{sh}(1)] & \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) + \operatorname{sh}(1)] \\ \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) + \operatorname{sh}(1)] & \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) + \operatorname{sh}(1)] & \frac{1}{3}[\operatorname{sh}(2) - 2\operatorname{sh}(1)] \end{bmatrix}$$

$$\cos(A) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}[\cos(2) + 2\cos(1)] & \frac{1}{3}[\cos(2) - \cos(1)] & \frac{1}{3}[\cos(2) - \cos(1)] \\ \frac{1}{3}[\cos(2) - \cos(1)] & \frac{1}{3}[\cos(2) + 2\cos(1)] & \frac{1}{3}[\cos(2) - \cos(1)] \\ \frac{1}{3}[\cos(2) - \cos(1)] & \frac{1}{3}[\cos(2) - \cos(1)] & \frac{1}{3}[\cos(2) + 2\cos(1)] \end{bmatrix}.$$

În considerațiile anterioare s-a presupus f olomorfă în domeniul D care conține spectrul matricii A; treptat, s-a ajuns la egalitatea (18′) care definește $f(A)$ cu ajutorul polinomului de interpolare Lagrange sau Hermite; or aceste polinoame pot fi construite pentru orice funcție f definită pe spectrul matricii A și de aceea egalitatea (18′) constituie definiția generală a matricii $f(A)$.

Observația 2. *Din relația de definiție a matricii* $f(A)$

$$f(A) = \sum_{j=0}^{q} \frac{(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_{j-1} I)(A - \lambda_{j-1} I) \dots (A - \lambda_q I)}{(\lambda_j - \lambda_1) \dots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \dots (\lambda_j - \lambda_q)} f(\lambda_j)$$

se poate deduce faptul că această matrice se poate scrie și sub forma

$$f(A) = \sum_{j=1}^{q} Z_j f(\lambda_j) \tag{19}$$

unde $Z_j \in \mathfrak{M}_n$ *nu depind de funcția* f; evident, ne aflăm în ipoteza că polinomul minimal P^* admite zerourile simple distincte $\lambda_1, \dots, \lambda_q$.

Egalitatea (19) este uneori comodă pentru calculul efectiv al matricii $f(A)$: deoarece matricile $Z_1, \dots, Z_q$ nu depind de f, acestea se pot determina prin particularizarea lui f, după modelul din exemplul de mai jos.

Exemplul 9. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

avem $P(z) = \det(zI - A) = z^3 - 7z - 6 = (z+1)(z+2)(z-3)$; deci $P^* = P$, iar (18) se scrie

$$f(A) = Z_1 f(-2) + Z_2 f(-1) + Z_3 f(3).$$

Punînd succesiv $f(z) = z - 3$, $f(z) = z + 1$, $f(z) = (z+2)^2$, se deduc egalitățile matriceale

$$A - 3I = -5Z_1 - 4Z_2$$
$$A + I = -Z_1 + 4Z_3$$
$$(A + 2I)^2 = Z_2 + 25\,Z_3$$

din care rezultă

$$Z_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = -\frac{5}{4}Z_1 - \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}I = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_3 = \frac{1}{4}Z_1 + A + I = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Observația 3. În cazul în care polinomul minimal are zerouri multiple, atunci condițiile (18″) pot fi utilizate pentru determinarea polinomului de interpolare Hermite care se scrie sub forma

$$L(z) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=0}^{m_k - 1} f_k^j \omega_j^k(z)$$

unde f_k^j sînt valorile derivatei $f^{(j)}$ în punctul λ_k, iar ω_j^k sînt polinoame independente de funcția f, care se determină din condițiile

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}z^l}\,\omega_j^k(\lambda_s) = \delta_{lk}\delta_{js}$$

δ_{m_k} fiind numerele lui Kronecker; cel mai simplu exemplu de polinom de interpolare Hermite se obține cînd $q = 1$ și atunci el coincide cu dezvoltarea Taylor

$$L(z) = F(\lambda_1) + \frac{z - \lambda_1}{1!} f(\lambda_1) + \ldots + \frac{(z - \lambda_1)^{m_1 - 1}}{(m_1 - 1)!} f^{(m_1 - 1)}(\lambda_1).$$

Ca și în cazul spectrului simplu, ținînd cont de independența polinoamelor ω_j^k de funcția f, se poate scrie matricea $f(A)$ sub forma.

$$f(A) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=0}^{m_k - 1} f_k^j Z_{kj},$$

unde matricele $Z_{kj} \in \mathfrak{M}_n$ se pot determina particularizîndu-l pe f.

Exemplul 10. Dacă matricea A este astfel încît polinomul ei minimal este

$$p^*(z) = z^2(z - 1)$$

atunci

$$f(A) = f(0)Z_1 + f'(0)Z_2 + f(1)Z_3$$

și scriind succesiv $f(z) = z$, $f(z) = z^2$, $f(z) = z - 1$, din sistemul

$$A = Z_2 + Z_3,\ A^2 = Z_3,\ A - I = -Z_1 + Z_2$$

se obține

$$Z_1 = I - A^2,\ Z_2 = A - A^2,\ Z_3 = A^2$$

și deci

$$f(A) = (I - A^2)f(0) + f'(0)(A - A^2) + f(1)A^2.$$

Dacă matricea A va fi de forma

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -4 & -1 & 3 \\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

avem

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

se găsește

$$f(A)=\begin{bmatrix} -f(0)+\frac{3}{2}f'(0)+2f(1) & f'(0) & -8f(0)-\frac{21}{2}f'(0)+8f(1) \\ \frac{5}{2}f(0)-\frac{3}{2}f'(0)-\frac{5}{2}f(1) & f(0)-f'(0) & -\frac{5}{2}f(0)+\frac{1}{2}f'(0)+\frac{5}{2}f(1) \\ -f(0)+\frac{3}{2}f'(0)+f(1) & f'(0) & 2f(0)-\frac{1}{2}f'(0)+f(1) \end{bmatrix}.$$

În particular

$$(x+2)^A=(x+2)\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -4 & -1 & 3 \\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 & -\frac{5}{2} \\ -4 & -1 & 3 \\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 5+\frac{3}{2}\ln 2 & \ln 2 & 16-\frac{21}{2}\ln 2 \\ -5-\frac{3}{2}\ln 2 & 1-\ln 2 & 5+\frac{1}{2}\ln 2 \\ 2+\frac{3}{2}\ln 2 & \ln 2 & 5-\frac{1}{2}\ln 2 \end{bmatrix}.$$

Și în acest caz (al spectrului multiplu) nu este obligatorie condiția de diferențiabilitate pentru f decît numai în vecinătatea punctelor în care polinomul minimal al matricii A are zerouri multiple.

În concluzie, pentru orice funcție f definită pe spectrul matricii A (dacă polinomul minimal al matricii A are numai zerouri simple) sau pentru orice funcție f care admite derivate în număr convenabil pentru a se putea utiliza relațiile (18″) (în cazul în care zerourile polinomului minimal sînt multiple), se poate construi matricea $f(A)$.

Aceste rezultate vor fi utile în capitolul V la studiul ecuațiilor și sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți (sau care se reduc la acestea).

8. Funcția gamma în $\mathbb{C}$

În $\mathbb{R}$, funcția gamma este definită prin integrala improprie cu parametru

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt,\quad x>0 \tag{1}$$

ceea ce face, în mod natural, ca în $\mathbb{C}$ funcția gamma să fie definită prin integrala

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{2}$$

Integrala din (2) este uniform convergentă pentru orice z cu $\operatorname{Re} z > 0$ (vezi punctul 2).

De aceea, toate rezultatele deduse pentru funcția gamma în $\mathbb{R}$ vor rămîne valabile și în $\mathbb{C}$; astfel este valabilă relația funcțională

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \text{ pentru } z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\} \tag{3}$$

și egalitatea

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)},\ n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\} \tag{3'}$$

care este o consecință directă a relației (3).

Din (3') se deduce

$$\operatorname{Res}(\Gamma; -k) = \lim_{z \to -k} (z+k)\,\Gamma(z) =$$

$$= \lim_{z \to -k} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+k-1)(z+k+1)\ldots(z+n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(n-k+1)}{(-1)^k k!\,(n-k)!} = \frac{(-1)^k}{k!},$$

deci reziduul funcției Γ în polul simplu $z = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ este nenul. În plus, avem formula lui Gauss

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \tag{4}$$

care se obține scriind

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) t^{z-1}\, dt$$

și integrînd prin părți ultima integrală, după efectuarea schimbării de variabilă $t \to ns$, $dt = n\,ds$.

Din formula lui Gauss (4) se deduce formula lui Weierstrass pentru funcția Γ și anume

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right), \tag{5}$$

deoarece avem

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma z} n!\, e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}}{z(z+1)\ldots(z+n)} =$$

$$= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1\cdot e^{\frac{z}{1}}}{z+1}\right)\left(\frac{2\cdot e^{\frac{z}{2}}}{z+2}\right)\cdots\left(\frac{n\, e^{\frac{z}{n}}}{z+n}\right)\right] = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{k}}}{1+\frac{z}{k}}.$$

Formula (5) poartă numele de *dezvoltarea în produs infinit a funcției gamma.*

De asemenea, pentru $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ este valabilă egalitatea

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{6}$$

Într-adevăr, egalitatea (6) este adevărată pentru $z = x \in]0, 1[$ și deci va rămîne valabilă peste tot unde funcțiile care apar în această egalitate sînt olomorfe; or funcția $\Gamma(z)$ este olomorfă în $\mathbb{C}\setminus\{0, -1, -2, \ldots\}$, $\Gamma(1-z)$ este olomorfă în $\mathbb{C}\setminus\{1, 2, 3, \ldots\}$, deci $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ va fi o funcție olomorfă în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, iar funcția $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ va fi de asemenea olomorfă în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Fie acum $g(z, t) = e^{-t}t^{z-1}$ și integrala

$$f(z) = \int_{\gamma} g(z, t)\,dt = \int_{\gamma} e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

γ fiind conturul din fig. III.7a, parcurs în sensul indicat de săgeți. Deoarece pe γ g verifică ipotezele din teorema 1, va rezulta f funcție olomorfă în $\mathbb{C}$. Să deformăm acum γ în conturul γ_1 din fig. III.7b,

cu $\delta > 0$ mic; deoarece g rămîne olomorfă în domeniul cuprins între γ și γ_1, vom avea

$$f(z) = \int_{\gamma_1} e^{-t} t^{z-1}\, dt = \int_{\infty}^{\delta} e^{-t} t^{z-1}\, dt + \int_{|t|=\delta} e^{-t} t^{z-1} dt +$$

$$+ \int_{\delta}^{\infty} e^{-te^{2\pi i}} (t\, e^{2\pi i})^{z-1}\, d(t\, e^{2\pi i})$$

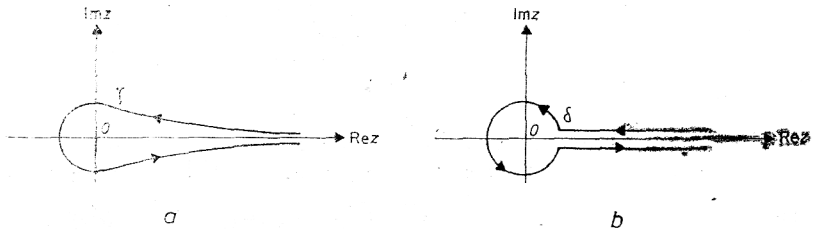

Fig. III.7

(s-a ținut cont că prin ocolirea originii argumentul lui t crește cu 2π deci dacă pe partea superioară a porțiunii rectilinii a conturului γ_1 variabila este t, pe partea rectilinie inferioară a aceluiași contur variabila va fi $te^{2\pi i}$). Rezultă

$$f(z) = \int_{|t|=\delta} e^{-t} t^{z-1}\, dt + \int_{\delta}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} (e^{2\pi z i} - 1)\, dt \tag{7}$$

Or, dacă $\operatorname{Re} z > 0$, vom avea

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{|t|=\delta} e^{-t} t^{z-1}\, dt = \lim_{\delta \to 0} i \int_{0}^{2\pi} e^{\delta e^{i\varphi}} (\delta\, e^{i\varphi})^{z-1} \delta\, e^{i\varphi}\, d\varphi =$$

$$= i \lim_{\delta \to 0} \delta^{z} \int_{0}^{2\pi} e^{\delta e^{i\varphi}} e^{iz\varphi}\, d\varphi = 0$$

(integrala fiind finită, integrandul corespunzător fiind o funcție continuă). Prin urmare, din (7), pentru $\operatorname{Re} z > 0$, se deduce, cînd $\delta \to 0$, egalitatea

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt = \frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1} = \frac{e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} f(z) = \frac{(-1)^z}{2 \operatorname{isin} (\pi z)} f(z)$$

adică

$$\Gamma(z) = \frac{-1}{2i \sin(\pi z)} \int_{\gamma} e^{-t}(-t)^{z-1}\, dt = \frac{1}{2i \sin(\pi z)} \int_{\gamma^*} e^t t^{z-1}\, dt \quad (7')$$

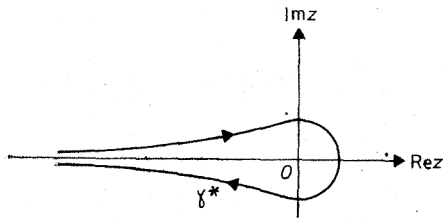

Fig. III.8

unde γ^* este conturul simetric față de origine al conturului γ (deoarece s-a efectuat transformarea $t \to -t$, vezi fig. III.8). În baza relației (6) se deduce $\Gamma(z) \sin(\pi z) = \frac{\pi}{\Gamma(1-z)}$, din (7') rezultînd

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^*} e^t t^{z-1}\, dt$$

sau, scriind z în loc de $1-z$, se obține reprezentarea sub formă integrală a funcției $\frac{1}{\Gamma}$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^*} e^t t^{-z}\, dt.$$

Observația 2. Conturul γ din fig. III.7a s-a ales avîndu-se în vedere proprietățile integrandului $g(z, t) = e^{-t}t^{z-1}$; acesta tinde la zero uniform cînd $t \to \infty$ în direcția pozitivă a axei reale (datorită prezenței termenului e^{-t}) oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, dar integrala $\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ care este improprie, nu converge decît dacă $\operatorname{Re} z > 0$.

De asemenea, pe conturul γ^* din fig. III.8 integrala $\int_{\gamma^*} e^t t^{-z}\, dt$ este uniform convergentă pentru $z \in \mathbb{C}$ și va defini o funcție olomorfă în $\mathbb{C}$; așadar funcția $\frac{1}{\Gamma}$ este o funcție întreagă.

ORTOGONALIZARE. TRANSFORMĂRI INTEGRALE

1. Baze în spații Hilbert

Rezultatele care vor fi prezentate aici constituie și o continuare a celor prezentate la Cap. I, punctul 6.

După cum se cunoaște (vezi A.M. cap. II, punctul 1) prin spațiu prehilbertian se înțelege un spațiu vectorial X (real sau complex) înzestrat cu produs scalar ; produsul scalar este o aplicație $P : X \times X \to \mathbb{R}$ (dacă X este spațiu vectorial real) sau $P : X \times X \to \mathbb{C}$ (dacă X este spațiu vectorial complex) notată prin $P(f, g) = (f, g)$, $f, g \in X$, care verifică patru axiome. Din aceste axiome rezultă regula de calcul

$$\left(\sum_{j=1}^{p} a_j f_j, \sum_{k=1}^{q} b_k g_k \right) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_j b_k (f_j, g_k),\ p, q \in \mathbb{N},\ a_j, b_k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

(dacă X este complex (1) se transcrie

$$\left(\sum_{j=1}^{p} a_j f_j, \sum_{k=1}^{q} b_k g_k \right) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_j \bar{b}_k (f_j, g_k),\ p, q \in \mathbb{N},\ a_j, b_k \in \mathbb{C}), \quad (1')$$

precum și inegalitatea lui Schwartz

$$|(f, g)| \leqslant \sqrt{(f, f)}\ \sqrt{(g, g)}. \quad (2)$$

Se arată că aplicația $N : X \to \mathbb{R}$, $N(f) = \|f\| = \sqrt{(f, f)}$ este o normă pe X și deci (2) se transcrie :

$$|(f, g)| \leqslant \|f\|\ \|g\| \quad (2')$$

Orice spațiu prehilbertian este un spațiu vectorial normat particular, deci X este un caz particular de spațiu metric, distanța dintre punctele $f, g \in X$ putînd fi definită prin $d(f, g) = \|f - g\|$. Dacă în plus X este complet în raport cu această distanță atunci X se va numi spațiu Hilbert și vom conveni să notăm prin H un astfel de spațiu ; așadar

Definiția 1. *Prin spațiu Hilbert H vom înțelege un spațiu vectorial înzestrat cu produs scalar, H fiind complet în raport cu metrica indusă din acest produs scalar.*

Observația 1. Reamintim că un spațiu metric (S, d) este complet, dacă orice șir fundamental din S este convergent către un element din S; cu alte cuvinte orice șir $(x_n)_{n\geq 1}$ din S, cu proprietatea; pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dacă $n, m \geq N$, va admite limită x în S, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (sau $x_n \to x$ $(n \to \infty)$).

Șirurile fundamentale se mai numesc și *șiruri Cauchy.*

Definiția 2. *Elementele $f, g \in X$, X fiind un spațiu prehilbertian se numesc ortogonale și se notează $f \perp g$, dacă produsul lor scalar este nul, iar șirul $(f_n)_{n\geq 1}$ din X se va numi ortogonal dacă orice două elemente diferite ale șirului sînt ortogonale, adică $(f_j, f_k) = 0$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \ldots$; în această situație vom spune că mulțimea $\{f_1, f_2 \ldots\}$ din X este ortogonală.*

Definiția 3. *Un element $f \in X$, X fiind un spațiu prehilbertian, se va numi normat dacă $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = 1$.*

Observația 2. *Orice element $f \in X$, $f \neq 0$, X fiind un spațiu prehilbertian, poate fi normat*, considerînd în loc de f elementul $\frac{1}{\|f\|} \cdot f$

$$\left(\text{pentru care } \left\| \frac{1}{\|f\|} f \right\| = \frac{1}{\|f\|} \|f\| = 1\right).$$

Definiția 4. *Un șir $(g_n)_{n\geq 1}$ din spațiul prehilbertian X se numește ortonormat dacă $(g_j, g_k) = \delta_{jk}$, δ_{jk} fiind numerele lui Kronecker.*

Cu alte cuvinte, un șir din X va fi ortonormat dacă acest șir este ortogonal, iar fiecare element al șirului este normat: mulțimea $\{g_1, g_2, \ldots\}$ se va numi *ortonormală.*

Rezultă că în orice șir ortonormat $(g_n)_{n\geq 1}$ din spațiul prehilbertian X avem $g_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Observația 3. *În spațiile prehilbertiene reale X, este valabilă atît teorema lui Pitagora*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \Leftrightarrow f \perp g,\ f, g \in X \tag{3}$$

cît și regula paralelogramului

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2),\ f, g \in X \tag{3'}$$

care rezultă direct din definiția normei din X și din regulile de calcul (1). În plus (3) se poate extinde la un număr oarecare de termeni, adică avem

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} f_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{p} \|f_j\|^2,\ f_j \in X,\ f_j \perp f_k,\ j \neq k. \tag{3''}$$

Fie X un spațiu prehilbertian.

Lema 1. *Dacă* $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ *sînt șiruri oarecari din* X *convergente către* $f \in X$ *respectiv* $g \in X$, *atunci șirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *din* $\mathbb{R}$, $a_n = (f_n, g_n)$ *este convergent către* (f, g):

$$a_n = (f_n, g_n) \to (f, g),\ (n \to \infty),\ \text{adică}\ \lim_{n\to\infty} (f_n, g_n) = (\lim_{n\to\infty} f_n,\ \lim_{n\to\infty} g_n).$$

Deoarece se verifică ușor egalitatea

$$(f_n, g_n) - (f, g) = (f_n - f, g_n - g) + (f, g_n - g) + (f_n - f, g)$$

prin aplicarea inegalității lui Schwartz (2′) se deduce

$$|(f_n, g_n) - (f, g)| \leq |(f_n - f, g_n - g)| + |(f, g_n - g)| + |(f_n - f, g)| \leq$$
$$\leq \|f_n - f\|\ \|g_n - g\| + \|f\|\ \|g_n - g\| + \|f_n - f\|\ \|g\| \to 0,\ (n \to \infty)$$

deoarece $f_n \to f$, $g_n \to g$ în X dacă $\|f_n - f\| \to 0$, $\|g_n - g\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Consecința 1. *Fie* $A \subset X$, $f \in X$, X *fiind un spațiu prehilbertian; dacă* $f \perp A$ (*adică* $f \perp g$ *pentru orice* $g \in A$) *atunci* $f \perp A^-$, *unde* A^- *este închiderea mulțimii* A.

Fie $h \in A^-$, adică h este un punct limită pentru A; deci va exista un șir $(g_n)_{n\geq 1}$ din A, astfel încît $g_n \to h$; cum prin ipoteză $(f, g_n) = 0, n = 1, 2, \ldots$, din lema 1 (cu $f_n = f$) se deduce $0 = \lim_{n\to\infty} (f, g_n) = (f, \lim_{n\to\infty} g_n) = (f, h)$

Definiția 5. *Fie* V *un spațiu vectorial* (real sau complex) *și* S *o submulțime a sa; un element* $f \in V$ *de forma*

$$f = a_1 g_1 + \ldots + a_p g_p,\ a_1, \ldots a_p \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ g_1, \ldots,\ g_p \in S \qquad (4)$$

se va numi combinație liniară finită elemente din S; *dacă* $f = 0$ *antrenează* $a_1 = \ldots = a_p = 0$, *atunci* $g_1, \ldots, g_p$ *vor fi elemente liniar independente din* S.

Lema 2. *Dacă* $S \subset V$ *este o submulțime nevidă a spațiului vectorial real sau complex* V, *atunci mulțimea tuturor combinațiilor liniare* (4) *cu elemente din* S *formează un spațiu vectorial.*

Se verifică ușor axiomele spațiului vectorial pentru elemente de forma (4).

Definiția 6. *Subspațiul lui* V *format din mulțimea combinațiilor liniare cu elemente din* $S \subset V$ *poartă numele de subspațiul generat de* S *sau acoperirea liniară a lui* S *și se notează* $L(S)$.

Observația 4. Deși se presupune $S \neq \varnothing$ dacă avem totuși $S = \varnothing$, prin definiție, se consideră $L(S) = \{0\}$.

Lema 3. *Orice mulțime ortogonală care nu conține elementul nul dintr-un spațiu prehilbertian* X *este liniar independentă; în particular orice mulțime ortonormală din spațiul prehilbertian* X *este liniar independentă.*

Trebuie arătat că dacă $S = \{f_1, f_2, \ldots\} \subset X$ este ortogonală (deci $f_j \perp f_k$ pentru $j \neq k$) și $f_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ atunci scriind combinația liniară

$$a_1 f_{n_1} + a_2 f_{n_2} + \ldots + a_k f_{n_k} = 0 \tag{5}$$

unde $f_{n_j} \in S$ ($f_{n_j} \neq f_{n_k}$, $j \neq k$) se deduce $a_1 = \ldots = a_k = 0$. Fie a_p, $1 \leqslant p \leqslant k$, primul scalar nenul din (5); calculînd produsul scalar cu f_{n_p} în ambii membri din (5) se deduce $a_p \|f_{n_p}\|^2 = 0$, adică $a_p = 0$ (deoarece $f_{n_p} \neq 0$ prin ipoteză). Această contradicție arată că $a_1 = \ldots = a_k = 0$; ultima parte a lemei va fi o consecință a rezutatului anterior deoarece din ipoteza $(f_j, f_k) = \delta_{jk}$ se deduce $\|f_j\|^2 = (f_j, f_j) = 1$ deci $f_j \neq 0$ pentru orice j.

Definiția 7. *Mulțimea $B \subset H$, H fiind un spațiu prehilbertian sau un spațiu Hilbert se va numi bază în H dacă $L(B)$ este o mulțime densă în H.*

Aceasta înseamnă că pentru orice $f \in H$ și orice $\varepsilon > 0$, există un $f_\varepsilon \in L(B)$, astfel încît $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$.

În particular, *dacă elementele lui B formează o mulțime ortogonală (ortonormală) atunci B se va numi bază ortogonală (respectiv ortonormală) în spațiul H.*

Definiția 8. *Un spațiu prehilbertian sau un spațiu Hilbert H se numește separabil dacă există un șir $(u_n)_{n \geqslant 1}$ din H, dens în H.* Cu alte cuvinte, spațiul H va fi separabil dacă pentru orice $f \in H$ și orice $\varepsilon > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $\|f - u_n\| < \varepsilon$.

În legătură cu bazele ortonormale din spațiile prehilbertiene H este important următorul rezultat:

Lema 4. *(procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt). Fie $\{u_1, u_2, \ldots\}$ o mulțime de elemente din spațiul prehilbertian H; se poate obține o mulțime $S = \{e_1, e_2, \ldots\} \subset H$ (finită sau nu) ortonormală astfel încît $u_j \in L(\{e_1, e_2, \ldots\})$, $j = 1, 2, \ldots$*

Demonstrația se realizează prin inducție. Dacă $u_1 = u_2 = \ldots = 0$ atunci evident $S = \emptyset$ (în baza observației 4) și în caz contrar fie v_1 primul element nenul din șirul $\{u_1, u_2, \ldots\}$, Vom defini primul element din S punînd

$$e_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$$

cînd vom avea $\|e_1\| = 1$, iar $u_1, u_2, \ldots, u_{n_0}, u_{n_0+1} \in L(\{e_1\})$, dacă $v_1 = u_{n_0+1}$; să presupunem că s-au obținut elementele $e_1, e_2, \ldots, e_m \in S$ astfel încît mulțimea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ este este ortonormală, iar $\{u_1, \ldots, u_p\} \in L(\{e_1, \ldots, e_m\})$ cu $p \geqslant m$. Dacă $u_1, \ldots, u_p$ epuizează mulțimea inițială $\{u_1, u_2, \ldots\}$ atunci lema este demonstrată; în caz contrar, fie $u_j \in \{u_1, u_2, \ldots\}$, $u_j \notin L(\{e_1, \ldots, e_m\})$ și să definim $v_{m+1} \in H$ prin

$$v_{m+1} = u_j - \sum_{k=1}^{m} (u_j, e_k) e_k.$$

Avem $v_{m+1} \in H$ (fiind o combinație liniară a elementelor $u_j, e_1, \ldots, e_m$ din H) și $v_{m+1} \neq 0$

(dacă $v_{m+1} = 0$ ar rezulta $u_j = \sum_{k=1}^{m} (u_j, e_k)\, e_k \in L(\{e_1, \ldots, e_m\})$, ceea ce nu se poate; în plus $v_{m+1} \perp \{e_1, \ldots, e_m\}$, deoarece

$$(v_{m+1}, e_p) = (u_j, e_p) - \sum_{k=1}^{m} (u_j, e_k)(e_k, e_p) = (u_j, e_p) - \sum_{k=1}^{m} (u_j, e_k)\, \delta_{kp} =$$

$$= (u_j, e_p) - (u_j, e_p) = 0,\ p = 1, 2, \ldots, m$$

și deci punînd

$$e_{m+1} = \frac{1}{\|v_{m+1}\|} v_{m+1}$$

rezultă că mulțimea $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}$ este ortonomală, iar $u_j \in L(\{e_1, \ldots, e_{m+1}\})$, și procedeul poate continua.

Să stabilim acum legătura dintre spațiile Hilbert separabile și spațiile Hilbert în care există o bază ortonormală numărabilă.

Lema 5. *Dacă $S \subset H$, H fiind un spațiu Hilbert, atunci $L^-(S)$ este un subspațiu închis al lui H, $L^-(S)$ fiind închiderea în sensul metricii din H a mulțimii $L(S)$.*

Fie $(f_n)_{n \geq 1}$ un șir fundamental din $L(S)$; cum $L(S) \subset H$, se deduce că acest șir este fundamental în H, deci va exista $f \in H$ astfel încît $f_n \to f\ (n \to \infty)$ și cum $f_n \in L(S)$ rezultă că f este punct limită pentru $L^-(S)$, adică $f \in L^-(S)$. Dacă $(f_n)_{n \geq 1}$ este un șir fundamental din $L^-(S)$, va exista un șir $(g_n)_{n \geq 1}$ din $L(S)$ astfel încît $\|f_n - g_n\| < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ (deoarece dacă $f_n \in L^-(S)$ atunci sau $f_n \in L(S)$ și se poate lua $g_n = f_n$, sau f_n este punct de acumulare pentru $L(S)$, iar șirul $(g_n)_{n \geq 1}$ va fi de asemenea fundamental:

$$\|g_n - g_m\| \leqslant \|g_n - f_n\| + \|f_n - f_m\| + \|f_m - g_m\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \|f_n - f_m\|,$$

deci va exista $f \in L^-(S)$ astfel încît $g_n \to f\ (n \to \infty)$. Or atunci

$$\|f_n - f\| \leqslant \|f_n - g_n\| + \|g_n - f\| < \frac{1}{n} + \|g_n - f\| \to 0\ (n \to \infty)$$

adică $f_n \to f \in L^-(S)$ $(n \to \infty)$.

Teorema 1. *Fie H un spațiu Hilbert separabil; atunci H va admite o bază ortonormală $B \subset H$ (finită sau numărabilă). Reciproc, dacă un spațiu Hilbert H admite o bază ortonormală (finită sau numărabilă), atunci H este un spațiu separabil.*

Dacă H este un spațiu Hilbert separabil, în baza definiției 8, va exista un șir $(u_n)_{n\geqslant 1}$ din H, dens în H, adică pentru orice $f\in H$ și orice $\varepsilon > 0$ există n_0 (depinzînd de f și ε) astfel încît $\|f - u_{n_0}\| < \varepsilon$; aplicînd lema 4, din șirul $(u_n)_{n\geqslant 1}$ se poate deduce baza ortonormală $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$ astfel încît u_{n_0} este o combinație liniară formată cu elementele lui B. Prin urmare avem $H = L^-(B)$, B fiind o bază ortonormală din H.

Reciproc, dacă există o bază B ortonormală în H, în baza definiției 7 mulțimea $L(B)$ va fi densă în H, adică pentru orice $f\in H$ și orice $\varepsilon > 0$ va exista o combinație liniare cu elemente din $L(B)$ cu proprietatea

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{N} a_j e_j \right\| < \varepsilon \tag{6}$$

dacă $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$. Să presupunem H spațiu Hilbert complex și fie H_N mulțimea elementelor din H de forma $\sum_{j=1}^{N} a_j e_j$, $N = 1,2,\ldots$ cu $a_j\in \mathbb{C}$ și $\operatorname{Re} a_j\in \mathbb{Q}$, $\operatorname{Im} a_j\in \mathbb{Q}$; deoarece $\mathbb{Q}$ este o mulțime numărabilă se deduce că H_N este o mulțime numărabilă din H. Deoarece și reuniunea $\bigcup_{N=1}^{\infty} H_N$ este mulțimea numărabilă din H, va rezulta că elementele ei pot fi scrise sub forma unui șir, fie el $(v_n)_{n\geqslant 1}$; cum $\bigcup_{N=1}^{\infty} H_N \subset H$, dacă $f\in H$, (6) are loc, dar cu $a_j\in \mathbb{C}$ și cum există numerele raționale α_j, β_j astfel încît

$$|a_j - (\alpha_j + i\beta_j)| < \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, se deduce că orice element din H se poate scrie ca limita unui șir din $\bigcup_{N=1}^{\infty} H_N$, deci $f\in H$ poate fi aproximat prin combinații liniare formate cu elementele șirului $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

Exemple 1. Spațiul $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n \text{ ori}}$ în care produsul scalar al elementelor x și y, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este definit prin

$$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

este un spațiu Hilbert real n-dimensional ; o bază ortonormală $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ poate fi obținută luînd $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ și deci, de exemplu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.

2. Spațiul $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}}_{n \text{ ori}}$ în care produsul scalar al elementelor z și w, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ se definește prin

$$(z, w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \ldots + z_n\bar{w}_n$$

este un spațiu Hilbert complex n-dimensional ; o bază ortonormală $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ poate fi obținută punînd $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$,

$e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ etc. Pentru $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n), z_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \ldots, n$ avem evident

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1 e_1 + z_2 e_2 + \ldots + z_n e_n.$$

Fie X un spațiu prehilbertian în care $B = \{e_1 e_2, \ldots\}$ este o bază numărabilă.

Definiția 9. *Pentru $f \in X$ numerele a_n definite prin produsul scalar*

$$a_n = (f, e_n), \; n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

se numesc coeficienții Fourier ai elementului f relativ la baza ortonormală $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$, iar seria formală

$$\left((a_n e_n)_{n \geqslant 1}, \; \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right)_{n \geqslant 1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) e_n$$

poartă numele de serie Fourier corespunzătoare elementului $f \in X$ relativă la baza ortonormală B (sau dezvoltarea ortogonală a lui $f \in X$ relativă la baza ortonormală B).

Observația 5. Presupunînd valabilă egalitatea

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{9}$$

unde $f \in X$, $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$ este o bază ortonormală din V, iar seria $a_n e_n$ este convergentă, în sensul metricii lui X (adică avem $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k e_k = f$ deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| < \varepsilon$ cînd $n \geqslant N$), atunci în mod obligatoriu coeficienții a_n din (9) vor coincide cu coeficienții Fourier (7).

Într-adevăr, ținînd seama de continuitatea produsului scalar, din (9) se deduce, înmulțind scalar în ambii membri cu $e_k \in B$:

$$(f, e_k) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_k\right) = \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_k\right) = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n, e_k\right) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n (e_n, e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nk} = a_k.$$

Observația 6. Nu este obligatoriu ca baza $B \subset X$ să fie ortonormală ; este posibil să se utilizeze doar baze ortogonale $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$;

$(f_j, f_k) = 0$, $j \neq k$, $f_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots$ în care caz seria din (8) se va scrie sub forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, f_n)}{\|f_n\|^2} f_n . \tag{8'}$$

Prin urmare, în cazul unei baze ortogonale coeficienții Fourier sînt $a_n = \frac{1}{\|f_n\|^2}(f, f_n)$.

Teorema 2. (*de minim a coeficienților Fourier*). *Dacă* $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$ *este o bază ortonormală, din spațiul prehilbertian complex* X *și* $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ *este un șir oarecare din* $\mathbb{C}$, *atunci funcția* $\delta_n : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$\delta_n(f;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\ e_k \Big\| \tag{10}$$

are valoarea minimă dacă $\alpha_j = a_j = (f, e_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *pentru orice* $f \in X$, *adică*

$$\delta_n(f;\ a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant \delta_n(f;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Demonstrația este imediată și se bazează pe calculul lui δ_n^2; avem

$$\delta_n^2 = \| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\ e_k \|^2 = \Big(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\ e_k ,\ f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\ e_j \Big) =$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k\ \overline{v}_k + \overline{\alpha}_k\ a_k - |\ \alpha_k|^2)\ ;$$

adunînd și scăzînd suma $\sum_{k=1}^{n} |\ a_k|^2$ rezultă

$$\delta_n^2(f;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\ a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\ \alpha_k - a_k|^2,$$

iar membrul drept este minim dacă și numai dacă $\alpha_k = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Definiția 10. *Aplicația* $\delta : V \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ *definită prin* (10), *adică*

$$\delta(f;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Big\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\ e_k \Big\|$$

unde $B = \{e_1, e_2, \ldots\}$ *este o bază ortonormală din spațiul prehilbertian* V *se numește eroare medie pătratică a elementului* f *relativă la baza* B.

Observația 7. Teorema 2 rămîne evident valabilă dacă se înlocuiește baza B printr-un sistem ortonormal oarecare.

2. Teorema de reprezentare Fréchet-Riesz

În acest punct se va arăta că orice funcțională liniară și mărginită pe spațiul Hilbert H (adică orice aplicație $F : H \to \mathbb{C}$, $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in H$, $|F(f)| \leqslant M \|f\|$, $f \in H$) se scrie sub forma unui produs scalar, deci

$$F(f) = (f, g), \ f \in H \tag{1}$$

$g \in H$ fiind definit în mod unic de funcționala F (vezi și punctul 2 din cap. I).

Fie $A \subset H$ un subspațiu închis al spațiului Hilbert H (adică $A^- = A$, iar $\alpha f + \beta g \in A$ dacă $f, g \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), $A \neq \{0\}$, $A \neq H$ și fie $g \in H$, $g \notin A$; să notăm

$$d = \inf_{f \in A} \| g - f \|. \tag{2}$$

Deoarece $d \geqslant 0$ această margine inferioară este un număr real pozitiv și problema care ne interesează este dacă există în A un element f_0 cu proprietatea

$$\|g - f_0\| = d \tag{3}$$

(cu alte cuvinte, dacă există în A un element situat la distanța cea mai mică de elementul g din H, g fixat). Această problemă constituie de fapt generalizarea la spații Hilbert a unei probleme simple din geometria elementară; astfel, dacă $H = \mathbb{R}^2$, iar A este o dreaptă care trece prin origină, pentru orice $g \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ există un singur punct pe A aflat la distanța minimă de punctul g; acest punct se află la intersecția dreptei A cu dreapta perpendiculară pe A care trece prin punctul g.

Teorema 1. *Dacă A este un subspațiu închis al spațiului Hilbert H și dacă*

$$d = \inf_{f \in A} \| g - f \|,$$

atunci oricare ar fi $g \in H \setminus A$ există un singur element $f_0 \in A$ cu proprietatea

$$\|g - f_0\| = d$$

Să demonstrăm mai întîi că f_0 este unic determinat; fie deci $f_0, f_0' \in A$ astfel încît $\| g - f_0 \| = d$, $\|g - f_0'\| = d$; cum $\frac{1}{2}(f_0 + f_0') \in A$, se deduce

$$\| g - \frac{1}{2}(f_0 + f_0') \| \geqslant d. \tag{4}$$

Pe de altă parte avem

$$\| g - \frac{1}{2}(f_0 + f_0') \| = \frac{1}{2} \| (g - f_0) + (g - f_0') \| \leqslant \frac{1}{2} \| g - f_0 \| + \frac{1}{2} \| g - f_0' \| = d$$

adică, avînd în vedere (4), $\| g - \frac{1}{2}(f_0 + f_0') \| = d$; așadar se deduce

$$\| g - \frac{1}{2}(f_0 + f_0') \| = \frac{1}{2} \| g - f_0 \| + \frac{1}{2} \| g - f_0' \|$$

și inegalitatea triunghiului devine egalitate, ceea ce se întîmplă dacă și numai dacă are loc egalitatea $g - f_0 = a(g - f_0')$, $a > 0$, $a \neq 1$, (avem $a > 0$ deoarece $g - f_0 \neq 0$ și $a \neq 1$) deoarece $f_0 \neq f_0'$. Se deduce $g = \frac{f_0 - a f_0'}{1 - a}$ deci $g \in A$ ceea ce contrazice ipoteza $g \in H \setminus A$; în concluzie $f_0' = f_0$.

Pentru a demonstra existența lui f_0, vom utiliza proprietatea marginii inferioare care afirmă că pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ există $f_n \in A$ astfel încît $\| g - f_n \| < d + \frac{1}{n}$; în acest mod s-a definit un șir $(f_n)_{n \geqslant 1}$ din A care este un șir fundamental, deoarece scriind regula paralelogramului (vezi (3') de la punctul 1) se deduce

$$0 \leqslant \| f_n - f_m \|^2 = 2 \| f_n - g \|^2 + 2 \| f_m - g \|^2 - \| (f_n + f_m) - 2g \|^2$$

adică $\| f_n - f_m \|^2 < 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 = d\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + 2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)$ (deoarece $\| (f_n + f_m) - 2g \| = 4 \left\| g - \frac{1}{2}(f_n + f_m) \right\|$) și $\| f_n - f_m \| \to 0$ dacă $n \to \infty$, $m \to \infty$. Rezultă deci că există $f_0 \in A$ cu $f_0 = \lim_{n \to \infty} f_n$; și trecînd la limită în inegalitatea $\| g - f_n \| < d + \frac{1}{n}$ pentru $n \to \infty$, rezultă $\| g - f_0 \| \leqslant d$ și cum nu putem avea $\| g - f_0 \| < d$ se deduce $\| g - f_0 \| = d$.

Observația 1. Analizînd demonstrația teoremei 1 se observă că nu s-a utilizat din proprietatea de liniaritate a lui A decît faptul că $\frac{1}{2}(u + v) \in A$ dacă $u, v \in A$, ceea ce necesită doar convexitatea lui A, așa că se poate considera demonstrat următorul rezultat:

Teorema 1'. *Dacă H este un spațiu Hilbert și $A \subset H$, $A \neq \{0\}$, este o mulțime convexă și închisă, pentru orice $g \in H \setminus A$ există un singur element $f_0 \in A$ astfel încît să fie valabilă inegalitatea*

$$\| g - f_0 \| \leqslant \| g - f \|$$

pentru orice $f \in A$.

Observația 2. Teorema 1 afirmă că pentru orice $g \in H$ și orice subspațiu închis A al spațiului Hilbert H există un singur element $f_0 \in A$ pentru care

$$\|g - f_0\| < \inf_{f \in A} \|g - f\|$$

și de aceea f_0 poate fi interpretat ca fiind elementul din subspațiul A care este cel mai apropiat de elementul $g \in H$.

Observația 3. În condițiile teoremei 1 avem $g - f_0 \perp A$, adică elementul $g - f_0$ este ortogonal pe orice element din A; într-adevăr, dacă ar exista $f_1 \in A$ astfel încît $(g - f_0, f_1) = a \neq 0$, atunci evident $f_1 \neq 0$ și $f^* = f_0 + \frac{a}{\|f_1\|^2} f_1 \in A$. Calculînd $\|g - f^*\|$ se deduce

$$\|g - f^*\|^2 = (g - f^*, g - f^*) = \left(g - f_0 - \frac{a}{\|f_1\|^2} f_1,\ g - f_0 - \frac{a}{\|f_1\|^2}\right) f_1 =$$

$$= \|g - f_0\|^2 - \frac{|a|^2}{\|f_1\|^2} < \|g - f_0\|^2$$

ceea ce contrazice definiția lui f_0.

Reciproca este de asemenea adevărată: dacă $g \in H$, $f_0 \in A$ și $g - f_0 \perp A$, atunci f_0 este elementul definit prin teorema 1, deoarece calculînd $\|g - f\|^2$ cu $f \in A$ rezultă $\|g - f\|^2 = \|(g - f_0) + (f_0 - f)\|^2 = \|g - f_0\|^2 + \|f_0 - f\|^2$ $(g - f_0 \perp f_0 - f)$ adică $\|g - f\| \geqslant \|g - f_0\|$.

Observația 4. Din observația 3 se deduce că orice element $g \in H$ se poate descompune scriind

$$g = f + h,\ f \in A,\ h \perp A \tag{5}$$

dacă A este un subspațiu închis din s pațiul Hilbert H; deci $f \perp h$ și are loc teorema lui Pitagora

$$\|g\|^2 = \|f + h\|^2 = \|f\|^2 + \|h\|^2.$$

Definiția 1. *Elementul $f \in A$ din egalitatea (5) se numește componenta sau proiecția lui $g \in H$ relativă la subspațiul închis $A \subset H$.*

Deoarece teorema 1 afirmă că proiecția f a lui $g \in H$ pe subspațiul închis $A \subset H$ este unic determinată se deduce că și elementul h din (5) este de asemenea unic determinat; dacă g parcurge mulțimea $H \setminus A$ atunci h se modifică odată cu g și f.

Definiția 2. *Dacă A este un subspațiu închis din spațiul Hilbert H atunci scriind descompunerea (5), cînd $g \in H \setminus A$, elementele h vor defini o submulțime a lui H numită complementul ortogonal al subspațiului închis A și se notează $A^\perp$.*

Prin urmare, în (5) avem $g \in H$, $f \in A$ și $h \in A^{\perp}$, iar f este proiecția lui g în subspațiul A și acest fapt se notează $H = A \oplus A^{\perp}$.

Propoziția 1. *Mulțimea $A^{\perp}$ este un spațiu vectorial închis din H.*

Dacă $h_1, h_2 \in A^{\perp}$, atunci $(f, h_1) = 0$, $(f, h_2) = 0$, pentru orice $f \in A$ și cum $(f, a_1h_2 + a_2h_2) = \bar{a}_1(f, h_1) + \bar{a}_2(f_2, h_2) = 0$, rezultă $a_1h_1 + a_2h_2 \in A^{\perp}$; dacă h este un punct limită pentru $A^{\perp}$, va exista un șir $(h_n)_{n \geq 1}$ din $A^{\perp}$ astfel încît $\lim h_n = h$ și cum $(f, h_n) = 0$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots$ prin trecere la limită, în baza continuității produsului scalar, se deduce $(h, f) = 0$, deci $h \in A^{\perp}$.

Teorema 2. *Orice funcțională (formă) liniară și mărginită dintr-un spațiu Hilbert H, $F : H \to \mathbb{C}$, are forma*

$$F(f) = (f, g), \; f \in H, \tag{6}$$

iar $g \in H$ este unic determinat prin forma F.

Fie $A = \ker F$, adică $h \in A$ dacă și numai dacă $F(h) = 0$; A este un subspațiu închis din H (avem $F(a_1h_1 + a_2h_2) = a_1F(h_1) + a_2F(h_2) = 0$ dacă $h_1, h_2 \in A$ pentru orice scalari a_1, a_2, iar mărginirea lui F antrenînd continuitatea acestuia : din $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h \in A^{-}$ se deduce $F(h) = F(\lim\limits_{n\to\infty} h_n) = \lim\limits_{n\to\infty} F(h) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, deci $h \in A$). Dacă $A = H$, se ia $g = 0$ și (6) este justificată.

Dacă $A \neq H$, va exista $g_0 \neq 0$, $g_0 \in A^{\perp}$ și să considerăm elementul din H definit prin $F(f)g_0 - F(g_0)f$, cu $f \in H$; deoarece

$$F[F(f)g_0 - F(g_0)f] = F(f)F(g_0) - F(g_0)F(f) = 0$$

rezultă $F(f)g_0 - F(g_0)f \in \ker F = A$ și deci acest element va fi ortogonal pe g_0 : $(F(f)g_0 - F(g_0)f, g_0) = 0$. Calculînd acest produs scalar rezultă

$$F(f) = \left(f, \frac{\overline{F(g_0)}}{\|g_0\|^2} g_0\right)$$

și notînd $g = \dfrac{\overline{F(g_0)}}{\|g_0\|^2} g_0$ rezultă (6) și mai rămîne de arătat că g este unic determinat ; scriind $F(f) = (f, g) = (f, g_1)$, $f \in H$, se deduce $(f, g - g_1) = 0$ pentru orice $f \in H$ și luînd în particular $f = g - g_1$ avem $\|g - g_1\|^2 = 0$, adică $g_1 = g$.

Observația 5. Dacă X este un spațiu prehilbertian, iar $A \neq \{0\}$ este un subspațiu a lui X, atunci complementul ortogonal $A^{\perp}$ este un subspațiu închis al lui X.

Într-adevăr, demonstrația din propoziția 1 se realizează fără ipoteza că A este subspațiu închis, importantă este continuitatea produsului scalar.

Observația 6. Dacă A este un subspațiu oarecare al spațiului prehilbertian X atunci $A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp} \subset A$; într-adevăr, dacă $f \in A^{\perp}$ avem $(f, g) = 0$ pentru orice $g \in A$ și deci dacă $f \in A^{\perp\perp}$ avem $(f, g_1) = 0$ pentru orice g_1 din $A^{\perp}$ ceea ce înseamnă $f \in A$.

Observația 7. În cap. III, punctul 2 s-a utilizat notația H' pentru mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe spațiul H; deci dacă H este un spațiu Hilbert avem $F \in H'$, dacă F este definită prin teorema 2 și această teoremă arată că aplicația $g \to F$ este conjugat-liniară (adică lui $\bar{a}_1 g_1 + \bar{a}_2 g_2$ îi corespunde $a_1 F_1 + a_2 F_2$) de la H la H'. De asemenea, teorema 2 arată că H' poate fi identificat cu H (deoarece lui $F \in H'$ i se atașează în mod unic elementul $g \in H$ prin egalitatea (6)).

Ca o consecință a teoremei de reprezentare 2 a formelor liniare vom demonstra rezultatul următor :

Teorema 3. (*Lax-Milgram*). *Fie* $B : H \times H \to \mathbb{R}$ *liniară în ambele argumente astfel încît se verifică condițiile*

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant c \, \|\varphi\| \, \|\psi\|, c \geqslant 0, \ \varphi, \ \psi \in H \tag{7}$$

$$B(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \, \|\varphi\|^2, \ k_1 > 0, \ \varphi \in H. \tag{7'}$$

Atunci pentru orice $f \in H$ *există un singur* $u \in H$ *astfel încît*

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f) \tag{8}$$

pentru orice $\varphi \in H$.

Pentru $u \in H$ fixat, din (7) rezultă că $B(\varphi, u)$ este o formă liniară și mărginită pe H, deci în baza teoremei 2 va avea forma

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f_1), f_1 \in H. \tag{9}$$

Evident, f_1 depinde de B, dar depinde și de u, deci vom putea scrie $f_1 = Su$ cu $S : H \to \to A \subset H$; avem din (9) și (7) :

$$0 \leqslant (Su, Su) = B(Su, u) \leqslant c \, \|Su\| \, \|u\|$$

adică $\|Su\| \leqslant c \, \|u\|$ și aplicația S este mărginită. Cum S este evident liniară, din (7') și (9) se deduce

$$k_1 \, \|u\|^2 \leqslant B(u, u) = (u, Su) \leqslant \|u\| \, \|Su\|$$

adică $\|Su\| \geqslant k_1 \, \|u\|$, ceea ce arată că S este injectivă (dacă am avea $Su = Sv$, rezultă $S(u - v) = 0$ și din inegalitatea precedentă se deduce $k_1 \, \|u - v\| \leqslant \|S(u - v)\| = 0$ adică $\|u - v\| = 0$ sau $u = v$). Există deci aplicația $S^{-1} : A \to H$ și în plus $A = H$ (deoarece în caz contrar pentru $w \in A^{\perp}$ avem $(w, g) = 0$ oricare ar fi $g \in A$, deci cu $g = S(w)$ rezultă $0 = (w, g) = (w, Sw) = B(w, w) \geqslant k_1 \, \|w\|^2 > 0$ ceea ce este contradictoriu.

Așadar, teorema Lax-Milgram afirmă că orice formă biliniară $B(\varphi, \psi)$ care verifică (7), (7') cu $\varphi, \psi \in H$, H fiind un spațiu Hilbert, pune în evidență o aplicație liniară, mărginită și inversabilă $S : H \to H$

3. Dezvoltări ortogonale

În cadrul acestui punct se vor continua considerațiile de la punctul 1, avîndu-se în mod special în vedere cazurile în care pentru un $f \in H$ oarecare are loc dezvoltarea Fourier

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{1}$$

în care $(e_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir ortonormal din H (presupus spațiu Hilbert separabil) iar $(a_n)_{n\geqslant 1}$ formează șirul coeficienților Fourier, deci

$$a_n = (f, e_n),\ n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

convergența în (1) este presupusă în topologia spațiului H, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| < \varepsilon,\ n \geqslant N \tag{3}$$

cu $\|g\| = \sqrt{(g, g)}$, (f, g) fiind produsul scalar al elementelor f, $g \in H$.

Observația 1. Seria Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, e_n) e_n$ poate fi formată pentru orice șir $(e_n)_{n\geqslant 1}$ ortonormal din H, dar nu este obligatoriu ca această serie să fie convergentă în H, sau dacă este convergentă, suma ei să fie f.

Are loc următorul rezultat:

Teorema 1. (*inegalitatea lui Bessel*). *Pentru orice $f \in H$ (H putînd fi și spațiul prehilbertian) și orice șir $(e_n)_{n\geqslant 1}$ ortonormal în H seria pătratelor coeficienților Fourier* (2) *este absolut convergentă, suma acestei serii fiind inferioară lui $\|f\|^2$.*

Utilizînd calculele de la teorema 2, punctul 1, se deduce

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,\ f - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right) = \|f\| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \geqslant 0$$

adică $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(f, e_k)|^2 \leqslant \|f\|^2$; aceasta înseamnă că șirul sumelor parțiale pentru seria $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ este mărginit de $\|f\|^2$ și cum seria în cauză are termenii pozitivi, aceasta este echivalent cu convergența ei și evident $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|f\|^2$.

Consecința 1. *Pentru orice $f \in H$, H fiind un spațiu Hilbert, și orice șir $(e_n)_{n\geqslant 1}$, ortonormal din H, seria Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)e_n$ este convergentă.*

Într-adevăr, șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\geqslant 1}$, $s_n = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$, fiind un șir fundamental în H ($\|s_n - s_m\|^2 = \|a_{m+1}e_{m+1} + \ldots + a_ne_n\|^2 = |a_{m+1}|^2 + \ldots + |a_n|^2 < \varepsilon$ pentru $n > m \geqslant N$) va exista $f_1 \in H$ astfel încît $f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_ne_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)e_n$; nu se poate însă afirma că $f_1 = f$, iar pentru ca această egalitate să aibă loc, mai trebuie presupus în plus că șirul ortonormal în cauză este o bază în H.

Teorema 2. *Fie H un spațiu Hilbert și $(e_n)_{n\geqslant 1}$ o bază ortonormală din H. Atunci pentru orice $f \in H$, seria Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} a_ne_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)e_n$ are șirul coeficienților Fourier $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $a_n = (f, e_n)$, $n \geqslant 1$, unic determinat, iar această serie converge către f în sensul metricii din H și în plus are loc relația de închidere*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 = \|f\|^2 \tag{4}$$

Reciproc, pentru orice $(a_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$ cu proprietatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \tag{5}$$

există un singur element $f \in H$ astfel încît $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_ne_n$.

Să arătăm că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$, $a_n = (f, e_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ este unic determinat și de aceea să presupunem că pentru un șir oarecare $(a_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$ avem $\lim_{n\to 1} s_n = f$, $s_n = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$; cum șirul $(e_n)_{n\geqslant 1}$ este ortogonal, se deduce imediat

$$(s_n, e_k) = a_k, \; k \leqslant n$$

și deci prin trecerea la limită, pentru $n \to \infty$, se deduce $(f, e_k) = a_k$, $k = 1, 2, \ldots$ ceea ce arată că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ trebuie să coincidă cu șirul coeficienților Fourier, deci este unic determinat.

Să arătăm acum că pentru orice $f \in H$ există un șir $(a_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$ cu proprietatea $\|f - (a_1e_1 + \ldots + a_ne_n)\| \to 0$ $(n \to \infty)$; să considerăm $s_n = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$ și un calcul elementar conduce la concluzia

$$(s_n, e_k) = (f, e_k), \; 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Aceasta înseamnă că $(f - s_n, e_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ și deci $f - s_n \perp H_n = L(\{e_1, \ldots, e_n\})$, adică $f - s_n \in H_n^{\perp}$.

Cum șirul $(e_n)_{n \geqslant 1}$ constituie o bază în H, pentru orice $\varepsilon > 0$ va exista o combinație liniară g a elementelor acestui șir astfel încît $\|f - g\| < \varepsilon$, iar $g \in H_n$ pentru $n \geqslant n_0$ cu $n_0 \in \mathbb{N}$ suficient de mare ; scriind $g = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, în baza teoremei 2 de la punctul 1 avem :

$$\|f - (a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n)\| \leqslant \|f - (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n)\| = \|f - g\|$$

și deoarece $\|f - g\| < \varepsilon$ rezultă $\|f - s_n\| < \varepsilon$, adică $s_n \to f$.

Calculînd $\|s_n\|^2$ rezultă imediat

$$\|s_n\|^2 = (s_n, s_n) = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2,$$

ar prin trecere la limită se deduce relația de închidere (4) (dacă $s_n \to f$ atunci $\|s_n\| \to \|f\|$).

Faptul că pentru orice șir $(a_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$ astfel încît $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ există un $f \in H$ astfel încît $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ rezultă repetînd justificarea de la consecința 1.

Relația de închidere (4) se mai numește și *egalitatea lui Parseval* și ea se poate scrie sub forma mai generală

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)(e_n, g) \tag{4'}$$

dacă $f, g \in H$.

Într-adevăr, scriind $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) e_n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} (g, e_n) e_n$, avem utilizînd continuitatea produsului scalar

$$(f, g) = (\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} (f, e_j) e_j, \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (g, e_k) e_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (f, e_j) \overline{(g, e_k)} (e_j, e_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (f, e_j)(e_j, g)$$

deoarece $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$.

Teorema 2 a fost demonstrată în ipoteza că există o bază ortonormală în spațiul Hilbert H care formează un șir de forma $(e_n)_{n \geqslant 1}$; dacă însă un spațiu Hilbert H admite o bază ortonormală de forma $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, atunci teorema 2 își păstrează valabilitatea, demonstrațiile afirmațiilor în cauză realizîndu-se în același mod așa că vom reformula doar rezultatele.

Teorema 2. *Fie H un spațiu Hilbert în care șirul bilateral $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ formează o bază ortonormală. Dacă $f \in H$ există un șir bilateral $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ din $\mathbb{C}$ astfel încît are loc egalitatea (sau dezvoltarea în serie Fourier)*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$$

convergența avînd loc în sensul metricii din H, adică

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} a_n e_n \right\| \to 0, \; n \to \infty.$$

Coeficienții Fourier a_n, $n \in \mathbb{Z}$, sînt unic determinați prin

$$a_n = (f, e_n), \; n \in \mathbb{Z}$$

și satisfac relație de închidere (Parseval)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|^2;$$

mai general, dacă $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f, e_n)e_n$, $g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (g, e_n)e_n$, $f, g \in H$, *atunci*

$$(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f, e_n)(e_n, g).$$

Reciproc, dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ este un șir bilateral din $\mathbb{C}$ astfel încît $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, *va exista un singur $f \in H$ astfel încît* $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$.

Fie acum L_2 spațiul Hilbert introdus la punctul 6, cap. I; $L_2 = \{F\}$ fiind constituit din mulțimea distribuțiilor periodice F obținute în modul următor:

Dacă $F \in L_2$ atunci:

i) Există un șir $(f_n)_{n\geq 1}$ din $\mathcal{C}$, care este fundamental în sensul metricii deduse din produsul scalar

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \tag{6}$$

ii. Distribuțiile periodice F_{f_n} corespunzătoare funcțiilor continue f_n, $n = 1, 2, \ldots$ converg în sensul convergenței din $\mathcal{D}'$ către F, adică

pentru orice u din $\mathcal{D}$ avem $Ff_n(u) \to F(u)$ (convergență în $\mathbb{C}$); dacă se verifică i și ii vom scrie $Ff_n \xrightarrow{L_2} F$.

Reamintim că $\mathcal{C}$ este mulțimea funcțiilor continue pe $\mathbb{R}$, periodice cu perioada 2π, $\mathcal{D}$ este mulțimea funcțiilor definite pe $\mathbb{R}$ indefinit derivabile, cu perioada 2π, iar $\mathcal{D}'$ este mulțimea funcționalelor (formelor) liniare și continue pe $\mathcal{D}$, pe care le-am numit distribuții periodice. Evident $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, dar $\mathcal{C}$ poate fi identificat cu un subspațiu al lui L_2, prin identificarea funcției $f \in \mathcal{C}$ cu distribuția $F_f' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,u(x)\,dx$, $u \in \mathcal{D}$ (faptul că există un șir din $\mathcal{C}$, fundamental în norma dedusă din (6) este evident : este suficient să luăm $f_n = f$, $n = 1, 2, \ldots$); în acest caz vom avea

$$\|F\|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx.$$

În L_2 se poate defini o infinitate de baze ortonormale, cea mai simplă fiind definită de șirul bilateral $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, unde

$$e_n(x) = e^{inx} = \operatorname{cis}(nx),\ n \in \mathbb{Z}$$

(utilizînd (6) și (7) deducem imediat că $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ și cum $e^{inx} \in \mathcal{C}$, e_n va fi un element din L_2).

Propoziția 1. *Șirul* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $e_n = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ *este o bază ortonormală din spațiul Hilbert* L_2.

Avem $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$, $n, m, \in \mathbb{Z}$ și mai rămîne de arătat că acoperirea liniară a mulțimii $\{e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2} \ldots\}$ este densă în L_2 : or cum $F \in L_2$ este limita unui șir de funcții din $\mathcal{C}$ în sensul normei deduse din (6), iar $\mathcal{D}$ este dens în $\mathcal{C}$, se poate presupune că există un șir $(f_n)_{n\leqslant 1}$ din $\mathcal{D}$ astfel încît $F_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $u \in \mathcal{D}$ astfel încît $\|F_n - F\| < \varepsilon/2$: conform teoriei seriilor Fourier-trigonometrice (vezi A.M. cap. 5, punctul 4) u se poate scrie ca limită uniformă a seriei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$, deci notînd $v_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ avem $u = \lim_{n\to\infty} v_n$ (convergență uniformă). Cum convergența uniformă domină convergența din L_2 (adică dacă $v_n \xrightarrow{u} u$, atunci $\|v_n - u\| \to 0$ $(n\to\infty)$), vom avea $\|u - v_n\| < \varepsilon/2$ dacă $n \geqslant N$, pentru orice $\varepsilon > 0$

dacă $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ este suficient de mare ; or atunci, conform cu (7), putem scrie

$$\|Fv_n - F\| \leqslant \|Fv_n - Fu\| + \|Fu - F\| = \|v_n - u\| + \|Fu - F\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Propoziția este demonstrată avînd în vedere că $v_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$.

Cu ajutorul propoziției 1 și a teoremei 2′ rezultă că se pot obține serii Fourier-trigonometrice nu numai pentru funcții periodice ci și pentru distribuțiile periodice din L_2, avînd loc rezultatul următor :

Teorema 3. *Pentru orice distribuție periodică $F \in L_2$ există un șir bilateral $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ din $\mathbb{C}$ astfel încît să aibă loc egalitatea*

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n,\ e_n(x) = e^{inx},\ n \in \mathbb{Z} \tag{8}$$

convergența seriei din (8) *către F avînd loc în sensul că funcțiile $F_n = \sum_{k=-n}^{n} c_n e_n$ converg în L_2 către F ($F_1 \xrightarrow{L_2} F$).*

Coeficienții Fourier c_n, $n \in \mathbb{Z}$ sînt definiți prin

$$c_n = F(e_n),\ n \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

și este verificată relația de închidere (Parseval)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n^2 = \|F\|^2 ; \tag{10}$$

mai general, dacă avem $F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(e_{-n})e_n$, $G = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(e_{-n})e_n$ atunci are loc egalitatea

$$(F, G) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(e_{-n})\,\bar{G}(e_n). \tag{10}$$

Reciproc, dacă $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ este un șir bilateral din $\mathbb{C}$ cu proprietatea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, va exista un singur $F \in L_2$ astfel încît să aibă loc dezvoltarea (8).

Singurele fapte care trebuie justificate sînt egalitățile

$$(F, F_{e_n}) = F(e_{-n}),\ \overline{G(e_{-n})} = \bar{G}(e_n),$$

deoarece apoi se aplică propoziția 1 și teorema 2'.

Fie $(u_m)_{m\geqslant 1}$ un șir din $\mathcal{E}$ astfel încît $u_m \xrightarrow{L_2} F$: atunci se poate scrie

$$c_n = (F, F_{e_n}) = (\lim_{m\to\infty} u_m, e_n) = \lim_{m\to\infty} (u_m, e_n) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_m(x)\bar{e}_n(x)\,dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_m(x)\, e^{-inx}\,dx = \lim F_{u_m}(e_{-n}) = F(e_{-n}).$$

Deoarece, prin definiție avem $\bar{G}(f) = \overline{G(\bar{f})}$, cum $G(e_{-n}) = (G, G_{e_n})$, se deduce

$$\bar{G}(e_n) = \overline{G(\bar{e}_n)} = \overline{G(e_{-n})},$$

Numărul complex a_n din dezvoltarea Fourier-trigonometrică (8) se va numi, prin extensie, *coeficientul Fourier* al distribuției F relativă la termenul e_n din baza ortonormală $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Observația 2. De regulă seriile Fourier-trigonometrice se scriu cu ajutorul funcțiilor trigonometrice $\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ și $\sin(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$ mai ales dacă distribuția F este reală (deci dacă $F = \bar{F}$). Să notăm, pentru un $F \in L_2$:

$$c_n = F(e_{-n}),\ a_n = 2F(\cos(nx)),\ b_n = 2F(\sin(nx));$$

cum $e_{-n}(x) = e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx)$, se deduce din liniaritatea distribuției F

$$c_n = F(e_{-n}) = F(\cos(nx) - i\sin(nx)) = F(\cos(nx)) - iF(\sin(nx)) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

Deoarece $\cos(-nx) = \cos(nx)$, $\sin(-nx) = -\sin(nx)$, rezultă

$$a_n = a_n,\ b_{-n} = -b_n,\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_{-n} - ib_{-n}) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$ și deci,

pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ avem

$$c_n e_n(x) = c_{-n}\, e_{-n}(x) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)\,(\cos(nx) + i\sin(nx)) +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_n + ib_n)(\cos(nx) - i\sin(nx) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx).$$

Așadar, se deduce dezvoltarea cunoscută

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

în care $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ vor fi șiruri din $\mathbb{R}$ dacă $F \in L_2$ este reală.

Observația 3. La punctul 7 din cap. I s-au introdus spațiile Sobolev H_m, $m = 0, 1, \ldots$, iar distribuția periodică F este un element din H_m dacă $F, DF, \ldots D^m F \in L_2$; or în baza teoremei 2, pentru seria Fourier-trigonometrică atașată lui $F \in \mathcal{D}'$ avînd forma $F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$, vom avea $F \in L_2$, dacă și numai dacă, seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ este convergentă. Deoarece seria Fourier-trigonometrică atașată derivatei $DF \in \mathcal{D}'$ va fi $DF = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n De_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in) c_n e_n$ (deoarece avem $F(u) =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e_n, u\rangle, \text{ cu } \langle e_n, u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_n(x)\, u(x)\, dx, \text{ iar } DF(u) =$$

$$= -F(Du) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e_n, Du\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle De_n, u\rangle =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle in\ e_n,\ u\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\ c_n\langle e_n, u\rangle),$$

iar $DF \in L_2$, dacă și numai dacă $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |inc_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty$, se deduce că $F \in H_1$, dacă și numai dacă seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2)|c_n|^2$ este convergentă, iar din aproape în aproape, rezultă că $F \in H_m$, dacă și numai dacă, coeficienții Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ai lui F sînt astfel încît seria

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2 + n^4 + \ldots + n^{2m})\, |c_n|^2 \tag{11}$$

să fie convergentă. Deoarece $n^{2k} < n^{2m}$ pentru $1 \leqslant k \leqslant m$, dacă seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2m}\ |c_n|^2$ este convergentă atunci și seriile $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k}\ |c_n|^2$ vor fi convergente; rezultă că seria (11) va fi convergentă, dacă și numai dacă, avem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^{2m})\ |c_n|^2 < \infty \text{ sau } \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2)^m |c_n|^2 < \infty. \tag{11'}$$

În cazul spațiilor cu mai multe dimensiuni, considerațiile se pot face prin simplă analogie, ținînd seama că seria Fourier-trigonometrică în acest caz, de exemplu în două dimensiuni, se scrie

$$f(x,y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk}\, e_j(x)\, e_k(y),$$

$$c_{jk} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x,\, y)\, \mathrm{e}^{-ijx} \cdot \mathrm{e}^{-iky}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

$f : [0,\ 2\pi] \times [0,\ 2\pi] \to \mathbb{C}$ fiind o funcție dată; de exemplu $f \in L_2$, dacă și numai dacă $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{jk}|^2 < \infty$.

Teorema 4. (*Rellich*). *Dacă* $(F_p)_{p \geqslant 1}$ *este un șir mărginit din spațiul* H_m, $m = 1, 2, \ldots$ *va exista un subșir* $(G_q)_{q \geqslant 1}$ *al acestui șir convergent în spațiul* $\mathring{H}_k$, $k < m$.

Vom realiza demonstrația în ipoteza $m = 1$, cazul $m > 1$ tratîndu-se analog; deoarece avem $\|F_p\|_1 \leqslant a \in \mathbb{R}$, $p = 1,2,..$ dezvoltînd în serie Fourier-trigonometrică fiecare F_p, obținem șirurile bilaterale $(c_{p,n})_{n \geqslant 1}$ pentru care avem $(1 + n^2)|c_{p,n}|^2 \leqslant \|F_p\|^2 \leqslant a^2$, adică $|c_{p,n}|^2 \leqslant \dfrac{a^2}{1 + n^2} \leqslant a^2$, $p = 1, 2, \ldots$ Rezultă că pentru fiecare $p = 1, 2, \ldots$ se poate extrage un subșir convergent $(c^2_{1,n_k})_{k \in \mathbb{Z}}$, $(c^2_{2,n_k})_{k \in \mathbb{Z}}$, ..., ceea ce face ca seriile Fourier-trigonometrice $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{p,n_k}\, \mathrm{e}^{inx}$ să definească elemente din $\mathring{H}_0 = L_2$. Construind șirul format cu elementele aflate pe o diagonală a șirurilor antericare, se obține un șir bilateral $(b_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ cu proprietatea $\sum_{q=-\infty}^{\infty} |b_q|^2 < \infty$ a cărei serie Fourier-trigonometrică va defini un element din L_2.

4. Polinoame ortogonale

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, de lungime finită sau nu, și $C(I)$ mulțimea funcțiilor continue pe I, cu valori reale; cu ajutorul produsului scalar

$$(f,\, g)_\rho = \int_I \rho(x) f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x, \quad \|f\|_\rho = \sqrt{(f,\, g)_\rho} \tag{1}$$

(unde ρ este o funcție numită pondere definită pe I^-, exceptînd eventual un număr finit de discontinuități integrabile, pozitivă), $C(I)$ devine un spațiu prehilbertian $X(I)$.

În spațiul $C(I)$, mulțimea

$$e_1(x) = 1,\ e_2(x) = x,\ \ldots,\ e_{n+1}(x) = x^n,\ \ldots \tag{2}$$

va defini o bază în sensul metricii uniforme : $d(f, g) = \max_{x \in I^-} |f(x) - g(x)|$ (dacă I^- este un compact din $\mathbb{R}$), deoarece conform teoremei lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcțiilor continue prin funcții polinomiale (vezi A.M. cap. IV, punctul 2), pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $f \in C(I)$, $|I| < \infty$ ($|I|$ fiind lungimea intervalului I) se poate determina funcția polinomială $p_N(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_N x^N$, cu $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît $\|f(x) - p_N(x)\| = d(f, p_N) < \varepsilon$. Cu alte cuvinte, avem

$$L^-(\{e_1, e_2, \ldots\}) = C(I), \tag{3}$$

iar $C(I)$ va fi și un spațiu vectorial normat separabil, deoarèce P_N se poate aproxima în metrica uniformă prin funcții polinomiale cu coeficienți din $\mathbb{Q}$ (vezi demonstrația teoremei 1 de la punctul 1) care formează o mulțime numărabilă densă în $C(I)$.

Dacă I are lungime infinită, atunci afirmațiile anterioare rămîn valabile numai pentru submulțimi închise din $C(I)$ care au o comportare convenabilă la infinit.

Definiția 1. *Prin șir de polinoame ortogonale vom înțelege un șir* $(Q_n)_{n \geqslant 0}$ *din* $C(I)$ *obținut din șirul de funcții continue* (2) *prin procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt* (vezi lema 4 de la punctul 1).

Șirul $(Q_n)_{n \geqslant 0}$ astfel obținut va fi format din funcții polinomiale (deoarece Q_n va fi o combinație liniară a funcțiilor din șirul (2)) și vom presupune că gradul lui Q_n este exact egal cu n ; proprietatea de bază a acestui șir va fi ortogonalitatea lui, cu pondere ρ, pe intervalul I, adică

$$(Q_n, Q_m)_\rho = \int_I \rho(x)\, Q_n(x) Q_m(x)\, dx = 0,\ n \neq m. \tag{4}$$

Pentru ușurința calculelor, nu se va presupune șirul $(Q_n)_{n \geqslant 0}$ ortonormal.

Definiția 2. *Prin polinoame ortogonale clasice vom înțelege următoarele șiruri de polinoame ortogonale* :

i. *Dacă* $I =]-1, 1[$ *și* $\rho(x) = (1 - x)^p (1 + x)^q$, $p, q > -1$, *vom nota*

$$Q_n(x) = J_n^{(p,q)}(x),\ n = 0, 1, \ldots\ x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

și se obțin polinoamele lui Jacobi. În particular, pentru $p = q = 0$ (deci pentru $\rho(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$) vom nota

$$Q_n(x) = P_n(x), \ n = 0, 1, \ldots, \ x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

ar P_n va fi *polinomul Legendre* sau *polinomul sferic* de gradul n.

Pentru $p = q = -\frac{1}{2}$ (deci pentru $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in]-1, 1[$) vom nota

$$Q_n(x) = T_n(x), \ n = 0, 1, \ldots, \ x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

iar T_n va fi *polinomul Cebîșev* de gradul n, iar pentru $p = q = \lambda - \frac{1}{2}$ (deci pentru $\rho(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$, $x \in [-1,1]$), $\lambda > -\frac{1}{2}$ vom nota

$$Q_n(x) = \varphi_{\lambda,n}(x), \ n = 0, 1, \ldots, \ x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

iar φ_n va fi *polinomul ultrasferic* (sau *polinomul Gegenbauer*) de gradul n.

ii. *Dacă* $I =]0, \infty[$ *și* $\rho(x) = x^\lambda e^{-x}$, $\lambda \geqslant -1$, *se va nota*

$$Q_n(x) = L_{\lambda,n}(x), \ n = 0, 1, \ldots, \ x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

și $L_{\lambda,n}$ *va fi polinomul Laguerre de gradul n.*

iii. *Dacă* $I = \mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ *și* $\rho(x) = e^{-x^2}$, *se va nota*

$$Q_n(x) = H_n(x), \ n = 1, 2, \ldots, \ x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

iar H_n *va fi polinomul Hermite de gradul n.*

Observația 1. Condițiile $p > -1$, $q > -1$ din i sau condiția $\lambda > -1$ din ii apar pentru ca integralele din (4), în eventualitatea că sînt improprii, să fie convergente.

Observația 2. În afară de polinoamele ortogonale clasice din definiția 2 există și alte șiruri de polinoame ortogonale, care apar în multe probleme practice sau teoretice ale analizei matematice. Proprietățile lor comune vor fi mai jos puse în evidență

Teorema 1. *Polinoamele ortogonale* $(Q_n)_{n \geqslant 0}$ *definesc o bază ortogonală în* L_2 *dacă* $|I| < \infty$.

Trebuie arătat că pentru orice $F \in L_2$ se poate scrie

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n, \ a_n = \frac{1}{\|Q_n\|^2} F(Q_n) = F$$

convergența în (11) fiind definită prin

$$\left\| F - \sum_{k=1}^{n} a_k Q_k \right\|_\rho \to 0 \ (n \to \infty) \tag{11'}$$

cu $\|\cdot\|_\rho$ definită prin (1). Deoarece $F \in L_2$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $u \in \mathfrak{C}$ astfel încît $\|F_u - F\|_\rho < \varepsilon$ (aici intervalul $[0, 2\pi]$ s-a înlocuit prin intervalul I cu $|I| < \infty$, iar $\|\cdot\|_\rho$ are aceeași semnificație ca și norma dedusă din produsul scalar $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho(x)u(x)\overline{v(x)}\,dx =$

$= (u, v)_\rho$; în plus, $\|F_u - F_v\|_\rho = \|u - v\|$, dacă $u, v \in \mathfrak{C}$. În baza considerațiilor care au condus la relația (3), va exista funcția polinomială p_N cu proprietatea

$$d(u, p_N) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\int_I \rho(x)\,dx}}$$

și deoarece

$$\|u - p_N\|_\rho^2 = \int_I \rho(x)[(u(x) - p_N(x)]^2\,dx \leqslant d^2(u, p_N) \int_I \rho(x)\,dx$$

se deduce $\|u - p_N\|_\rho < \varepsilon$ pentru $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ suficient de mare. Or atunci avem

$$\|F_{P_N} - F\|_\rho \leqslant \|F_{P_N} - F_u\|_\rho + \|F_u - F\|_\rho = \|u - P_N\|_\rho + \|F_u - F\|_\rho < 2\varepsilon,$$

adică șirul $(Q_n)_{n \geqslant 0}$ definește o bază ortogonală în L_2 și are loc egalitatea (11). Pentru a determina coeficienții a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ai acestei dezvoltări, fie $(u_m)_{m \geqslant 1}$ un șir din $\mathfrak{C}$, cu proprietatea $u_m \xrightarrow{L_2} F$: deoarece pentru u_m are loc dezvoltarea $\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} Q_n$, cu $a_{m,n} = \frac{(u_m, Q_n)}{\|Q_n\|_\rho^2}$ (convergență în metrica din (1)), vom avea: (ținînd cont că inversarea operațiilor utilizată mai jos este ușor de justificat)

$$F(u) = (\lim_{m\to\infty} u_m, u)_\rho = \lim_{m\to\infty} (u_m, u)_\rho = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} Q_n, u \right)_\rho =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{m,n} Q_n, u)_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} [\lim_{m\to\infty} a_{m,n} (Q_n, u)_\rho] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lim_{m\to\infty} \frac{(u_m Q_n)_\rho}{\|Q_n\|_\rho^2} (Q_n, u)_\rho \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|Q_n\|^2} F(Q_n)\,(Q_n, u)_\rho =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|Q_n\|^2} F(Q_n) Q_n, u_\rho \right), \quad F(Q_n) = \lim_{m\to\infty} (u_m, Q_n)_\rho$$

adică $F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|Q_n\|_\rho^2} F(Q_n)\, Q_n$ și (11) este justificat.

Dacă $|I| = \infty$, vor fi justificate ulterior unele rezultate analoage teoremei 1.

Evident va fi valabilă relația de închidere (Parseval)

$$\|F\|_\rho^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|Q_n\|_\rho^2} F^2(Q_n) = \sum_{n=0}^{\infty} F^2\left(\frac{Q_n}{\|Q_n\|_\rho}\right)$$

sau egalitatea mai generală

$$(F,\ G)_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{Q_n}{\|Q_n\|_\rho}\right) G\left(\frac{Q_n}{\|Q_n\|_\rho}\right),$$

care se obține imediat din (11) scrisă sub forma $F =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\|Q_n\|_\rho^2} \cdot F(Q_n) Q_n = \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{Q_n}{\|Q_n\|_\rho}\right) \frac{Q_n}{\|Q_n\|_\rho}.$$

Propoziția 1. *Dacă p_n este o funcție polinomială de grad n astfel încît $(p_n, x^k)_\rho = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, atunci $p_n = a_n Q_n$, $a_n \in \mathbb{R}$.*

Deoarece $(p_n, Q_k)_\rho = (p_n, \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j)_\rho = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j (p_n, x^j)_\rho = 0$, dacă $0 \leqslant j \leqslant k < n$, cum $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ formează o bază în spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale avînd gradul cel mult egal cu n, iar $p_n \in L(\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\})$, avem $p_n = \sum_{j=0}^{n} a_j Q_j$,

$a_j = \frac{(p_n, Q_j)}{\|Q_j\|_\rho^2} = 0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, adică $p_n = a_n Q_n$.

Observația 3. Cu demonstrația din propoziția 1 se poate justifica și următorul rezultat:

Un polinom Q_n din șirul de polinoame ortogonale $(Q_n)_{n \geqslant 0}$ este ortogonal pe orice funcție polinom de grad inferior lui n deoarece

$$(Q_n, p_k)_\rho = \left(Q_n, \sum_{j=0}^{k} a_j Q_j\right)_\rho = \sum_{j=0}^{k} (Q_n, Q_j)_\rho = 0.$$

Pentru a obține rezultatele care ne interesează din teoria polinoamelor ortogonale, vom face o ipoteză suplimentară pentru ponderea ρ și anume: $\rho \in C^1(I)$ și verifică egalitățile

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \quad \alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x, \tag{12}$$

$$\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \ |\alpha_1| + |\beta_2| > 0$$

$$(\rho\beta)(a) = \bullet, \ (\rho\beta)(b) = 0, \ \{a, b\} = \partial I. \tag{13}$$

Exemplul 1. Toate polinoamele clasice din definiția 2 verifică relațiile (12) și (13); astfel, deoarece $\rho(x) = (1-x)^p(1+x)^q$, $p > -1$, $q > -1$.

$$\alpha(x) = q - p - (p+q)x, \beta(x) = 1 - x^2, \ |\alpha_1| + |\beta_2| = 1 + |p+q| > 0$$

în cazul polinoamelor Jacobi (aici $\partial I = \{-1, 1\}$, iar $(\rho\beta)(x) = (1-x)^{p+1}(1+x)^{q+1}$). În particular

$$\alpha(x) = 0, \beta(x) = 1 - x^2, \ |\alpha_1| + |\beta_2| = 1 > 0$$

în cazul polinoamelor Legendre,

$$\alpha(x) = x, \beta(x) = 1 - x^2, \quad |\alpha_1| + |\beta_2| = 2 > 0$$

în cazul polinoamelor Cebișev și

$$\alpha(x) = (1-2n)x, \beta(x) = 1 - x^2, \ |\alpha_1| + |\beta_2| = 1 + |2n-1| > 0$$

în cazul polinoamelor ultrasferice.

În cazul polinoamelor Laguerre, $\rho(x) = x^{\lambda} e^{-x}$, $\lambda > -1$, avem

$$\alpha(x) = \lambda - x, \beta(x) = x, \ |\alpha_1| + |\beta_2| = 1 > 0, (\rho\beta)(x) = x^{\lambda+1}e^{-x},$$

iar dacă $\rho(x) = e^{-x^2}$ (polinoamele Hermite), rezultă)

$$\alpha(x) = -2x, \beta(x) = 1, \ |\alpha_1| + |\beta_2| = 2 > 0.$$

Teorema 2. *Dacă $(Q_n)_{n\geq 0}$ este un șir de polinoame ortogonale pe intervalul I cu pondere ρ care verifică (12) și (13) atunci:*

i. *Este valabilă formula lui Rodrigues*

$$Q_n(x) = \frac{A_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\rho(x)\beta^n(x)], \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

ii. *Q_n este soluție particulară a ecuației diferențiale*

$$\beta y'' + (\alpha + \beta')y - n[(n+1)\beta_2 + \alpha_1]y = 0. \tag{15}$$

iii. *Există $K : B_r(0) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cu $r > 0$ suficient de mic avînd proprietatea*

$$K(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q_n(x) = \frac{\rho(\zeta_1)}{\rho(z)} \frac{1}{1 - t\beta'(\zeta_1)} \tag{16}$$

K numindu-se funcție generatoare a șirului $(Q_n)_{n\geq 0}$ iar ζ_1 fiind zeroul cel mai apropiat de z al funcției $\zeta \to \zeta - z - t\beta(\zeta)$.

Justificarea lui i se face în două etape: în prima, se arată că membrul drept din (14) este o funcție polinomială de gradul n, iar în etapa a doua se arată că $\left(\frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)}, x^k\right)_\rho = 0$ pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$ și prin aplicarea propoziției 1 se ob-

ține (14). Pentru prima etapă, deoarece din (12) rezultă $\rho' = \frac{\alpha}{\beta}\rho$, avem

$$\frac{d^n}{dx^n}(\rho\beta^n) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\rho'\beta + n\rho\beta'\beta^{n-1}) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\rho\beta^{n-1}(\alpha + n\beta')] = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\rho\beta^{n-1}R_{n,1})$$

cu $R_{n,1} = \alpha + n\beta'$ un polinom de gradul întîi; din aproape în aproape se deduce

$$(\rho\beta^n)^{(n)} = (\rho\beta^{n-k}R_{n,k})^{(n-k)} \tag{17}$$

unde $R_{n,k}$ este un polinom de gradul k și deci pentru $k = n$ avem

$$(\rho\beta^n)^{(n)} = \rho R_{n,n}$$

ceea ce arată că membrul drept din (14) este efectiv un polinom de gradul n. Calculul *produsului scalar* $\left(\frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)},\ x^k\right)_\rho$ se realizează utilizînd formula de integrare prin părți; astfel, deoarece $\partial I = \{a, b\}$ avem:

$$\left(\frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)},\ x^k\right)_\rho = \int_I \rho(x)x^k \cdot \frac{1}{\rho(x)}(\rho\beta^n)^{(n)}(x)dx = \int_a^b x^k(\rho\beta^n)^{(n)}(x)dx =$$

$$= x^k(\rho\beta^n)^{(n-1)}(x)\Big|_a^b - k\int_a^b x^{k-1}(\rho\beta^n)^{(n-1)}(x)dx = -k\int_a^b x^{k-1}(\rho\beta^n)^{(n-1)}(x)dx$$

termenul integrat dispărînd datorită lui (17) din care pentru ordinul n de derivare înlocuit prin $n-1$ și $k = n-1$ obținem $(\rho\beta^n)^{(n-1)} = \rho\beta R$, R fiind o funcție polinomială) combinat cu (13). Integrînd încă de k ori prin părți rezultă $\left(\frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)},\ x^k\right)_\rho = 0$ pentru $k = 0\,1, \ldots, n-1$.

ii. Se poate deduce în două moduri: fie direct arătînd că funcția Q_n definită de membrul drept din (14) verifică ecuația diferențială (15), fie indirect plecînd de la produsul scalar

$\alpha_k = \left(\frac{1}{\rho(x)}x^k, (\rho\beta Q_n')'(x)\right)_\rho$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Vom utiliza a doua cale care necesită mai puține calcule; avem

$$\alpha_k = \int_a^b x^k(\rho\beta Q_n')'dx = (\rho\beta)(x)Q_n'(x)x^k\Big|_a^b - k\int_a^b(\rho\beta)x)Q_n'(x)x^{k-1}\,dx,$$

iar termenul integrat dispare, iarăşi în baza lui((13). Integrînd încă o dată prin părţi, termenul integrat va fi nul şi se deduce

$$\alpha_k = k\int_a^b Q_n(x)[(\rho\beta)(x)^{k-1}]'\mathrm{d}x = k\int_a^b \rho(x)Q_n(x)[\alpha(x)x^{k-1} + \beta'(x)x^{k-1} +$$

$$+ \beta(x)(k-1)x^{k-2}]\,\mathrm{d}x = (Q_n, p_k)_\rho$$

unde $p_k(x) = k\alpha(x)x^{k-1} + k\beta(x)x^{k-1} + k(k-1)\beta(x)x^{k-2}$ este o funcţie polinomială de grad k. Conform observaţiei 3 avem $\alpha_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Calculînd direct integrala care defineşte α_k, în baza lui (12) rezultă

$$0 = \alpha_k = \int_I \rho(x)x^k\,[\beta(x)Q_n''(x) + (\alpha+\beta')(x)Q_n'(x)]\mathrm{d}x =$$

$$= (\beta Q_n'' + (\alpha+\beta')Q_n', x^k)_\rho,\ k = 0, 1, \ldots, n-1:$$

utilizînd propoziţia 1 se deduce, (deoarece $\beta Q_n'' + (\alpha+\beta')Q_n'$ este o funcţie polinomială de gradul n)

$$\rho Q_n'' + (\alpha+\beta')Q_n' = a_n Q_n$$

coeficientul a_n obţinîndu-se scriind $Q_n(x) = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n$ şi identificînd coeficienţii lui x^n din ambii membri.

Iii se justifică utilizînd teoria funcţiilor olomorfe, mai precis formula integrală Cauchy (vezi cap. III, punctul 3) ;vom putea scrie, în baza lui (14) cu $A_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)}\,\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_z}\frac{\rho(\zeta)}{}\,\frac{\beta^n(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \tag{18}$$

unde C_z este un contur simplu care conţine la interior punctul z (se poate aplica formula integrală Cauchy deoarece din (12) se deduce că ρ este olomorfă în $\mathbb{C}$ exceptînd cel mult două puncte, zerourile lui β). Cu ajutorul lui (18) se poate scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)2\pi\mathrm{i}}\int_{C_z}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{t\beta(\zeta)}{\zeta - z}\right]^n\right\}\mathrm{d}\zeta, \tag{18'}$$

permutarea operaţiei de integrare pe C_z cu însumarea după indicele n fiind posibilă deoarece $\zeta - z \neq 0$ şi pentru $|t|$ suficient de mic, adică pentru $t \in B_r(0)$ cu r convenabil ales,

avem $\left|\dfrac{t\beta(\zeta)}{\zeta - z}\right| \leqslant |t| \max\limits_{\xi\in C_z}\left|\dfrac{\beta(\zeta)}{\zeta - z}\right| < 1$, ceea ce face ca seria să fie uniform convergentă ; scriind suma seriei geometrice din (18') şi utilizînd teorema reziduurilor (vezi cap. III, punctul 6) rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\,Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)}\cdot\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C_z}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z - t\beta(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{\rho(\zeta_1)}{\rho(z)}\cdot\frac{1}{1 - t\beta'(\zeta_1)}$$

ceea ce justifică (16) (deoarece β este funcție polinomială de grad maxim doi este ușor de constatat că pentru $|t|$ mic, dacă un zero al funcției $\zeta \to \zeta - z - t\beta(\zeta)$ se află în vecinătatea lui z, atunci al doilea zero, dacă există, nu se va afla în această vecinătate dacă $t \in B(0)$ cu $r > 0$ suficient de mic)

Exemple 2. Utilizînd formula lui Rodrigues și exemplul 1 se deduce:

i. Polinoamele lui Jacobi $J_n^{(p,q)}$ se pot scrie sub forma

$$J_n^{(p,q)}(x) = A_n(1-x)^{-p}(1+x)^{-q}[(1-x)^{p+n}(1+x)^{q+n}]^{(n)},\ n = 0,1,\ldots,\ A_n \in \mathbb{R}$$

$x \in \mathbb{R}$; în particular, dacă $p = q = 0$, deci în cazul polinoamelor Legendre avem

$$P_n(x) = A_n[(1-x^2)^n]^{(n)},\ A_n \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

iar dacă $p = q = \lambda - \frac{1}{2}$ (cazul polinoamelor ultrasferice) avem

$$\varphi_{\lambda,n}(x) = A_n(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]^{(n)},\ A_n \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, \ldots,\ \lambda > -\frac{1}{2}$$

ceeace face ca în cazul polinoamelor lui Cebîșev ($\lambda = 0$) să obținem

$$T_n(x) = A_n\sqrt{1-x^2}\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]^{(n)}$$

ii. Polinoamele lui Laguerre $L_{\lambda,n}$ se scriu sub forma

$$L_{\lambda,n}(x) = A_n x^{-\lambda}\, e^x\, [x^{\lambda+n}\, e^{-x}]^{(n)},\ A_n \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, \ldots,\ \lambda > -1$$

ii. Polinoamele lui Hermite se pot scrie sub forma

$$H_n(x) = A_n\, e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)},\ A_n \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, \ldots$$

Constantele A_n se pot obține din condiția de normare $\|Q_n\|_\rho = 1$ sau din orice altă ipoteză făcută asupra polinoamelor ortogonale în cauză; de exemplu, presupunînd $P_n(1) = 1$, pentru polinoamele Legendre se obține reprezentarea standard

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)},$$

deoarece din egalitatea

$$P_n(x) = A_n[(1-x^2)^n]^{(n)} = A_n[(1-x)^n\ (1+x)^n]^{(n)}$$

prin aplicarea formulei lui Leibniz de derivare a unui produs, se deduce $P_n(1) = A_n\, 2^n \cdot n!(-1)^n$.

3.i. Ecuația diferențială verificată de polinomul Jacobi $P_n^{(p,q)}$ va fi

$$(1-x^2)y'' + [q - p - (p+q+2)x]y' + n(n+p+q+1)y = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

în partieular, polinomul Legendre de gradul n va verifica ecuația diferențială

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

iar polinomul ultrasferic de gradul n, $\varphi_{\lambda,n}$ va fi o soluție particulară pentru ecuația diferențială

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0.$$

Polinomul Cebișev de gradul n, T_n va verifica ecuația diferențială

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

care, cu transformarea $x \mapsto \cos x$ se transformă în ecuația diferențială simplă

$$y'' + n^2y = 0$$

a cărei soluție generală fiind $C_1(n)\cos(nx) + C_2(n)\sin(nx)$, va rezulta

$$T_n(x) = C_1(n)\cos(n \arccos x),\ n = 0, 1, \ldots$$

deoarece $\sin(n \arccos x)$ nu este o funcție polinomială; de regulă $C_1(n)$ se determină din condiția ca x^n să aibă coeficientul egal cu unitatea și atunci $C_1(n) = 2^{1-n}$; prin urmare

$$T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \arccos x)$$

ii. Polinomul Laguerre de gradul n $L_{\lambda,n}$ va fi o soluție particulară pentru ecuația diferențială

$$xy'' + (\lambda + 1 - x)y' + ny = 0$$

iii. Polinomul Hermite de gradul n, H_n verifică ecuația diferențială

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

4.i. Funcția generatoare pentru polinoamele Legendre ($\alpha = 0$, $\beta(x) = 1 - x^2$) se poate scrie sub forma

$$K(t, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tz + t^2}}$$

deoarece conform cu iii din teorema 2, rădăcinile ecuației $\vartheta - z - t(1 - \vartheta^2) = 0$ sînt $\vartheta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4zt + 4t^2}}{2t}$ și evident, deoarece $\sqrt{1 + 4zt + 4t^2} = 1 + 2zt + t^2 + \ldots$ pentru $|t| < 1$ rezultă $\vartheta_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4zt + 4t^2}}{2t}$ deci

$$K(t, z) = \frac{1}{1 - 2t\vartheta_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4z + 4t^2}},$$

iar prin înlocuirea lui -2 prin t se obține funcția generatoare indicată.

ii. În cazul polinoamelor Laguerre ($\alpha(x) = \lambda - x$, $\beta(x) = x$) funcția generatoare va fi

$$K(t, z) = \frac{1}{(1 - t)^{\lambda+1}} e^{\frac{z}{t-1}},$$

deoarece aici $\vartheta - z - t\beta(\vartheta) = \vartheta(1 - t) - z$ și există o singură rădăcină $\vartheta_1 = \frac{z}{1 - t}$,

iar $\frac{\rho(\vartheta_1)}{\varrho(z)} \cdot \frac{1}{1 - t\beta'(\vartheta_1)} = \frac{(z - z_1)^{\lambda}\ e^{-z_1+z}}{1 - t}$ conduce la funcția indicată.

iii. Pentru polinoamele Hermite H_n în care $\rho(z) = e^{-z^2}$, $\alpha(z) = -2z$, $\beta(z) = 1$ se obține după calcule simple, funcția generatoare

$$K(t, z) = e^{-2zt+t^2}$$

O ultimă proprietate importantă a unui șir de polinoame ortogonale este dată de

Propoziția 2. *Ecuația algebrică $Q_n(z) = 0$, în care Q_n este polinomul de gradul $n \geq 1$ din șirul $(Q_n)_{n\geq 0}$ de polinoame ortogonale cu pondere $\rho \in C(I)$ pe intervalul $I \in \mathbb{R}$, admite în I n rădăcini distincte.*

Deoarece $Q_0(x) = 1$, pentru $n \geq 1$ avem $(Q_0, Q_n)_\rho = 0$, adică $\int_I (\rho Q_n)(x)\mathrm{d}x = 0$,

ceea ce implică existența punctelor $x_1, \ldots, x_m \in I$ în vecinătatea cărora funcția continuă $\rho\, Q_n$ trebuie să-și schimbe semnul; cum $\rho(x) > 0$, $x \in I$, neapărat $Q_n(x_j) = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Dacă $m = n$, propoziția este justificată și fie $m < n$; funcția polinomială $(x - x_1)\ldots(x - x_m) = p_m(x)$ își schimbă semnul tot în vecinătatea punctelor $x_1, \ldots, x_m$ și de aceea avem $(p_m Q_n)(x) \geq 0$, $x \in I$ (dacă $(p_m Q_n) \leq 0$, prin schimbare de semn ajungem la situația (anterioară) și cum produsul $p_m Q_n$ nu este funcția nulă, rezultă $\int_I (\rho p_m Q_n)(x)\mathrm{d}x > 0$ sau

$Q_n, p_m)_\rho > 0$ ceea ce contrazice observația 3.

Definiția 3. *Vom spune că suma $A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n)$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ fiind un interval, este o formulă de cuadratură având gradul de exactitate $k \in \mathbb{N}$ pentru integrala $\int_I (\rho f)(x)\mathrm{d}x$, $\rho(x) \geq 0$, $X \in I \subset J$ dacă avem*

$$\int_I (\rho f)(x)\,\mathrm{d}x = A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n) \tag{18}$$

pentru toate funcțiile polinomiale f având gradul k; dar există o funcție polinomială f de gradul $k + 1$ pentru care egalitatea de mai sus nu este adevărată.

Consecința 1. *Dacă suma $A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n)$ este o formulă de cuadratură pentru integrala $\int_I (\rho f)(x)\,\mathrm{d}x$ având gradul de exactitate $n - 1$, atunci acest grad de exactitate devine $2n - 1$ dacă $x_1, \ldots, x_n \in I$ sînt rădăcinile polinomului Q_n, unde Q_n este polinomul ortogonal având gradul n din șirul $(Q_n)_{n\geq 0}$ de polinoame ortogonale pe I cu pondere ρ.*

Prin ipoteză are loc egalitatea (18) dacă $f = I_{n-1}$, I_{n-1} fiind funcție polinomială de gradul $n - 1$; fie f_m o funcție polinomială de grad $n \leq m < 2n$. Conform regulei împărți-

rii cu rest, are loc egalitatea $f_m = Q_n q_{m-n} + r_p$, gradul p al funcției polinomiale r_p fiind $< n$; rezultă $f_m(x_k) = Q_n(x_k) q_{m-n}(x_k) + r_p(x_k) = r_p(x_k)$, $k = 1, \ldots n$, deoarece $Q_n(x_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. În plus,

$$\int_I (\rho f_m)(x)\mathrm{d}x = \int_I (\rho\, Q_n q_{m-n})(x)\mathrm{d}x + \int_I (\rho r_p)(x)\mathrm{d}x = \int_I (\rho r_p)(x)\mathrm{d}x,$$

deoarece $\int_I (\rho\, Q_n q_{m-n})(x)\mathrm{d}x = (Q_n, q_{m-n})_\rho = 0$, gradul lui q_{m-n} fiind mai mic decît n și aplicînd observația 3. În concluzie, deoarece $\int_I (\rho r_p)(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} A_j r_p(x_j) =$

$= \sum_{j=1}^{n} A_j f_m(x_j)$, (18), are gradul de exactitate $< 2n$ și nu poate avea gradul de exactitate egal cu $2n$ întrucît pentru $f = Q_n^2$ din (18) ar rezulta $\|Q_n\|_\rho^2 = 0$.

Observația 4. Pentru orice f funcție integrabilă pe $I \subset \mathbb{R}$ și orice n puncte $x_1, \ldots x_n \in I$ distincte se poate construi o formulă de cuadratură de tipul (18) avînd gradul de exactitate $n - 1$, construind polinomul de interpolare Lagrange cu nodurile $x_1, \ldots, x_n$ pentru funcția f; deoarece (vezi A.M. cap. 0, punctul 8) polinomul de interpolare se scrie

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^{n} L_{n,j}(x)\, f(x_j),$$

$$L_{n,j}(x) = \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_j - x_1) \ldots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \ldots (x_j - x_n)}$$

se deduce

$$\int_I (\rho L_n)(x)\, \mathrm{d}x = \int_I \left[\sum_{j=1}^{n} L_{n,j}(x) f(x_j)\right] \rho(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j),\ A_j = \int_I L_{n,j}(x)\ \rho(x)\, \mathrm{d}x$$

și dacă f este funcție polinomială de grad $n - 1$ se știe că $L_n(x) =$

$= f(x)$, deci $\int_I (\rho f)(x)\mathrm{d}x = \int_I (\rho L_n)(x)\, \mathrm{d}x.$

Observația 5. *Se poate arăta că șirul de polinoame Laguerre* $(L_{\lambda,n})_{n\geqslant 0}$ $\lambda \geqslant 0$ *formează o bază în spațiul* $L_2([0,\infty])$, *iar șirul de polinoame Hermite* $(H_n)_{n\geqslant 0}$ *definește o bază în spațiul* $L_2(\mathbb{R})$. *Asupra acestor fapte vom reveni ulterior.*

5. Ortogonalitatea funcțiilor proprii în spații Sobolev

În acest punct ne vom ocupa de o categorie importantă de elemente ortogonale care vor fi utilizate ulterior în teoria ecuațiilor diferențiale și a ecuațiilor cu derivate parțiale. Pentru aceasta, vom utiliza spațiile Sobolev $\overset{\circ}{H}_1$ și $\overset{\circ}{H}_0 = L_2$ definite în cap. I, punctul 7, cu mențiunea că rezultatele obținute pot fi extinse și la spațiile Sobolev $\overset{\circ}{H}_m$ $m > 1$.

Fie $B : \overset{\circ}{H}_1 \times \overset{\circ}{H}_1 \to \mathbb{R}$ o formă biliniară, adică scriind $B = B(\varphi, \psi)$, $\varphi, \psi \in \overset{\circ}{H}_1$ să avem

(1) $B(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1 B(\varphi_1, \psi) + a_2 B(\varphi_2, \psi)$ pentru orice φ_1, φ_2, $\psi \in \overset{\circ}{H}_1$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

(1′) $B(\varphi, b_1\psi_1 + b_2\psi_2) = b_1 B(\varphi, \psi_1) + b_2 B(\varphi_2, \psi_2)$ pentru orice φ, ψ_1, $\psi_2 \in \overset{\circ}{H}_1$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Vom mai face asupra lui B încă trei ipoteze :

i. *Forma biliniară* B *este simetrică*, adică $B(\varphi, \psi) = B(\psi, \varphi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in \overset{\circ}{H}_1$

ii. *Forma biliniară* B *este mărginită* în $\overset{\circ}{H}_1$, adică există $a \in \mathbb{R}$ astfel încît să avem

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant a \, \|\varphi\|_1 \, \|\psi\|_1 \tag{2}$$

unde $\|\varphi\|_1 = \sqrt{(\varphi, \varphi)_1}$, $(\varphi, \psi)_1$ fiind produsul scalar din $\overset{\circ}{H}_1$.

iii. *Forma biliniară* B *este strict coercitivă* pe $\overset{\circ}{H}_1$, adică are loc inegalitatea

$$B(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \, \|\varphi\|_1^2 \tag{3}$$

pentru orice $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1$ și un număr real k_1, $k_1 > 0$.

Observația 1. De regulă forma B va fi coercitivă pe $\overset{\circ}{H}_1$ dacă există numerele reale k_1, k_0, $k_1 > 0$ astfel încît pentru orice $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1$ să aibă loc inegalitatea

$$B(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \, \|\varphi\|_1^2 - k_0 \, \|\varphi\|_0^2 \tag{4}$$

unde $\|\varphi\|_0 = \sqrt{(\varphi, \varphi)_0}$, $(\varphi, \psi)_0$ fiind produsul scalar din L_2 ; deci vom spune că o formă B este strict coercitivă dacă în (4) avem $k_0 = 0$ și

vom vedea ulterior că uneori această ipoteză nu constituie o restricție pentru B.

Definiția 1. *Vom spune că elementul* $u \in \mathring{H}_1$ *este o funcție proprie atașată formei* B *și scalarului* $\lambda \in \mathbb{C}$ *dacă* $\|u\|_0 = 1$ *și se verifică egalitatea*

$$B(\varphi, u) - \lambda(\varphi, u)_0 = 0 \text{ pentru orice } \varphi \in \mathring{H}_1; \tag{5}$$

scalarul λ *se va numi în acest caz valoarea proprie corespunzătoare funcției proprii* u *și formei biliniare* B.

Observația 2. În baza continuității formei B (din liniaritatea și mărginirea lui B se poate deduce continuitatea lui B în raport cu fiecare argument, după un raționament identic cu cel utilizat în cap. I, punctul 2, în cazul formelor liniare), egalitatea (5) este suficient să fie verificată doar pentru funcții test φ (reamintim că dacă $D_n \subset \mathbb{R}^n$ este domeniul mărginit în care se realizează considerațiile, φ va fi funcție-text dacă φ este indefinit derivabilă în D_n, iar supp $\varphi \subset D_n$); într-adevăr dacă $\varphi \in \mathring{H}_1$, va exista un șir de funcții-test $(\varphi_m)_{m \geqslant 1}$ astfel încît $\|\varphi_m - \varphi\|_1 \to 0$ cînd $m \to \infty$, ceea ce implică $\lim_{m\to\infty} B(\varphi_m, u) = B(\lim_{m\to\infty} \varphi_m, u) = B(\varphi, u)$ și $\lim_{m\to\infty} (\varphi_m, u)_0 = (\lim_{m\to\infty} \varphi_m, u)_0 = (\varphi, u)_0$, continuitatea produsului scalar $(\varphi, \psi)_0$ fiind evidentă deoarece $\|\varphi\|_0 \leqslant \|\varphi\|_1$.

Teorema 1. *Valorile proprii ale formei biliniare* B *care verifică* i—iii *sînt reale, pozitive, și cel mult egale cu* k_1, *iar la valori proprii diferite corespund funcții proprii ortogonale în* L_2.

Punînd în (5) $\varphi = u$, deoarece $(u, u_0) = \|u\|_0^2 = 1$ se deduce, utilizînd și (3):

$$\lambda = B(u, u) \geqslant k_1 \|u\|_1^2 \geqslant k_1 \|u\|_0^2 = k_1$$

Fie acum λ_1, λ_2 valori proprii distincte ale formei bilinare B, deci

$$B(\varphi, u_1) = \lambda_1(\varphi, u_1)_0,\ B(\varphi, u_2) = \lambda_2(\varphi, u_2)_0; \tag{6}$$

dacă u_1 și u_2 sînt funcții proprii ale lui B corespunzînd valorilor proprii λ_1 respectiv λ_2, punînd în prima relație din (6) $\varphi = u_2$, iar în a doua relație (6) $\varphi = u_1$ se deduc egalitățile

$$B(u_2, u_1) = \lambda_1(u_2, u_1)_0,\ B(u_1, u_2) = \lambda_2(u_1, u_2)_0$$

care în baza simetriei lui B conduc la egalitatea $\lambda_1(u_1, u_2)_0 = \lambda_2(u_1, u_2)_0$ sau $(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2)_0 = 0$ deci $(u_1, u_2)_0 = 0$ pentru că $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$.

Observația 3. Scriind în (5) $\varphi = u_j$, $u = u_k$ unde u_j și u_k sînt funcții proprii ale formei B, rezultă relația importantă

$$B(u_j, u_k) = \lambda_j \delta_{jk} \tag{7}$$

dacă λ_j este valoarea proprie atașată funcției proprii u_j. Astfel din (7) se obține legătura dintre funcțiile proprii ale formei B și valorile proprii corespunzătoare :

$$\lambda_j = B(u_j, u_j). \tag{7'}$$

Observația 4. Unei valori proprii λ îi pot corespunde mai multe funcții proprii liniar independente care, prin procedeul de ortogonalizare pot fi presupuse ortogonale în L_2.

Teorema 2. *Prima valoare proprie* λ_1 *atașată formei biliniare* B care *verifică* i—iii *se poate obține cu ajutorul relației*

$$\lambda_1 = \inf_{\varphi \in \mathring{H}_1, \|\varphi\|_0 = 1} B(\varphi, \varphi)$$

minimul lui B *fiind efectiv atins de o funcție proprie* u_1 *atașată formei* B *și corespunzătoare valorii proprii* λ_1.

Deoarece B are valori reale, iar $B(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_1^2 > 0$ va exista numărul real $\lambda_1 = \inf B(\varphi, \varphi)$ pentru $\varphi \in \mathring{H}_1$ și $\|\varphi\|_0 = 1$. Mai rămîne de arătat că acest minim λ_1 este efectiv atins în $\mathring{H}_1$; pentru acesta fie $(\varphi_j)_{j \geqslant 1}$ un șir din $\mathring{H}_1$ astfel încît $\|\varphi_j\|_0 = 1$ și $\lambda_1 \leqslant B(\varphi_j, \varphi_j) < \lambda_1 + \frac{1}{j}$, $j = 1, 2, \ldots$ (existența acestui șir rezultă din faptul că λ_1 este marginea inferioară strictă a numerelor $B(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in \mathring{H}_1$ cu $\|\varphi\|_0 = 1$). Fie $v \in \mathring{H}_1$, deci $\|v\|_1 \leqslant M$; cum $\|v\|_0 \leqslant \|v\|_1$, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$ avem $\|\varphi_j + \varepsilon v\|_0 \leqslant \|\varphi_j\|_0 + |\varepsilon| \, \|v\|_0 \leqslant 1 + |\varepsilon| M$ și deoarece $(\varphi_j + \varepsilon v)_{j \geqslant 1}$ este de asemenea un șir din $\mathring{H}_1$ pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, avem

$$B\left(\frac{\varphi_j + \varepsilon v}{\|\varphi_j + \varepsilon v\|_0}, \frac{\varphi + \varepsilon v}{\|\varphi + \varepsilon v\|_0} \right) \geqslant \lambda_1, \; j = 1, 2, \ldots$$

rezultînd (din proprietățile lui B)

$$B(\varphi_j + \varepsilon v, \varphi_j + \varepsilon v) \geqslant \lambda_1 \|\varphi_j + \varepsilon v\|_0^2, \; j = 1, 2, \ldots$$

Calculînd membrul sting și ținînd seama că

$$\|\varphi_j + \varepsilon v\|_0^2 = (\varphi_j + \varepsilon v, \varphi_j + \varepsilon v)_0 = \|\varphi_j\|_0^2 + 2\varepsilon(\varphi_j, v)_0 + \varepsilon^2 \|v\|_0^2$$

rezultă că ultima inegalitate se poate transcrie sub forma

$$\varepsilon^2 [B(v, v) - \lambda_1 \|v\|_0^2] + 2\varepsilon [B(\varphi_j, v) - \lambda_1 (\varphi_j, v)_0] + [B(\varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1 \|\varphi_j\|_0^2] \geqslant 0 ;$$

or trinomul de gradul al doilea din membrul sting al acestei inegalități va păstra semn constant pozitiv dacă și numai dacă avem

$$B(v, v) - \lambda_1 \|v\|_0^2 \geqslant 0 \text{ și } [B(\varphi_j, v) - \lambda_1 (\varphi_j, v)_0]^2 - [B(v, v) - \lambda_1 \|v\|_0^2][B(\varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1] \leqslant 0 ;$$

cum prima inegalitate este evidentă, a doua inegalitate scrisă sub forma

$$[B(\varphi_j, v) - \lambda_1 (\varphi_j, v)_0]^2 \leqslant [B(\varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1][B(v, v) - \lambda_1 \|v\|_0^2], \; j = 1, 2, \ldots$$

arată că deoarece $\lim_{j\to\infty} B(\varphi_j, \varphi_j) = \lambda_1$, avem neapărat

$$\lim_{j\to\infty} [B(\varphi_j, v) - \lambda_1(\varphi_j, v)_0] = 0 \tag{8}$$

factorul $B(v, v) - \lambda_1 \|v\|_0^2$ fiind finit pentru orice $v \in \overset{\circ}{H}_1$. Șirul $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ este mărginit în $\overset{\circ}{H}_1$ deoarece din (3) se deduce (folosind și inegalitatea $B(\varphi_j, \varphi_j) < \lambda_1 + \frac{1}{j}$

$$\|\varphi_j\|_1^2 \leqslant \frac{1}{k_1} B(\varphi_j, \varphi_j) < \frac{1}{k_1}\left(\lambda_1 + \frac{1}{j}\right) < \frac{1}{k_1}(\lambda_1 + 1)$$

și deci, în baza teoremei lui Rellich (teorema 4 de la punctul 2) va exista un șubșir al acestui șir convergent către $u_1 \in L_2$; vom conveni să notăm prin $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ chiar acest subșir. Din (8) rezultă

$$\lim_{j\to\infty} [B(\varphi_j, v) - \lambda_1(\varphi_j, v)_0] = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} [B(\varphi_k, v) - \lambda_1(\varphi_k, v)_0] = 0,$$

de unde, prin diferență, se deduce

$$\lim_{k,j\to\infty} [B(\varphi_j - \varphi_k, v) - \lambda_1(\varphi_j - \varphi_k, v)_0] = 0;$$

v fiind arbitrar în H_1 se poate presupune $v = \varphi_j - \varphi_k$ rezultînd

$$\lim_{k,j\to\infty} [B(\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k) - \lambda_1 \|\varphi_j - \varphi_k\|_0^2] = 0.$$

Șirul $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ fiind convergent în L_2, se deduce $\lim_{j,k\to\infty} \|\varphi_j - \varphi_k\|_0 = 0$ ceea ce face să avem $\lim_{k,j\to\infty} B(\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k) = 0$; utilizînd iarăși (3) rezultă

$$\|\varphi_j - \varphi_k\|_1^2 \leqslant \frac{1}{k_1} B(\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k) \to 0,\ j, k \to \infty.$$

Prin urmare șirul $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ din $\overset{\circ}{H}_1$ va fi un șir fundamental din $\overset{\circ}{H}_1$ și cum $\overset{\circ}{H}_1$ este un spațiu Hilbert va exista $u_1^* \in \overset{\circ}{H}_1$ astfel încît $\varphi_j \to u_1^*$, $j \to \infty$, dar $u_1^* = u_1$, u_1 fiind limita în L_2 a aceluiași șir deoarece

$$\|u_1^* - u_1\|_0 \leqslant \|u_1^* - \varphi_j\|_0 + \|\varphi_j - u_1\|_0 \leqslant \|u_1^* - \varphi_j\|_1 + \|\varphi_j - u_1\|_0 \to 0,$$

$j \to \infty$, ceea ce înseamnă $\|u_1^* - u_1\|_0 = 0$ Apoi $\|u_1\|_0 = \|\lim_{j\to\infty} \varphi_j\|_0 = \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j\|_0 =$

$= \lim_{j\to\infty} 1 = 1$, iar din (8), pentru $v = \varphi_j$ rezultă

$$\lim_{j\to\infty} [B(\varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1(\varphi_j, \varphi_j)_0] = \lim_{j\to\infty} B(\varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1 = 0$$

adică, deoarece $\lim B(\varphi_j, \varphi_j) = B(u_1, u_1)$ (limita fiind calculată în $\overset{\circ}{H}_1$) rezultă $\lambda_1 = B(u_1, u_1)$, ceea ce înseamnă că $u_1 \in \overset{\circ}{H}_1$ este un element pentru care forma B își atinge efectiv marginea inferioară.

Folosind iarăși (8) cu $v = \varphi$ se deduce egalitatea

$$B(\varphi, u_1) = \lambda_1(\varphi, u_1)_0$$

pentru orice $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1$ deci u_1 este o funcție proprie atașată formei B corespunzînd valorii proprii λ_1.

Observația 5. Din teorema 2 nu rezultă unicitatea funcției proprii u_1, deoarece pot exista subșiruri ale șirului inițial $(\varphi_j)_{j\geqslant 0}$, din demonstrația teoremei, convergente către elemente distincte din H_1; numărul maxim de funcții proprii liniar independente atașate lui B și corespunzînd valorii proprii λ_1 va defini multiplicitatea acesteia. În baza observației 4, aceste funcții proprii pot fi presupuse ortogonale așa că egalitatea (7) nu-și pierde valabilitatea.

Teorema 5. *Dacă B este o formă biliniară care verifică ipotezele* i—iii, *va exista un șir crescător $\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ din intervalul $[k_1, \infty[$ de valori proprii atașate formei B astfel încît $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = \infty$; în ipoteza că u_j este o funcție proprie atașată formei B corespunzătoare valorii proprii λ_j avem*

$$\lambda_j = B(u_j, u_j),$$

iar λ_j este marginea inferioară a mulțimii de numere $B(\varphi, \varphi)$ cu $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1$, $\|\varphi\|_0 = 1$ și $(u_k, \varphi)_0 = 0$, unde u_k sînt toate funcțiile proprii ale formei B corespunzînd valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{j-1}$.

Pentru demonstrație este suficient să tratăm cazul lui λ_2, pentru celelalte valori proprii justificările decurgînd în mod similar, cu mici modificări. Să arătăm deci că avem

$$\lambda_2 = \inf_{\varphi \in A_2 \| \|\varphi\|_0 = 1} B(\varphi, \varphi) \tag{9}$$

unde $A_2 \subset \overset{\circ}{H}_1$ este subspațiul închis generat de acoperirea liniară a elementelor din $\overset{\circ}{H}_1$ care sînt ortogonale pe toate funcțiile proprii atașate formei B și care corespund valorii proprii λ_1. Or deoarece A_2 este un spațiu Hilbert, (9) se justifică exact la fel ca în demonstrația teoremei 2, înlocuind spațiul Hilbert $\overset{\circ}{H}_1$ prin spațiul Hilbert A_2. Deci în A_2 va exista cel puțin un element u_2 astfel încît $\|u_2\|_0 = 1$ și

$$B(\psi, u_2) = \lambda_2(\psi, u_2)_0, \tag{10}$$

egalitatea avînd loc pentru orice $\psi \in A_2$. Însă (10) rămîne valabilă și dacă ψ se înlocuiește prin $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1$, deoarece $\varphi = \sum\limits_p a_p u_{1,p} + \psi$ (cu $\psi \in A_2$, $u_{1,p}$ $p = 1, 2, \ldots$ fiind toate funcțiile proprii liniar independente atașate lui B și λ_1); deci avem

$$B(\varphi, u_2) - \lambda_2(\varphi, u_2)_0 = B\left(\sum_p a_p u_{1,p} + \psi, u_2\right) - \lambda_2\left(\sum_p a_p u_{1,p} + \psi, u_2\right)_0 = B(\psi, u_2) +$$

$$+ \sum_p a_p B(u_{1,p}, u_2) - \lambda_2 \sum_p a_p (u_{1,p}, u_2)_0 - \lambda_2(\psi, u_2)_0 = \sum_p a_p [B(u_{1,p}, u_2) - \lambda_2(u_1, u_2)_0].$$

ultima egalitate obținîndu-se în baza lui (10 ; cum $(u_1, p, u_2)_0 = 0$ pentru orice p și) $B(u_1, p, u_2) = \lambda_1(u_1, p, u_2) = 0$ se deduce

$$B(\varphi, u_2) = \lambda_2(\varphi, u_2)_0 \text{ oricare ar fi } \varphi \in \overset{\circ}{H}_1 \qquad (10')$$

și u_2 este într-adevăr funcția proprie atașată formei B și valorii proprii λ_2. Evident $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ deoarece λ_2 este marginea inferioară a mulțimii de numere reale $B(\varphi, \varphi)$ ca și λ_1, dar pentru λ_2 apar condiții în plus (condițiile de ortogonalitate pe funcțiile proprii obținute prin teorema 2) ceea ce face ca marginea inferioară să nu descrească. Vom avea $\lambda_1 < \lambda_2$ (cazul $\lambda_1 = \lambda_2$ nu poate fi luat în discuție avînd în vedere că atunci una și aceeași funcție proprie u va trebui să aparțină acoperirii liniare generată de funcțiile proprii corespunzătoare valorii proprii λ_1 cît și complementului ortogonal al acestei acoperiri, ca fiind funcție proprie corespunzînd valorii proprii λ_2, ceea ce înseamnă $u = 0$, imposibil, deoarece $\|u\|_0 = 1$).

De asemenea, λ_2 este valoarea proprie cea mai apropiată de λ_1, deoarece, în caz contrar, dacă am avea $\lambda_1 < \lambda^* < \lambda_2$, va rezulta $\lambda^* = \inf_{\varphi \in A_2,\ \|\varphi\|_0 = 1} B(\varphi, \varphi) < \lambda_2 =$ $= \inf_{\varphi \in A_2,\ \|\varphi\|_0 = 1} B(\varphi, \varphi)$ ceea ce nu se poate.

Mai rămîne de arătat că $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = \infty$; cum șirul valorilor proprii este crescător, dacă limita anterioară nu este adevărată, vom avea $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = \alpha \in R$ și atunci vom deduce din (3) și (7) :

$$\|u_j\|_1^2 \leqslant \frac{1}{k_1} B(u_j, u_j) = \frac{\lambda_j}{k_1} \to \frac{\alpha}{k_1} \qquad (j \to \infty).$$

ceea ce implică mărginirea în $\overset{\circ}{H}_1$ a șirului $(u_j)_{j \geqslant 1}$ din $\overset{\circ}{H}_1$, format din toate funcțiile proprii atașate formei B. În baza teoremei lui Rellich va exista un subșir $(v_k)_{k \geqslant 1}$ al șirului $(u_j)_{j \geqslant 1}$ convergent în L_2 către $f \in L_2$; or atunci șirul $(v_k)_{k \geqslant 1}$ va fi fundamental în L_2 ceea ce nu se poate deoarece $\|v_k - v_{k'}\|_0^2 = (v_k - v_{k'}, v_k - v_{k'})_0 = \|v_k\|_0^2 + \|v_{k'}\|_0^2$ (avem $v_k \perp v_{k'}$, pentru $k \neq k'$), deci $\|v_k - v_{k'}\|_0 = \sqrt{2}$ și $\|v_k - v_{k'}\|_0$ nu tinde la zero.

Vom arăta acum că mulțimea funcțiilor proprii atașate unei forme biliniare B care verifică ipotezele i, ii și iii formează o bază în $\overset{\circ}{H}_1$, adică pentru orice $f \in \overset{\circ}{H}_1$ se poate scrie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k, \qquad a_k = (f, u_k)_0, \qquad (12)$$

convergența seriei din (12) fiind în topologia lui $\overset{\circ}{H}_1$; de remarcat că șirul $(u_k)_{k \geqslant 1}$ al tuturor funcțiilor proprii nu este ortogonal în $\overset{\circ}{H}_1$ ci în L_2.

Teorema 4. *Fie $f \in \overset{\circ}{H}_1$; atunci sînt valabile relațiile :*

i. $\|g_k\|_1 \to 0\ (k \to 0)$ *dacă* $g_k = f - \sum_{j=1}^{k} a_j u_j$ *cu* $a_j = (f, u_j)_0$

ii. $\|f\|_0^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f, u)^2$

iii. $B(f, f) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, u)^2$

dacă $(u_j)_{j\geqslant 1}$ este șirul din $\overset{\circ}{H}_1$ definit prin toate funcțiile proprii ale formei biliniare B mărginită, simetrică și strict coercitivă, $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ fiind șirul valorilor proprii ale aceleiași forme B.

Deoarece șirul funcțiilor proprii $(u_i)_{j\geqslant 1}$ este ortonormal în L_2 pentru orice $f\in L_2$, seria pătratelor coeficienților Fourier $a_n=(f, u_n)$ este convergentă (inegalitatea lui Bessel); avem

$$B(g_k, g_k) = B\left(f-\sum_{j=1}^{k} a_j u_j, f-\sum_{j=1}^{k} a_j u_j\right) = B(f,f) - 2\sum_{j=1}^{k} a_j B(f, u_j) + \\ + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} a_j a_l B(u_j, u_l)$$

adică, ținînd seama că $B(f, u_j) = \lambda_j (f, u_j)_0$, $B(u_j, u_l) = \delta_{jl}\lambda_j$ se găsește

$$B(g_k, g_k) = B(f,f) - 2\sum_{j=1}^{k} a_j^2\lambda_j + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} a_j a_l \lambda_j \delta_{il} = B(f,f) - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j a_j^2.$$

Cum prin ipoteză avem $B(g_k, g_k)\geqslant k_1\|g_k\|_1^2$ rezultă

$$B(f,f) - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j a_j^2 \geqslant k_1\|g_k\|_1^2 > 0,$$

adică $\sum_{j=1}^{k}\lambda_1 a_j^2 \leqslant B(f,f)$ ceea ce arată că seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n^2$ converge. Fie acum $k' > k$; avem

$$k_1\|g_{k'} - g_k\|_1^2 \leqslant B(g_{k'}, -g_k, g_{k'} - g_k) = B\left(\sum_{j=k+1}^{k'} a_j u_j, \sum_{j=k+1}^{k'} a_j u_j\right) =$$

$= \sum_{j=k+1}^{k'}\lambda_j a_j < \varepsilon$, $k' > k \leqslant N(\varepsilon)$, deci șirul $(g_k)_{k\geqslant 1}$ este un șir fundamental din $\overset{\circ}{H}_1$, deci convergent către $g\in\overset{\circ}{H}_1$. Deoarece

$$(g_k, u_j)_0 = \left(f-\sum_{l=1}^{k} a_l u_l, u_j\right)_0 = (f, u_j)_0 - \sum_{l=1}^{k} a_l \delta_{lj} = 0,\ j = 1, \ldots, k$$

rezultă $g_k\in A_{k+1}$, A_{k+1} fiind spațiul definit la demonstrația teoremei pentru $k=1$ (deci A_{k+1} este complementul ortogonal în $\overset{\circ}{H}_1$ al subspațiului din $\overset{\circ}{H}_1$ generat de funcțiile proprii ale formei B, corespunzînd valorilor proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$). Se deduce

$$B\left(\frac{g_k}{\|g_k\|_0}, \frac{g_k}{\|g_k\|_0}\right) \geqslant \lambda_{k+1}$$

deoarece λ_{k+1} este marginea inferioară a mulțimii de numere $B(\varphi, \varphi)$ cu $\|\varphi\|_0 = 1$, $\varphi \in H_1$, $(\varphi, u_j)_0 = 0$, $j \leqslant k$; așadar rezultă

$$\|g_k\|_0^2 \leqslant \frac{B(g_k, g_k)}{\lambda_{k+1}} = \frac{B(f, f) - \sum_{j+1}^{n} \lambda_j a_j^2}{\lambda_{k+1}} \leqslant \frac{B(f, f)}{\lambda_{k+1}} \to 0, \quad k \to \infty \text{ (deoarece } \lim_{k\to\infty} \lambda_k =$$

$= \infty$), adică $\lim_{k\to\infty} \|g_k\|_0^2 = \|g\|_0^2 = 0$ deci $g = 0$ și i este justificat.

Egalitatea lui Parseval din ii se obține imediat calculînd $\|g_k\|_0^2 = \|f - \sum_{j=1}^{k} a_j u_j\|_0^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{k} a_j^2$ și ținînd seama că $g_k \to 0$ în L_2. Pentru a justifica iii vom scrie (3) pentru $g_k \in \overset{\circ}{H}_1$:

$$0 \leqslant k_1 \|g_k\|_1^2 \leqslant B(g_k, g_k) = B(f, f) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^2 \leqslant a\|g_k\|_1^2.$$

ultima inegalitate obținîndu-se cu ajutorul lui (2). Deoarece $g_k \to 0$ în L_2, avem $g_k \to 0$ în $\overset{\circ}{H}_1$, deci $\|g_k\|_1 \to 0$ ceea ce coincide cu iii.

Rezultatele din acest punct sînt foarte importante pentru teoria ecuațiilor diferențiale sau cu derivate parțiale și ele conțin, în particular, unele situații descrise anterior (vezi punctele 3 și 4) care vor fi schițate în exemplele următoare.

Exemplul 1. Fie ecuația diferențială $y'' + \lambda y = 0$ la care atașăm condiția de periodicitate, cu perioada 2π, $y(0) = y(2\pi)$ $y'(0) = y'(2\pi)$; cu alte cuvinte, nu ne interesează orice soluție a ecuației considerate ci numai soluțiile periodice, cu perioada 2π. Această problemă poate fi tratată pe cale elementară (vezi A.M. cap. 0 punctul 7) dar se poate încadra și în teoria prezentată mai sus. Astfel fie $\overset{\circ}{H}_1$ spațiul Sobolev definit pe $[0,2\pi]$ cu ajutorul produsului scalar

$$(f, g)_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)g(x) + f'(x)g'(x)]\mathrm{d}x, \quad f, g \in \overset{\circ}{\mathfrak{L}} \text{ și să calculăm produsul scalar } (y'' +$$

$+ \lambda y, \varphi)_1$ cu $\varphi \in \overset{\circ}{\mathfrak{L}}$: integrînd prin părți, deoarece termenul integrat este nul $[\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0]$ se deduce, dacă y verifică ecuația diferențială $(y'' + \lambda y = 0$, egalitatea

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y'(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \lambda \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(x)\,\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$$

pe care o vom putea scrie sub forma (5) notînd

$$B(\varphi, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi'(x)y'(x)\mathrm{d}x, \quad (\varphi, y)_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x)y(x)\mathrm{d}x. \tag{13}$$

Așadar, pentru orice funcție test pe intervalul $[0,2\pi]$, fie ea φ, avem egalitatea

$$B(\varphi, y) - \lambda(\varphi, y)_0 = 0 \tag{14}$$

cu notațiile (13). Dacă vom verifica ipotezele i—iii de mai sus va rezulta că teoremele 1—4 din acest punct sînt aplicabile și se va deduce existența unei infinități numărabile de valori proprii $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ și a unei infinități numărabile de funcții proprii $(y_n)_{n\geqslant 0}$ (cu alte cuvinte, nu pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ ecuația diferențială $y'' + \lambda y = 0$ admite soluții periodice, cu perioda 2π, ci numai dacă $\lambda = \lambda_n$, lui λ_n corespunzîndu-i cel mult două funcții proprii liniar independente, ecuația în cauză fiind de ordinul al doilea). Or, din (13) liniaritatea lui B în raport cu φ și y este evidentă, iar deoarece prin aplicarea inegalității lui Schwartz se scrie

$$|B(\varphi, \psi)| \leqslant \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi'(x)|\,|\psi'(x)|\,dx = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi'^2(x)\,dx}\,\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi'^2(x)dx} \leqslant \|\varphi\|_1\|\psi\|_1$$

rezultă că forma B este mărginită : cum simetria lui B este iarăși evidentă, mai rămîne de justificat strict-coercivitatea lui B : or deoarece

$$B(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi'^2(x)dx = \|\varphi\|_1^2 - \|\varphi\|_0^2$$

și $\|\varphi\|_0 \leqslant \|\varphi\|_1$, rezultă $B(\varphi, \varphi) \geqslant a\|\varphi\|_1^2$.

Evident, valorile proprii în cauză vor fi $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, \ldots$ funcțiile proprii corespunzătoare putînd fi scrise sub forma complexă e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$ (lui $\lambda_n = n^2$, $n \neq 0$, corespunzîndu-i funcțiile proprii liniar indepedente e^{inx} și e^{-inx}) sau sub forma reală $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ (lui $\lambda_n = n^2$ corespunzîndu-i două funcții proprii liniar independente $\cos nx$ și $\sin nx$, exceptînd cazul $n = 0$ cînd apare o singură funcție proprie $y_0(x) = 1$).

Așadar, situația din acest exemplu a fost expusă în cazul complex al punctului 3.

2. În cazul ecuației diferențiale (15) de la punctul 4

(15) $\beta y'' + (\alpha + \beta')y' + \lambda y = 0$, $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, $\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, $|\alpha_1| + |\beta_2| > 0$ pentru $\lambda_n = -n[(n+1)\beta_2 + \alpha_1]$, $n \geqslant 0$ se obțin soluțiile particulare $y_n = Q_n$, Q_n fiind polinomul de gradul n din șirul de polinoame $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ ortogonale pe intervalul $[a, b]$ cu pondere ρ, iar $\dfrac{\rho'}{\rho} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $(\rho\beta)(a) = 0$, $(\rho\beta)(b) = 0$.

Înmulțind ecuația (15) cu ρ se deduce forma echivalentă

$$(\rho\beta y')' + \lambda\rho y = 0 \tag{15'}$$

la care vom ataşa condițiile la limită $y(a) =$ finit, $y(b) =$ finit (deoarece în ecuația (15) dacă $b - a < \infty$ coeficientul β se poate anula în $x = a$, $x = b$ ceea ce înseamnă că punctele a și b sînt puncte singulare pentru această ecuație (aceasta va antrena, de regulă, discontinuități pentru soluțiile ecuației în punctele a și b) ; de aceea condițiile la limită anterioare au drept scop să elimine soluțiile discontinue în a și b ale ecuației (15) și ele se numesc condiții la limită singulare).

Prin înmulțire cu funcția test $\varphi \in C_0^\infty([a, b])$ și integrare prin părți, din ecuația diferențială (15') rezultă

$$B(\varphi, y) - \lambda(\varphi, y)_\rho = 0 \tag{16}$$

unde

$$B(\varphi, y) = \int_a^b (\rho\beta\varphi' y')(x)\mathrm{d}x, \; (\varphi, y)_\rho = \int_a^b (\rho\varphi y)(x)\,\mathrm{d}x$$

obținîndu-se deci iarăși egalitatea de definiție a funcțiilor și valorilor proprii (5) cu unele modificări în definiția produselor scalare (apar produse scalare cu pondere ρ).

3. În cazul ecuației cu derivate parțiale

$$\Delta_2 u + \lambda u = 0, \; \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = D_2^2 + D_y^2 \tag{17}$$

unde $u \in C^2(D_2)$, $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ fiind un domeniu mărginit (pentru simplitate, îl vom presupune simplu conex sau chiar] 0, 2π [$\times$ [0,2π]), iar $u|_{\partial D_2} = 0$, se obține iarăși egalitatea (5) prin înmulțire cu $\varphi \in C_0^\infty(D)_2$ și utilizarea formulei lui Green (vezi A.M. cap. IV, punctul 4), adică a identității

$$\iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x, y)\;\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\partial D_2} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y. \tag{18}$$

Înlocuind în (18) Q prin $\varphi \dfrac{\partial u}{\partial x}$ și P prin $-\varphi \dfrac{\partial u}{\partial y}$, deoarce $\varphi = 0$ pe ∂D_2 rezultă identitatea

$$\iint_{D_2} (\varphi\Delta_2 u)(x, y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right)(x, y)\;\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$

care, în baza lui (17) se transcrie sub forma

$$\iint_{D_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right)(x, y)\;\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \lambda \iint_{D_2} (\varphi u)\,(x, y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$

care coincide cu (5), dacă se notează

$$B(\varphi, u) = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right)(x, y)\;\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \; (\varphi, u)_0 = \iint_{D_2} \varphi(x, y)u(x, y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \tag{19}$$

Evident B definit prin (12) va fi o formă biliniară simetrică pe $\mathring{H}_1$, unde $\mathring{H}_1$ este definit ca fiind închiderea în norma definită prin produsul scalar

$$(\varphi, \psi)_1 = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \varphi\psi \right)(x, y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

al spațiului prehilbertian $\mathcal{D}(D_2)$. Faptul că B este o formă mărginită și strict coercitivă pe $\overset{\circ}{H}_1$ va fi justificat ulterior ; aplicînd teoria anterioară, se deduce că pentru operatorul lui Laplace Δ_2 din $\mathbb{R}^2$ (sau chiar pentru operatorul lui Laplace Δ_n din $\mathbb{R}^n$, $\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = D_1^2 + \ldots + D_n^2$) vor exista atît un sistem numărabil de valori proprii $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cît și un sistem numărabil de funcții proprii $(u_n)_{n \geqslant 1}$ unde $u_n|_{\sigma D_2} = 0$

Prin exemplele 1—3 se poate deduce ușor importanța decisivă pe care o are teoria expusă la acest punct în diverse aspecte practice sau teoretice ale dezvoltărilor ortogonale ; de asemenea exemplele au arătat că această teorie este legată de studiul unor operatori diferențiali, care conduc la ecuații diferențiale sau cu derivate parțiale ale căror soluții verifică anumite condiții suplimentare. Această legătură nu este întîmplătoare ; astfel la punctul 2, teorema Lax-Milgram (teorema 3) afirmă că orice formă biliniară $B(\varphi, \psi)$, definită pentru φ, ψ dintr-un spațiu Hilbert H, care este mărginită și strict coercitivă, pune în evidență o aplicație $S : H \to H$ liniară și mărginită, astfel încît are loc egalitatea

$$B(\varphi, u) = (\varphi, Su), \ \varphi \in H$$

Notînd $Su = v$, deci $u = S^{-1} v$, se deduce egalitatea

$$B(\varphi, S^{-1} v) = (\varphi, v), \ \varphi \in H.$$

Revenind la ipotezele impuse în acest punct formei biliniare B, rezultă că spațiul H din teorema Lax-Milgram va coincide cu spațiul Sobolev $\overset{\circ}{H}_1$, iar din definiția 1 va rezulta egalitatea

$$(\varphi, Su)_1 = \lambda(\varphi, u)_0.$$

Cum $|(\varphi, u)_0| \leqslant \|\varphi\|_0 \|u\|_0 \leqslant \|\varphi\|_1 \|u\|_1$ aplicația $F : H_1 \to \mathbb{R}$, $F(\varphi) = (\varphi, u)_0$ va defini o formă liniară și mărginită pe $\overset{\circ}{H}_1$ și în baza teoremei Fréchet-Riesz (vezi punctul 2) va exista $g \in \overset{\circ}{H}_1$ astfel încît să aibă loc egalitatea $F(u) = (\varphi, u)_0 = (\varphi, g)_1$, cu $g = Tu$, unde T va fi o aplicație liniară definită pe H_1. Se deduce deci

$$(\varphi, Su)_1 = \lambda(\varphi, Tu)_1,$$

egalitate care fiind valabilă pentru orice $\varphi \in \overset{\circ}{H}_1$ arată că u va verifica o relație de forma

$$Su = \lambda Tu ;$$

deci ajungemla concluzia că valorile și funcțiile proprii atașate formei

biliniare B avînd proprietăţile menţionate vor fi în acelaşi timp şi valori şi funcţii proprii ale unor aplicaţii de forma $Lu = \lambda u$ cu $L = T^{-1}S$ (dacă există T^{-1}), iar de regulă L este un operator diferenţial.

6. Dezvoltările ortogonale şi teoria transformărilor integrale. Serii Fourier trigonometrice

Definiţia 1. *Prin l_2^+ se înţelege mulţimea şirurilor unilaterale din $\mathbb{C}$ avînd proprietatea că seria pătratelor modulelor termenilor şirului considerat este convergentă, iar prin l_2 se înţelege mulţimea şirurilor bilaterale din $\mathbb{C}$ cu proprietatea că seria pătratelor modulelor termenilor şirului considerat este convergentă.*

Cu alte cuvinte $x \in l_2^+$ dacă $x = (z_n)_{n\geqslant 1}$ cu $z_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, iar $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$; $x \in l_2$ dacă $x = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, cu $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ şi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$, unde, prin definiţie, seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |z_n|^2$ converge dacă limita următoare

$$\lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=-M}^{N} |z_n|^2 = \lim_{N,M\to\infty} (|z_{-M}|^2 + |z_{-M+1}|^2 + \ldots + |z_0|^2 + \ldots + |z_N|^2) \tag{1}$$

există în $\mathbb{C}$. Dacă însă în (1) limita există în $\mathbb{C}$ numai dacă $M = N$ atunci seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |z_n|^2$ se spune că este *convergentă în sensul valorii principale.*

Propoziţia 1. *Mulţimea l_2^+ este un spaţiu prehilbertian complex; dacă $x, y \in l_+^2$, cu $x = (a_n)_{n\geqslant 1}$, $y = (b_n)_{n\geqslant 1}$, $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$ atunci definind aplicaţia $P : l_2^+ \times l_+^2 \to \mathbb{C}$ prin*

$$P(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n \tag{2}$$

se obţine un produs scalar în l_2^+ şi vom pune $p(x, y) = (x, y)$.

Să arătăm mai întîi că seria din membrul drept al lui (2) este absolut convergentă; cum $|a_n\bar{b}_n| = |a_n|\,|b_n| \leqslant \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ seriile $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ fiind convergente, se deduce convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n\bar{b}_n|$.

Să arătăm că l_2^+ este un spațiu vectorial complex, în raport cu operațiile

$$ax = a(a_n)_{n\geqslant 1} = (a\,a_n)_{n\geqslant 1},\ a\in\mathbb{C},\ x+y=(a_n+b_n)_{n\geqslant 1};$$

or seria $\sum_{n=1}^{\infty}|a\,a_n|^2=|a|^2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ este convergentă, iar deoarece $|a_n+b_n|^2\leqslant|a_n|^2+$ $+2|a_n||b_n|+|b_n|^2\leqslant 2\,(|a_n|^2+|b_n|^2)$ rezultă convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^2$; celelalte axiome ale unui spațiu vectorial se verifică imediat. În fine, să arătăm că aplicația P din (2) verifică axiomele produsului scalar: evident $(x,y)=\overline{(y,x)}$, $(x_1+x_2,y)=$ $=(x_1,y)+(x_2,y)$, $x_1=(a_{1,n})_{n\geqslant 1}$, $x_2=(a_{2,n})_{n\geqslant 1}$, $a_{1,n}, a_{2,n}\in\mathbb{C}$, $(ax,y)=a(x,y)$, $a\in\mathbb{C}$, $(x,x)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\geqslant 0$ și reciproc, dacă $(x,x)=0$ înseamnă că avem $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=$ $=0$, deci $a_n=0$, $n=1,2,\ldots$ ceea ce arată că $x=0$.

Teorema 1. *Spațiul prehilbertian l_2^+ este un spațiu Hilbert.*

Trebuie arătat că orice șir $(x_m)_{m\geqslant 1}$ din l_2^+ fundamental în norma dedusă din produsul scalar (2) admite limită în l_2^+. Scriind $x_m=(x_{m,n})_{n\geqslant 1}$, $m=1,2,\ldots$ pentru $\|x\|=$ $=\sqrt{(x,x)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}$ dacă $x=(a_n)_{n\geqslant 1}$, avem prin ipoteză

$$\|x_m-x_k\|<\varepsilon \text{ pentru } m>k\geqslant N(\varepsilon);$$

dacă se fixează n, avem

$$|a_{m,n}-a_{k,n}|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}-a_{k,n}|^2=\|x_m-x_k\|^2<\varepsilon$$

pentru $m>k\geqslant N(\varepsilon)$. Rezultă că șirul $(a_{m,n})_{m\geqslant 1}$ este un șir fundamental în $\mathbb{C}$ pentru $n=1,2,\ldots$ deci va admite o limită în $\mathbb{C}$; $\lim_{m\to\infty}a_{m,n}=a_n\in\mathbb{C}$; să arătăm că notînd $x=$ $=(a_n)_{n\geqslant 1}$ avem $x\in l_2^+$ și $\|x_m-x\|\to 0$ $(m\to\infty)$. Deoarece $(x_m)_{m\geqslant 1}$ este șir fundamental în l_2^+ el va fi și mărginit în l_2^+, deci $\|x_m\|\leqslant k$, $k>0$, $m=1,2,\ldots$; prin urmare, pentru orice număr natural N, deoarece $a_n=\lim_{m\to\infty}a_{m,n}$, avem folosind continuitatea funcției $z\to|z|^2$

$$s_N=\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2=\sum_{n=1}^{N}|\lim_{m\to\infty}a_{m,n}|^2=\sum_{n=1}^{N}\lim_{m\to\infty}|a_{m,n}|^2=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_{m,n}|^2\leqslant\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|^2$$

și deoarece $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{m,n}|^2=\|x_m\|^2\leqslant k^2$ avem $0\leqslant s_N\leqslant k^2$ ceea ce arată că șirul $(s_N)_{N\geqslant 1}$

care este crescător, va fi mărginit, deci este convergent, adică $x = (a_n)_{n\geqslant 1} \in l_2^+$. În fine, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît $m > k \geqslant M(\varepsilon)$ să implice $\|x_m - x_k\| < \varepsilon$ și atunci, pentru orice $N \in \mathbb{N}$ și orice $m > M(\varepsilon)$ avem $\sum_{n=1}^{N} |a_{m,n} - a_n|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_{m,n} -$

$$- \lim_{k\to\infty} a_{k,n}|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |a_{m,n} - a_{k,n}|^2 \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n} - a_{k,n}|^2 = \lim_{k\to\infty} \|x_m - x_n\|^2 <$$

$$< \lim_{k\to\infty} \varepsilon^2 = \varepsilon^2.$$

Rezultă convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n} - a_n|^2$ către zero, deci $\lim_{m\to\infty} \|x_m - x\| = 0$.

În cazul spațiului l_2 are loc un rezultat similar celui din teorema 1.

Teorema 2. *Spațiul l_2 al șirurilor bilaterale $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ din $\mathbb{C}$ care verifică $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, este un spațiu Hilbert în raport cu produsul scalar*

$$(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \bar{b}_n$$

unde $y = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Vom considera acum l_2^+ ca un spațiu Hilbert real; rezultatele anterioare rămîn valabile, deci dacă $x \in l_2^+$, $y \in l_2^+$, avem $x = (a_n)_{n\geqslant 1}$, $y = (b_n)_{n\geqslant 1}$, a_n, $b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ produsul scalar din l_2^+ avînd forma

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{3}$$

Revenind la rezultatele din punctul 5, presupunem cunoscută forma biliniară $B : \mathring{H}_1 \times \mathring{H}_1 \to \mathbb{R}$, simetrică, mărginită și strict coercitivă; în baza teoremelor 1, 3 și 4, acestei forme i se atașează un șir $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathbb{R}$ strict crescător avînd limita ∞ căruia îi corespunde un șir de funcții proprii $(u_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathring{H}_1$ care este ortonormal în L_2 și care formează o bază în $\mathring{H}_1$.

Așadar pentru orice $f \in \mathring{H}_1$, se poate scrie dezvoltarea ortogonală

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \qquad a_n = (f, u_n)_0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

iar șirul coeficienților Fourier $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este un șir din $\mathbb{R}$ care verifică relația de închidere (Parseval) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \|f\|_0^2$.

În acest mod se definește o aplicație $T : \mathring{H}_1 \to l_2^+$, unde

$$Tf = x = (a_n)_{n\geqslant 1},\ f \in \mathring{H}_1,\ a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

și de aceea dezvoltarea ortogonală (4) poate fi interpretată ca aplicația inversă a lui T, adică

$$f = T^{-1}x, \quad x \in l_2^+; \tag{5'}$$

mai precis, vom avea

$$f = T^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad x = (a_n)_{n\geqslant 1} \in l_2^+,$$

iar T^{-1} vom conveni să o numim *transformare integrală*.

Pentru justificarea acestei convenții să observăm că în cazul în care avem $x = (a_n)_{n\geqslant 1}$, $a_n = (g, u_n) = \int_a^b g(t)\, u_n(t)\mathrm{d}t$, $g \in L_2$, $n = 1, 2, \ldots$ rezultă

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s) \left[\int_a^b g(t) u_n(t)\, \mathrm{d}t\right] =$$

$$= \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)\, u_n(t)\right] g(t)\, \mathrm{d}t$$

(inversarea operației de însumare cu operația de integrare fiind permisă dacă presupunem seria convergentă în L_2); așadar, notînd

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(s)\, u_n(t)$$

rezultă egalitatea

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = T^{-1}g,$$

care arată că aplicația $g \to f$ este într-adevăr o transformare integrală; această transformare integrală se modifică dacă se modifică sistemul ortonormal al funcțiilor proprii. În cazul în care se consideră sistemul trigonometric, se obține situația cea mai simplă și în acest caz, dacă $f \in \mathfrak{D}$, rezultă coeficienții $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_2$; în baza unui rezultat cunoscut (vezi A.M. cap. I, punctul 4), deoarece pentru $f \in \mathfrak{D}$ există derivate de orice ordin, se vor verifica inegalități de forma

$$|a_n| \leqslant \frac{c}{|n|^r} \qquad r > 0, \; c > 0, \; n \neq 0. \tag{6}$$

Definiția 2. i. *Un șir bilateral* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *din* $\mathbb{C}$ *se spune că este rapid descrescător dacă pentru orice* $r = 1, 2, \ldots$ *există o constantă* c *(care eventual poate să depindă de* r*) astfel încît se verifică inegalitățile* (6).
ii. *Un șir bilateral* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *din* $\mathbb{C}$ *se spune că are creștere lentă dacă există numerele pozitive* c *și* r *astfel încît să se verifice inegalitățile*

$$|a_n| \leqslant c\,|n|^r,\quad n = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{7}$$

Teorema 3. *Un șir bilateral din* $\mathbb{C}$ *este șirul coeficienților Fourier pentru* $f \in \mathcal{D}$ *relativ la funcțiile proprii* $u_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ *ale operatorului diferențial* D^2 *dacă și numai dacă acest șir este rapid descrescător.*

Fie $f \in \mathcal{D}$ și $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$, $n \in \mathbb{Z}$; integrînd prin părți ne convingem că șirul $((in)^k a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ este șirul coeficienților Fourier pentru derivata $D^k f$; notînd $\|D^k f\| = c$, rezultă

$$|(in)^k a_n| = |n|^k |a_n| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (D^k f)(x)e^{-inx}\,dx\right| \leqslant \|D^k f\| = c$$

și se obțin inegalitățile (6).

Reciproc, dacă pentru șirul bilateral $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ din $\mathbb{C}$ se verifică (6), să definim $f_N \in \mathcal{D}$ punînd

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx};$$

din (6), pentru $r = 2$, se deduce $|f_N(x)| \leqslant \sum_{n=-N}^{N}{}' \dfrac{c}{n^2}$ unde $\sum'$ înseamnă că din însumare se exceptează $n = 0$; deci cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă se deduce $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, deci $\lim_{N\to\infty} f_N = f \in \mathbb{C}$ și a_n sînt coeficienții Fourier ai lui f. Cum $f_N \in \mathcal{D}$, avem

$$D^k u_N = \sum_{n=-N}^{N} (in)^k a_n e^{inx}$$

și se repetă raționamentul anterior pentru $r = k + 2$ care conduce la convergența seriei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^k |a_n|$, $k = 1, 2, \ldots$ și deci fiecare derivată $D^k u_N$ converge uniform cînd $N \to \infty$; în concluzie $f \in \mathcal{D}$.

Teorema 4. *Dacă* $F \in \mathcal{D}'$, *un șir bilateral* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *din* $\mathbb{C}$ *este șirul coeficienților Fourier pentru* F *dacă și numai dacă acest șir are creștere*

lentă; dacă $f \in \mathcal{D}$ *și are șirul* $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ca șir al coeficienților Fourier atunci seriile bilaterale* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{-n}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} b_n$ *sînt convergente și au suma* $F(f)$,

$$F(f) = \langle F, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} b_n. \tag{8}$$

Dacă $F \in \mathcal{D}'$, atunci dacă $r \in \mathbb{N}$ este ordinul lui F (vezi cap. I, punctul 3) pentru orice $f \in \mathcal{D}$ vom avea

$$|F(f)| \leqslant c(\|f\| + \|Df\| + \ldots + \|D^r f\|)$$

și în particular

$$|F(e^{-inx})| = c(1 + |n| + \ldots + |n|^r) \leqslant (r+1)c|n|^r. \tag{9}$$

Cum prin teorema 3 de la punctul 3 s-a arătat că șirul bilateral al coeficienților Fourier ai distribuției periodice F este definit prin $(F(e^{-inx}))_{n\in\mathbb{Z}}$ rezultă din (9) că acest șir are creștere lentă.

Reciproc fie $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un șir din $\mathbb{C}$ avînd creșterea lentă și pentru precizare, să presupunem că avem $|a_n| \leqslant c|n|^{k-2}$, $n \neq 0$; definind șirul bilateral $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ astfel încît $b_0 = 0$ și $b_n = (in)^{-k} a_n$, $n \neq 0$ rezultă $|b_n| \leqslant \frac{c}{n^2}$, $n \neq 0$, și seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n$ este absolut convergentă, iar seria de funcții $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{inx}$ va avea ca sumă un element $f \in \mathcal{E}$. În aceste ipoteze, dacă F_f și F_{f_0} sînt distribuțiile periodice regulate atașate funcțiilor periodice continue f, respectiv $f_0(x) = a_0$, pentru distribuția $F \in \mathcal{D}'$ definită prin $F = D^k F_f + F_{f_0}$ șirul coeficienților Fourier va fi șirul bilateral $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ considerat; într-adevăr, avem

$$F(e^{-inx}) = D^k F_f(e^{-inx}) + F_{f_0}(e^{-inx}) = (-1)^k F_f(D^k e^{-inx}) + 0 =$$

$$= i^k n^k F_f(e^{-inx}) = i^k n^k b_n = i^k n^k (in)^{-k} a_n = a_n$$

$$F(e^{-inx})\Big|_{n=0} = F(1) = D^k F_f(1) + F_{f_0}(1) = (-1)^k F_f(D^k 1) + a_0 = a_0.$$

Pentru a justifica (8), prin ipoteză avem $|a_n| \leqslant c_1 |n|^r$; $n \neq 0$, $|b_n| \leqslant c_2 |n|^{-r_2}$ $n \neq 0$ și luînd $r_1 = r$, $r_2 = -r-2$, avem $|a_{-n} b_n| \leqslant c_1 c_2 |n|^{-2}$; $|a_n b_{-n}| \leqslant c_1 c_2 |n|^{-2}$ și seriile $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{-n}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} b_n$ sînt absolut convergente; deoarece $f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} b_n e^{inx}$, rezultă

$$F(f) = F\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} b_n e^{inx}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} b_n F(e^{inx}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n a_{-n}, \tag{10}$$

iar cu modificarea semnului lui n (posibil deoarece seria este absolut convergentă) suma seriei nu se va modifica.

Observația 1. Funcțiile $e_n(x) = e^{inx}$ au fost considerate aici funcții proprii pentru operatorul diferențial D^2, corespunzînd valorilor proprii $\lambda_n = n^2$, dar a_n poate fi considerată funcție proprie și pentru operatorul diferențial de ordinul întîi iD care în condițiile de periodicitate $f(0) = f(2\pi)$ admite valorile proprii $\lambda_n = in$ și funcțiile proprii $u_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. De aceea nu este obligatorie utilizarea spațiului Sobolev $\overset{\circ}{H}_1$ și nici a spațiului Hilbert L_2.

Observația 2. Din ultima parte a demonstrației teoremei 4, avînd în vedere (10), prin definirea funcției $f_N \in \mathcal{D}$ prin

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx},\ N \in \mathbb{N} \tag{11}$$

distribuția F_N corespunzătoare acestei fu[illegible] are proprietatea $F_N \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$ (deoarece $F_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} a_n a_{-n}$, $F(f_N) = \sum_{n=-}$ $a_n a_{-n}$ adică $F_N(f) = F(f_N)$ și din (10) se deduce $F(f) = \lim_{N\to\infty} F(f_N)$) deci orice distribuție periodică este limita în $\mathcal{D}'$ a unor distribuții regulate corespunzînd funcțiilor (11).

Teorema 5. *Fie $f \in \mathcal{D}$ cu șirul coeficienților Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ și distribuțiile periodice F, $G \in \mathcal{D}'$ avînd șirul coeficienților Fourier $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, respectiv $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Atunci $F*f$ are șirul coeficienților Fourier dat de șirul bilateral $(a_n c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ iar $F * G$ are șirul coeficienților Fourier definit prin $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Conform definiției (vezi cap. I, punctul 5) avem

$$(F*f)(x) = F(T_x \check{f}) = F[f(t-x)],\ (F*G)(f) = F(\check{G}*f)$$

Scriind $f = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$, $e_n(x) = \mathrm{cis}(nx)$ deoarece $(T_x e_n)(t) = e_n(t-x) = e_n(t)e_n(-x) =$

$= e_n(t)\, e_{-n}(x)$, rezultă

$$(F*f)(x) = F(T_x f) = F\left[T_x\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t)\right)\right] = F\left[\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(t) c_{-n}(x)\right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n F[e_n(t)]e_{-n}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(c_n a_n)e_n(x),$$

adică șirul bilateral $(a_n c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ constituie șirul coeficienților Fourier pentru $F*f$. Apoi, deoarece

$$(\check{G}*e_n)(x) = \check{G}(T_x \bar{e}_n) = \check{G}(e_n(x)\bar{e}_n(t)) = e_n(x)\check{G}(\bar{e}_n) = e_n(x)\check{G}(e_n)(t) = b_n e_n(x),$$

rezultă

$$(G*F)(e_{-n}) = F(\check{G}*e_{-n}) = F(b_n e_{-n})(x)) = b_n F(e_{-n}) = b_n a_n.$$

Observația 3. Din demonstrația teoremei 4 rezultă o consecință privind structura distribuțiilor periodice și anume, deoarece orice distribuție periodică se poate scrie sub forma $F = D^k F_f + F_{f_0}$, se deduce că orice $F \in \mathcal{D}'$ poate fi interpretată ca derivata în sensul distribuțiilor a unei distribuții regulate (dacă se face abstracție de distribuția constantă F_{f_0}).

Observația 4. Teoremele 3, 4, 5 pot fi transpuse și în cazul altor dezvoltări ortogonale atașate formei biliniare B de la punctul anterior cu condiția înlocuirii lui n prin $\sqrt{\lambda_n}$, unde $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ este șirul valorilor proprii atașat lui B și lui e_n prin u_n, u_n fiind funcție proprie corespunzătoare valorii proprii λ_n, cu condiția înlocuirii spațiului de distribuții $\mathcal{D}'$ prin alte spații de distribuții convenabil construite pentru a se putea extinde rezultatele anterioare.

Aplicații ale acestor rezultate vor fi considerate în capitolele următoare.

7. Transformări integrale clasice

7.1. Transformarea Fourier

i. *Transformarea Fourier a funcțiilor.* Vom începe prin a expune ideea care l-a condus pe Fourier la introducerea transformării care-i poartă numele. Să considerăm $f \in C^0([0, 2\pi])$ astfel încît seria Fourier-trigonometrică sub formă complexă să fie uniform covergentă către f în intervalul $[0,2\pi]$ și să înlocuim intervalul $[0,2\pi]$ prin intervalul simetric $[-\pi, \pi]$; avem

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dacă în locul intervalului $[-\pi, \pi]$ se utilizează intervalul $[-\pi l, \pi l]$, cu transformarea $x \to \frac{x}{l}$ se realizează o bijecție între aceste intervale; dacă f este continuă pe $[-l\pi, l\pi]$ și seria Fourier-trigonometrică (sub formă complexă) converge uniform către f, avem

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\frac{x}{l}}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t)\, e^{ik\frac{t}{l}}\, dt, \; k \in \mathbb{Z};$$

înlocuind coeficienții c_k și inversînd operația de însumare cu operația de integrare se deduce egalitatea

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t)\, e^{\frac{ik}{l}(t-x)}\, dt.$$

Seria din membrul drept poate fi interpretată ca o sumă Riemann pentru intervalul $]-\infty, \infty[$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_l\left(\frac{k}{l}\right) \cdot \frac{1}{l}, \quad g_l(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t)\, e^{is(t-x)}\, dt \tag{1}$$

punctele de diviziune împărțind $\mathbb{R}$ în subintervalele $\left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ a căror lungime este egală cu $\frac{1}{l}$; prin trecere la limită $(l \to \infty)$ în (1) ar trebui să apară egalitatea

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\infty(s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{is(t-x)} dt \right] ds \tag{2}$$

care poartă numele de *formula lui Fourier*. Scriind (2) sub forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ist}\, dt \right] e^{-ist}\, ds \tag{2'}$$

și notînd

$$\hat{f}(s) = F[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ist}\, dt \tag{3}$$

din (2') se deduce

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\, e^{-isx}\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[f](s)\, e^{-isx}\, ds. \tag{4}$$

Relația (3) poartă numele de *formula lui Fourier* (directă), iar (4) este *formula lui Fourier inversă*. Se observă că (3) și (4) sînt integrale improprii cu parametru iar convergența acestor integrale

(așa după cum se deduce din (2)) este înțeleasă în sensul valorii principale.

ii. *Transformarea Fourier pentru funcții* $f \in L_1(\mathbb{R})$

Definiția 1. *Vom spune că* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *este o distribuție și există un șir* $(g_n)_{n\geq 1}$ *din* $C^\infty(\mathbb{R})$, *fundamental în norma*

$$\|g\| = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx$$

astfel încît $F_{g_n} \to F_f$ (convergență în sensul teoriei distribuțiilor, presupunînd că funcțiile continue considerate sînt absolut integrabile pe $\mathbb{R}$).

Deci avem $f \in L_1(\mathbb{R})$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît $\|g_n - g_m\| < \varepsilon$ dacă $n > m \geq N$, $\|g_n - g_m\| = \int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g_m(x)|\, dx$, iar pentru orice funcție-test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ avem $\langle F_{g_n}, \varphi\rangle \to \langle F_f, \varphi\rangle$ $(n \to \infty)$.

Se verifică imediat că L_1 este un spațiu vectorial; de fapt elementele lui $L_1(\mathbb{R})$ sînt clase de echivalență dacă $\|f_1 - f_2\| = \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)|\, dx = 0$, iar integralele trebuiesc înțelese în sens Lebesgue.

Exemple 1. Dacă $f = k_I$, unde k_I este funcția caracteristică a intervalului $I \subset \mathbb{R}$, $\partial I = \{a, b\}$, atunci deoarece $k_I(x) = 1$, pentru $x \in I$, $k_I(x) = 0$, pentru $x \notin I$, rezultă

$$\hat{k}_I(s) = \int_{\mathbb{R}} k_I(x)\, e^{isx}\, dx = \int_a^b e^{isx}\, dx = \frac{1}{is}(e^{isb} - e^{isa}).$$

2. Dacă $f(x) = e^{-a^2x^2}$, $a > 0$, avem

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2x^2}\, e^{isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2 + isx}\, dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + i\frac{t}{s}s}\, dt =$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{-\frac{s^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t + \frac{is}{2a})^2}\, dt = \frac{1}{a}\, e^{-\frac{s^2}{4a^2}} \int_{\mathrm{Im}\, z = -\frac{s}{2a}} e^{-z^2}\, dz,$$

ultima integrală obținîndu-se prin transformarea $t \to z$, $z = t + \dfrac{is}{2a}$ cînd axa reală devine

dreapta $\mathrm{Im} z = \frac{s}{2a}$; deoarece funcția olomorfă în $\mathbb{C}$, $g(z) = e^{-z^2}$ tinde la zero, cînd $\mathrm{Re}\, z \to$

$\to \pm\infty$ pe orice dreaptă paralelă cu axa reală, se poate înlocui integrala pe $\mathrm{Im} z = \frac{s}{2a}$

cu integrala pe axa reală și deoarece $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, se deduce

$$\hat{f}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-\frac{s^2}{4a^2}}$$

3. Dacă $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$, $a > 0$ integrala care definește funcția $\hat{f}$ se poate calcula cu ajutorul teoremei reziduurilor; dacă $s > 0$;

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{isx}}{a^2 + x^2}\, dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left(f(z) = \frac{e^{isz}}{a^2 + z^2}\ ;\ ia\right) = \frac{\pi}{a}\, e^{-sa};$$

dacă $s < 0$, se efectuează transformarea $s \to -s > 0$. Rezultă, cu schimbarea $x \to -y$

$$\hat{f}(-s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(-s)x}}{a^2 + x^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{isy}}{a^2 + y^2}\, dy = \frac{\pi}{a}\, e^{-sa} = \frac{\pi}{a}\, e^{|s|a}.$$

În definitiv, $\hat{f}(s) = \frac{\pi}{a}\, e^{-a|s|}$.

Teorema 1. (*Riemann-Lebesgue*). *Dacă* $f \in L_1(\mathbb{R})$, *atunci transformarea sa Fourier* $\hat{f}(s) = F[f](s)$ *este o funcție mărginită, continuă pentru* $s \in \mathbb{R}$ *astfel încît* $\lim_{|s| \to \infty} \hat{f}(s) = 0$.

Deoarece

$$|\hat{f}(s)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx}\, dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |e^{isx}|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \|f\|$$

(avînd în vedere că $x, s \in \mathbb{R}$, rezultă $|e^{isx}| = |\mathrm{cis}\,(sx)| = 1$) rezultă pentru $s \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(s)| \leqslant$ $\leqslant \|f\| < \infty$ și $\hat{f}$ este mărginită. Fie acum h o funcție în scară pe $\mathbb{R}$, deci de forma $h(x) =$ $= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k_{I_j}$, unde $I_j = [a_j, b_j] \subset I, [a, b_j] \cap [a_{j'}, b_{j'}[= \emptyset, j \neq j', \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots$; în baza exemplului 1, se deduce

$$\hat{h}(s) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{k}_{I_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{1}{is} (e^{isb_j} - e^{isa_j})$$

rezultînd $\hat{h}$ continuă și $\lim_{|s|\to\infty} \hat{h}(s) = 0$. Cum mulțimea funcțiilor în scară este densă în $L_1(\mathbb{R})$, pentru orice $\varepsilon > 0$ va exista $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încît $\|f - h_n\| < \varepsilon$, pentru $f \in L_1(\mathbb{R})$ și h_n o funcție în scară cu $n \geqslant N$; se deduce

$$|\hat{f}(s) - \hat{h}_n(s)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x) - h_n(x)\, e^{isx}\, dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h_n(x)|\, dx = \|f - h_n\| < \varepsilon, \quad n \geqslant N,$$

ceea ce înseamnă că $\hat{f}$ este limita uniformă în $\mathbb{R}$ a șirului de funcții continue $(h_n)_{n\geqslant 1}$. Deci f este funcție continuă și nulă, pentru $s = \pm\infty$.

Observația 1. Ținînd seama de formulele (3) și (4), se deduce egalitatea

$$2\pi \check{f}(x) = F[f](x), \text{ cu } \check{f}(x) = f(-x)$$

și deci proprietățile deduse pentru transformarea Fourier (3) vor rămîne valabile și pentru funcțiile definite prin integralele din (4), dacă $\hat{f}$ este definită convenabil. Cu toate acestea diferența dintre formulele (3) și (4) este mare, deși au o formă asemănătoare; astfel, pe cînd în (3) integrala există, în (4) integrala este convergentă în sensul valorii principale și nu definește pe f decît în anumite condiții; de aceea, problema care ne interesează acum este să găsim condiții suficiente pentru $f \in L_1(\mathbb{R})$, astfel încît să fie valabilă formula de inversare Fourier (4).

Definiția 1. *Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se spune că verifică în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ condiția lui Dini, dacă funcția $g : I_\delta \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definită prin*

$$g(t) = \frac{1}{t}\,[f(x_0 + t) - f(x_0)] \tag{5}$$

aparține spațiului $L_1(I_\delta)$ cu $I_\delta =]-\delta, \delta[$, $\delta > 0$ convenabil determinat, iar $g \in L_1(I_\delta)$ dacă definind $g^* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g^*(x) = g(x)$, $x \in I_\delta \setminus \{0\}$, $g(x) = 0$ în rest, avem $g^* \in L_1(\mathbb{R})$.

Teorema 2. *Dacă $f \in L_1(\mathbb{R})$ și verifică în punctul $x \in \mathbb{R}$ condiția lui Dini, atunci în acest punct are loc egalitatea*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s)\, e^{-isx}\, ds = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \hat{f}(s)\, e^{-isx}\, dx, \quad a > 0. \tag{6}$$

Fie $a > 0$ un număr arbitrar și să definim funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ prin

$$f_a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \hat{f}(s) e^{-isx}\, ds; \tag{7}$$

în baza teoremei 1, $\hat{f}(s)$ este o funcție continuă și mărginită pentru $s \in \mathbb{R}$, tinzînd la zero cînd $s \to \pm\infty$, deci f_a are sens pentru orice $a > 0$ și orice $x \in \mathbb{R}$. Înlocuind în (7) $\hat{f}$ din definiția (3), se deduce

$$f_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ist}\, dt \right] e^{-sx}\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{is(t-x)}\, dt \right] ds. \qquad (7')$$

Deoarece $|f(z)\, e^{is(t-x)}| \leqslant |f(t)|$, se deduce că integrala improprie din (7) este convergentă uniform în raport cu parametrul s, ceea ce face posibilă inversarea ordinei de integrare; se deduce:

$$f_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-a}^{a} e^{is(t-x)}\, ds \right] f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\left[\frac{a(t-r)}{t-x} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, \frac{\sin(at)}{t}\, dt, \qquad (8)$$

ultima integrală obținîndu-se prin schimbarea de variabilă $t - x \to t$. Deoarece $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x)$, iar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x}\, dx = \pi \operatorname{sgn}(a) =$ $= \pi$ (s-a presupus $a > 0$, deci $\operatorname{sgn}(a) = 1$), rezultă egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \frac{\sin(at)}{t}\, dt; \qquad (8')$$

scăzînd (8′) din (8) se deduce, cu $A > 0$:

$$f_a(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+t) - f(x)]\, \frac{\sin(at)}{t}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-A} [f(x+t) - f(x)] \cdot \frac{\sin(at)}{t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} [f(x+t) - f(x)]\, \frac{\sin(at)}{t}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{A}^{\infty} [f(x+t) - f(x)]\, \frac{\sin(at)}{t}\, dt$$

sau

$$|f(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{|t|<A} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| |\sin(at)|\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{|t|>A} \left| \frac{\sin(at)}{t} \right| |f(x+t)|\, dt + \frac{|f(x)|}{\pi} \int_{|t|>A} \left| \frac{\sin(at)}{t} \right| dt.$$

Din această ultimă inegalitatea rezultă imediat că $\lim_{a\to\infty} f_a(x) = f(x)$, utilizînd condiţiai Dini pentru prima integrală $\left(\text{care se poate scrie sub forma } \int_{\mathbb{R}} g(t)\sin(at)\,dt = \right.$

$= \operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{iat}\,dt$ cu $g(t) = \left|\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|$ pentru $|t|\leqslant A$ şi $g(t) = 0$ pentru $|t| > A$,

iar $g \in L_1(\mathbb{R})$ şi în baza teoremei 1, $\left.\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{iat}\,dt \to 0\ (a\to\infty)\right)$.

Definiţia 2. *Dacă* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, *se spune că* f *are variaţie mărginită în* $[a, b]$ *dacă pentru orice diviziune* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *avem*

$$\sup_n \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty.$$

Teorema 3. *Dacă* $f \in L(\mathbb{R})$ *şi* f *are variaţia mărginită pe intervalul* $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ *cu* $\delta > 0$, *atunci are loc egalitatea*

$$\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{-isx}\,ds.$$

Pentru demonstraţie vom presupune în plus f continuă în $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$, x_0 fiind un punct de salt pentru f, ceea ce nu constituie o restricţie esenţială deoarece funcţiile cu variaţie mărginită sînt aproape peste tot continue şi nu pot avea decît discontinuităţi de tip salt. Vom calcula integrala $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s)e^{-a^2s^2-isx_0}\,ds$; avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{-a^2s^2-isx_0}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ist}\,dt\right]e^{-a^2s^2-isx_0}\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2s^2+is(t-x_0)}\,ds\right]f(t)\,dt,$$

inversarea ordinei de integrare fiind posibilă deoarece integralele în cauză sînt absolut şi uniform convergente; în baza exemplului 2, se deduce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{-a^2s^2-isx_0}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\frac{(t-x_0)^2}{4a^2}}\,dt = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+2as)e^{-s^2}\,ds,$$

ultima integrală obținîndu-se cu schimbarea $t = x_0 + 2as$. $dt = 2a\,ds$. Se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\,e^{-a^2s^2-isx_0}\,ds = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x_0+2as)e^{-s^2}\,ds + 2\sqrt{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x_0+2as)e^{-s^2}\,ds$$

și prin trecerea la limită, pentru $a \to 0$ rezultă (trecerea la limită sub semnul integral este permisă, integrala fiind uniform convergentă iar integrandul o funcție continuă)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{-isx_0}\,ds = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x_0-)\,e^{-s^2}\,ds + 2\sqrt{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x_0+)\,e^{-s^2}\,ds =$$

$$= 2\sqrt{\pi}f(x_0-)\int_{-\infty}^{0} e^{-s^2}\,ds + 2\sqrt{\pi}f(x_0+)\int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \pi\,[f(x_0-) + f(x_0+)]$$

deoarece $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-s^2}\,ds = \int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

iii. *Transformarea Fourier pentru funcții $f \in L_2(\mathbb{R})$. Proprietăți ale transformării Fourier*

Fie $f \in L_2(\mathbb{R})$, ceea ce implică $f \in L_2(I)$ pentru orice interval $I \subset \mathbb{R}$ deoarece

$$\int_I |f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_I dx}\sqrt{\int_I |f(x)|^2\,dx}$$

(s-a aplicat inegalitatea lui Schwarz produsului scalar $(1, |f|)_0$; presupunînd lungimea intervalului I finită se deduce $f \in L_1(I)$. Fie $I = [-a, a]$, $a > 0$ și să definim $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ prin

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } |x| < a \\ 0 & \text{dacă } |x| \geqslant a; \end{cases} \tag{9}$$

evident $f_a \in L_1(\mathbb{R})$ și deci are sens transformarea sa Fourier $\hat{f}_a$, unde

$$\hat{f}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)^{isx}\,dx = \int_{-a}^{a} f_a(x)\,e^{isx}\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,e^{isx}\,dx. \tag{9'}$$

Trecînd la limită în (9) pentru $a \to \infty$ se va obține transformarea Fourier a funcției $f \in L_2(\mathbb{R})$ (în ipoteza că această limită există, fapt care va fi justificat ulterior).

Lema 1. *Dacă* $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ *atunci este valabilă egalitatea lui Parseval*

$$(\hat{f}, \hat{g})_0 = 2\pi(f, g)_0. \tag{10}$$

Deoarece $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, calculînd $\widehat{(f \cdot \bar{g})}$ găsim, utilizînd (4) $\widehat{(f, \bar{g})}(s) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)e^{isx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-itx}\,dt\right]}e^{isx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\hat{g}}(t)e^{itx}\,dt\right]e^{isx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\hat{g}}(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^{ix(t+s)}\,dx\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t+s)\bar{\hat{g}}(t)dt,$$

iar în punctul $s=0$, se deduce (10) ; transformarea Faurier a produsului $f\bar{g}$ există deoarece $f \cdot \bar{g} \in L_2(\mathbb{R})$, deci $f\bar{g} \in L_1(\mathbb{R})$, iar schimbarea ordinii de integrare este permisă în baza teoremei lui Fubini.

Consecința 1. *Dacă* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *atunci* $\hat{f}$ *există,* $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ *și are loc egalitatea*

$$\|\hat{f}\|_0 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_0 \tag{1}$$

Înlocuind în (10) f prin f_a definit prin (9) și luînd $g = f_a$, se deduce $\|\hat{f}_a\|_0^2 = 2\pi\|f_a\|_0^2$, adică

$$\|\hat{f}_a\|_0^2 = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x)|^2\,dx = 2\pi\int_{-a}^{a}|f(x)|^2\,dx$$

și trecînd la limită pentru $a \to \infty$, rezultă

$$\lim_{a\to\infty}\|\hat{f}_a\|_0^2 = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx < \infty,$$

ceea ce arată că $\hat{f}_a$ are limită în $L_2(\mathbb{R})$ cînd $a \to \infty$; deoarece $\lim_{a\to\infty}\|\hat{f}_a\|_0 = \|\lim_{a\to\infty}\hat{f}_a\| = 2\pi\|\hat{f}\|_0^2$, se deduce (11).

Proprietățile mai importante ale transformării Fourier vor fi prezentate în teorema următoare.

Teorema 4. i. *Dacă* f, $Df \in L_1(\mathbb{R})$ *atunci*

$$\widehat{(Df)}(s) = -is\hat{f}(s);$$

ii. *Dacă* f, Df, ..., $f^k \in L_1(\mathbb{R})$, *atunci*

$$\widehat{(D^j f)}(s) = (-is)^j \hat{f}(s),\ j = 0, 1, \ldots, k;$$

iii. *Dacă* $D^2 f$ *există și* $D^2 f \in L_1(\mathbb{R})$, *atunci* $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$;

iv. *Dacă* f, $xf \in L_1(\mathbb{R})$, *atunci* f *este derivabilă și*

$$(D\hat{f})(s) = i\,\widehat{[xf(x)]}(s);$$

v. *Dacă* f, xf, ..., $x^k f \in L_1(\mathbb{R})$, *atunci* $\hat{f}$ *este de* k *ori derivabilă și*

$$(D^j\hat{f})(s) = i^j\widehat{[x^j f(x)]}(s),\ j = 0, 1, \ldots, k;$$

vi. *Dacă* f, $g \in L_1(\mathbb{R})$ *atunci convoluția lor* $f * g$ *definită prin*

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

este un element din $L_1(\mathrm{R})$, *iar*

$$\widehat{(f*g)}(s) = \hat{f}(s)\cdot\hat{g}(s).$$

i. Integrînd prin părți se deduce

$$\widehat{(Df)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (Df)(x)e^{-isx}\,dx = f(x)\,e^{isx}\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - is\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\,dx = -is\hat{f}(s)$$

($f(\pm\infty) = 0$, deoarece din egalitatea $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$ și din faptul că $f \in L_1(\mathbb{R})$ rezultă că membrul drept are limită finită cînd $x \to \pm\infty$, iar această limită nu poate fi decît nulă, deoarece în caz contrar f n-ar fi integrabilă pe $\mathbb{R}$).

ii se deduce iterînd i.

iii. Din ii rezultă pentru $k = 2$, $|\widehat{(D^2(\hat{f})}(s)| = |s|^2|\hat{f}(s)|$; cum $\hat{f}$ este mărginită în $\mathbb{R}$ iar $|\hat{f}(s)| \leqslant \frac{M}{|s|^2}$ ($|\widehat{D^2 f}| \leqslant M$) se deduce că integrala improprie $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|\,ds$ este convergentă și deci $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

iv se obține derivînd (3) în raport cu s.
v se deduce interînd iv.

vi. Avem $f*g \in L_1(\mathbb{R})$ deoarece integrala dublă improprie $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x-t)g(t)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t$ este convergentă, integrala $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\,\mathrm{d}y$ existînd.

Calculînd $\widehat{(f*g)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$ rezultă

$$\widehat{(f*g)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x\right] g(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(y+t)}\,\mathrm{d}y\right] g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sy}\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t = \hat{f}(s)\hat{g}(s).$$

iv. *Transformarea Fourier a distribuțiilor temperate*

Definiția 3. *Vom spune că funcția φ este un element al spațiului $\mathcal{S}$ dacă pentru orice $p, q = 0, 1, 2, \ldots$ există $C = C(p, q, \varphi) > 0$ astfel încît*

$$|x^p\,\mathrm{D}^q\varphi(x)| < C,\quad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Șirul $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathcal{S}$ converge către $\varphi \in \mathcal{S}$ (notație $\varphi_n \overset{\mathcal{S}}{\longrightarrow} \varphi$) *dacă pentru fiecare $q = 0, 1, \ldots$ șirul derivatelor $(\mathrm{D}^q\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniform către $\mathrm{D}^q\varphi$ pe orice interval $I \subset \mathbb{R}$, iar pentru orice $p = 0, 1, \ldots$* avem

$$|x^p\mathrm{D}^q\varphi_n(x)| < C,$$

unde C nu depinde de n (dar poate depinde de p, q sau φ).

Orice funcțională (formă) liniară și continuă pe spațiul $\mathcal{S}$ se va numi distribuție temperată, iar mulțimea acestor distribuții va fi notată prin $\mathcal{S}'$.

Exemplul 4 Dacă $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$ avem $\varphi \in \mathcal{S}$, pe baza proprietății exponențialei de a se descrește la infinit mai repede decît orice putere a variabilei $x \in \mathbb{R}$.

5. Dacă $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$, $a > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}$.

Lema 2. *Transformarea Fourier definește un izomorfism liniar de la $\mathcal{S}$ la $\mathcal{S}$.*

Trebuie arătat că operația prin care lui $\varphi \in \mathcal{S}$ îi atașăm transformarea ei Fourier $\hat{\varphi}$ este astfel încît $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, și este bijectivă și continuă. Or, în baza proprietăților iii și v din teorema 4 rezultă că dacă pentru φ se verifică inegalități de forma (12), inegalități de aceeași formă vor fi valabile și pentru $|s^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(s)|$, deci $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$. Celelalte afirmații se justifică imediat utilizînd proprietățile demonstrate anterior pentru transformarea Fourier.

Definiția 4. *Vom numi transformata Fourier a distribuției temperate $f \in \mathcal{S}'$ funcționala liniară $g \in \mathcal{S}'$ definită prin*

$$\langle g, \hat{\varphi} \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle \text{ sau } g(\hat{\varphi}) = 2\pi f(\varphi), \tag{13}$$

și vom nota $g = \hat{f} = F(f)$.

Cu alte cuvinte transformarea Fourier a distribuției $f \in \mathcal{S}'$ este forma liniară a cărei valoare pentru fiecare element $\psi = \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ este egală cu valoarea formei inițiale pentru elementul φ înmulțită cu factorul constant 2π.

Deoarece transformarea Fourier este un izomorfism de la $\mathcal{S}$ la $\mathcal{S}$ rezultă că forma g este definită pentru orice $\psi \in \mathcal{S}$, iar din liniaritatea și continuitatea lui f rezultă direct (utilizînd evident egalitatea de definiție (13)) liniaritatea și continuitatea formei g. (Din lema 2 rezultă că dacă $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, atunci $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$).

Observația 2. *Funcțiile f absolut integrabile pe $\mathbb{R}$ sînt elementele spațiului $\mathcal{S}'$*, funcționala corespunzătoare f definindu-se prin

$$f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x;$$

în baza definiției 4, se va exista distribuția $\hat{f}$ care va fi iarăși o distribuție temperată, care va coincide (abstracție făcînd de o echivalență) cu distribuția corespunzătoare transformării Fourier a lui f.

Într-adevăr, deoarece avem

$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 2\pi (f, \varphi)_0$ utilizînd egalitatea (10) rezultă $2\pi(f, \varphi)_0 = (\hat{f}, \hat{\varphi})_0$ și deci avem

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = (\hat{f}, \hat{\varphi})_0 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s)(s)\hat{\varphi}\,\mathrm{d}s, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

(cel puțin dacă $f \in L_2(\mathbb{R})$). În particular, rezultă că proprietățile transformării Fourier deduse pentru funcții sînt valabile și pentru transformarea Fourier a distribuțiilor.

În acest mod, transformarea Fourier a distribuțiilor apare ca o generalizare a noțiunii de transformare Fourier a funcțiilor, spre deosebire de cazul funcțiilor cînd transformarea Fourier are sens numai

dacă funcţia îndeplineşte anumite condiţii restrictive (în cazul în care nu există transformata Fourier pentru o funcţie dată, va exista transformata Fourier a acestei funcţii, considerată însă ca distribuţie).

Exemple. 6. Funcţia $f(x) = c \in \mathbb{R}$ nu admite o transformată Fourier în sens clasic dar aplicînd definiţia 4 vom putea scrie

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(x)\mathrm{d}x = 2\pi c \left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} \, \mathrm{d}x \Big|_{s=0} \right] =$$

$$= 2\pi c \hat{\varphi}(0) = 2\pi c \langle \delta(s), \hat{\varphi}(s) \rangle, \text{ unde } \varphi \in \mathcal{S}. \text{ Rezultă } \hat{f}(s) = 2\pi c \delta(s).$$

7. Fie $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$, $a \in \mathbb{R}$; pentru această funcţie nu există $\hat{f}$ în sens clasic; dar

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = 2\pi \langle f, \varphi \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = 2\pi \hat{\varphi}(a) = 2\pi \langle \delta(s - a), \hat{\varphi}(s) \rangle$$

$\varphi \in \mathcal{S}$ şi deci $\hat{f}(s) = 2\pi\delta(s - a)$ unde $\delta(s - a) = \delta_a(s)$ este distribuţia lui Dirac translatată.

8. Fie $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$; pentru aceste funcţii nu există $\hat{f}$ în sens clasic, dar va exista transformata Fourier în sensul teoriei distribuţiilor; este suficient să scriem pentru $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\hat{\varphi}(s) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} \, \mathrm{d}x$$

şi să derivăm această egalitate de k ori (posibil avînd în vedere definiţia spaţiului $\mathcal{S}$). Deoarece $\mathrm{D}^k \hat{\varphi}(s) = \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{i}x)^k \varphi(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx} \, \mathrm{d}x$, pentru $s=0$ se deduce $\mathrm{D}^k \hat{\varphi}(0) = \mathrm{i}^k \int_{\mathbb{R}} x^k \varphi(x) \mathrm{d}x$ şi deci $\hat{f} = -\mathrm{i}^k 2\pi \, \mathrm{D}^k \, \delta(s)$.

Observaţia 3. În baza lemei 2 în definiţia 4 se poate înlocui $\hat{\varphi}$ prin φ şi deoarece în acest caz φ se înlocuieşte prin $2\pi\hat{\varphi}$ egalitatea de definiţie (13) se scrie sub forma simetrică:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \text{ sau } \hat{f}(\varphi) = f(\hat{\varphi}), \ \varphi \in \mathcal{S}, \ f \in \mathcal{S}'. \tag{13'}$$

Observaţia 4. Lema 2 stabileşte că aplicaţia $\varphi \to \hat{\varphi}$ este liniară şi continuă de la $\mathcal{S}$ la $\mathcal{S}$ şi de aceea relaţia de definiţie (13′) va defini aplicaţia $f \to \hat{f}$ ca o operaţie liniară şi continuă de la $\mathcal{S}'$ la $\mathcal{S}'$.

Introducînd în spaţiul $\mathcal{S}'$ aplicaţia $F^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, unde

$$F^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} F(\check{f}), \ \check{f}(x) = f(-x), \ f \in \mathcal{S}' \tag{14}$$

este evident că F^{-1} este o aplicaţie liniară şi continuă.

Propoziția 1. *Aplicația F^{-1} definită prin* (14) *este inversa aplicației F definită prin $\hat{f} = F(f)$, adică*

$$F^{-1}[F(f)] = f,\ F[F^{-1}(f)] = f,\ f \in \mathcal{S}'. \tag{15}$$

În baza teoriei anterioare aceste egalități sînt valabile pentru $f \in L_1(\mathbb{R})$ și cum $\mathcal{S} \subset L_1(\mathbb{R})$ (dacă $\varphi \in \mathcal{S}$, din (12) pentru $q = 0$, $p = 2$ se deduce integrabilitatea absolută a lui φ) și deci pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$ avem $F^{-1}[F(\varphi)] = \varphi$, $F[F^{-1}(\varphi)] = \varphi$; pe de altă parte spațiul $\mathcal{S}$ este dens în spațiul distribuțiilor $\mathcal{S}'$ (justificarea putîndu-se realiza după modelul prin care s-a arătat că spațiul $\mathcal{D}$ este dens în $\mathcal{D}'$), iar F și F^{-1} sînt aplicații continue de la $\mathcal{S}$ la $\mathcal{S}'$. Prin trecere la limită se deduce valabilitatea relațiilor (15).

În baza propoziției 1 rezultă că orice element $f \in \mathcal{S}'$ poate fi interpretat ca fiind transformarea Fourier a unui element $g = F^{-1}(f)$ tot din $\mathcal{S}'$, $f = F(g)$, iar dacă $f = 0$ avem $F(f) = 0$.

Consecința 2. *Aplicația $f \to \hat{f} = F(f)$ este o aplicație bijectivă de la $\mathcal{S}'$ la $\mathcal{S}'$ și deoarece aceeași aplicație este liniară și continuă, rezultă că prin transformarea Fourier a distribuțiilor din S se realizează un izomorfism (liniar) de la $\mathcal{S}'$ la $\mathcal{S}'$.*

Proprietățile transformării Fourier în cazul distribuțiilor sînt aceleași cu proprietățile transformării Fourier ale funcțiilor (pentru justificare, este suficient să folosim faptul că spațiul $\mathcal{S}$ este dens în $\mathcal{S}'$, iar transformarea Fourier este o aplicație continuă).

De remarcat că dacă $f \in \mathcal{S}'$ are suportul compact, $\operatorname{supp} f = A \subset \mathbb{R}$ iar A este mărginită și închisă (deci $f(\varphi) = 0$ pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, suportul lui φ neavînd puncte comune cu suportul lui f), atunci are loc egalitatea

$$\hat{f}(s) = \langle f(x), \alpha(x)\, e^{ixs} \rangle \tag{16}$$

unde $\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha(x) = 1$, pentru $x \in \operatorname{supp} f$, deoarece pentru $\varphi \in \mathcal{S}$ avem $\langle D^j F(f), \varphi \rangle = (-1)^j \langle F(f), D^j \varphi \rangle = (-1)^j \langle f, F(D^j \varphi) \rangle =$

$$= (-1)^j \langle f, \alpha(x)(-ix)^j F(\varphi) \rangle = \langle f(x), \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)(ix)^j \varphi(s) e^{isx}\, ds =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \langle f(x), \alpha(x)\, (ix)^j e^{isx} \varphi(s)\, ds \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle f(x), \alpha(x)\, (ix)^j e^{ixs} \rangle\, \varphi(s)\, ds$$

ceea ce coincide cu (16), dacă se ia $j = 0$.

v. *Transformarea Fourier a funcțiilor și distribuțiilor de mai multe variabile.*

Dacă $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, adică dacă $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$ (integrala în sens Lebesgue), prin transformarea Fourier a acestei funcții se înțelege funcția $F[f] = \hat{f}$ definită prin

$$F[f](s) = \hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{i(s,x)}\, dx,$$

cu $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $(s, x) = s_1x_1 + \ldots + s_nx_n$; deoarece toate raţionamentele anterioare nu au depins de numărul de variabile, se poate concluziona că rezultatele anterioare rămîn valabile, formula de inversare scriindu-se

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(s)\, e^{-i(s,x)}\, ds$$

(deoarece avem

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} \left[\ldots \left[\int_{\mathbb{R}} f(x_1) \ldots, x_n)\, e^{is_n x_n}\, dx_n \right] \ldots \right] e^{i s_1 x_1}\, dx_1;$$

putem să interpretăm transformarea Fourier în n dimensiuni ca rezultatul aplicării succesive a transformării Fourier unidimensionale în raport cu fiecare variabilă x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$). În cazul distribuţiilor, se defineşte spaţiul $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ca fiind format din funcţiile indefinit derivabile pe $\mathbb{R}^n$ care verifică inegalităţi de forma $|x^p D^q \varphi| \leqslant c$, unde $x^p = x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n}$, $D^q = D_1^{q_1} \ldots D_n^{q_n}$, p_j, $q_k = 0, 1, \ldots$ şi definind ca mai sus convergenţa în $\mathcal{S}$. Dacă $f \in \mathcal{S}'$, prin definiţie

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

ceea ce face ca rezultatele din cazul unidimensional să se regăsească şi în cazul multidimensional. Apar însă şi proprietăţi în plus, cum ar fi egalitatea

$$F[f(x) \times g(y)]\,(s, t) = F(f)(s) \times F(g)(t)$$

unde semnul $\times$ indică produsul tensorial (sau produsul direct) al elementelor între care este pus (astfel, prin definiţie,

$$\langle f(x) \times g(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle$$

vi. *Funcţiile Hermite şi baze în $L_2(\mathbb{R})$. Funcţiile lui Laguerre.*

La punctele anterioare (vezi punctele 1, 3, 4, 5) s-au determinat efectiv baze ortonormale în spaţii Hilbert concrete (L_2, $\mathring{H}_1$, ...), dar sub restricţia ca aceste spaţii să conţină funcţii definite pe domenii mărginite şi de aceea este important de ştiut dacă se pot construi baze ortonormale şi în spaţiile $L_2(\mathbb{R})$, $\mathring{H}_1(\mathbb{R})$, $L_2(\mathbb{R}^n)$ etc. Răspunsul este afirmativ, cel puţin în cazul spaţiului Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ în care vom arăta că şirul $(e_n)_{n \geqslant 0}$, $e_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, H^n$ fiind polinomul lui Hermite de gradul n (vezi punctul 4); deci şirul

$$H_n(x) = A_n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \tag{17}$$

cu $A_n \in \mathbb{R}$ astfel determinat încît să avem

$$\|H_n\|_\rho^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 1, \quad \rho(x) = e^{-x^2} \tag{18}$$

definește o bază ortonormală în $L_2(\mathbb{R})$.

Propoziția 2. *Pentru a se verifica* (18), *în* (17) *trebuie să avem*

$$A_n^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n \cdot n!} \tag{19}$$

Vom avea

$$\|H_n\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) \cdot H_n(x)\, dx = A_n \int_{\mathbb{R}} H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})\, dx;$$

integrînd prin părți de n ori, termenul integrat dispare (fiind un polinom înmulțit cu e^{-x^2}) și se deduce

$$\|H_n\|_0^2 = (-1)^n A_n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n^{(n)}(x)\, dx = A_n^2\, n!\, 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = A_n^2\, n!\, 2n\sqrt{\pi},$$

deoarece $H_n(x) = A_n [(-1)^n 2n\, x^n + \ldots]$, iar $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Astfel, cu A_n determinat prin propoziția 1 vom avea

$$(e_n, e_m)_0 = \int_{\mathbb{R}} e_n(x)\, e_m(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} [e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)]\, [e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)]\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, dx = (H_n, H_m)_\rho = \delta_{nm}$$

și evident $e_n \in L_2(\mathbb{R})$ pentru orice $n = 0, 1, \ldots \Big(\|e_n\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}} e_n^2(x)\, dx =$

$= \|H_n\|_\rho^2 = 1 \Big)$; rămîne de arătat că $(e_n)_{n \geqslant 1}$ este o bază în $L_2(\mathbb{R})$; pentru aceasta vom justifica rezultatul următor (care poate constitui și un criteriu pentru ca un sistem ortonormal dintr-un spațiu Hilbert H să constituie o bază în acest spațiu).

Propoziția 3. *Un sistem* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\} \subset H$ *ortonormal constituie o bază în spațiul Hilbert separabil* H *dacă și numai dacă singura funcție ortogonală pe toate elementele șirului este funcția nulă din* H.

Fie $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset H$ o bază în H; atunci $0 \in H$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, unde $a_n = 0$, în baza unicității descompunerii. Or cum $a_n = (0, e_n)$ se deduce că elementul nul din H este singurul element din H ortogonal pe sistemul dat.

Reciproc, fie $S = \{e_1, e_2 \ldots\}$ un sistem ortonormal din H astfel încît dacă $f \perp S$, să rezulte $f = 0$; pentru $g \in H$ se pot calcula coeficienții Fourier $(g, e_n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ este convergentă în H. Notînd $f = g - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, se deduce $(f, e_j) =$

$$= \left(g - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, e_j\right) = (g, e_j) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e_n, e_j) = (g, e_j) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nj} = (g, e_j) - a_j = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots$ și deci $f \perp S$; așadar $f = 0$ și $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, $a_n = (g, e_n)$.

Teorema 5. *Sistemul ortonormal* $S = \{e_0, e_1, e_2, \ldots\} \subset L_2(\mathbb{R})$, $e_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, *cu* H_n *definit prin* (17) *și* A_n *dat prin* (19), $n = 0, 1, 2, \ldots$, *formează o bază ortonormală în* $L_2(\mathbb{R})$.

În baza propoziției 3, este suficient să arătăm că $(f, e_n)_0 = \int_{\mathbb{R}} f(x) e_n(x) \mathrm{d}x = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ cu $f \in L_2(\mathbb{R})$ implică $f = 0$; aceasta implică mai departe

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} x^k \, \mathrm{d}x = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

deoarece $x^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j H_j(x)$, $\alpha_j = (x^k, H_j)_\rho$ $\rho(x) = e^{-x^2}$, adică $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} x^k \, \mathrm{d}x =$

$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} H_j(x) \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \int_{\mathbb{R}} f(x) e_j(x) \mathrm{d}x = 0$ (s-a utilizat observația 3 de la punctul 4).

Să facem observația că integralele improprii din (20) sînt convergente în sensul valorii principale pentru orice $f \in L_2(\mathbb{R})$ și $k = 0, 1, 2, \ldots$, deoarece avem

$$e^{-\frac{x^2}{2}} x^k \in L_2(\mathbb{R}) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} x^k \, \mathrm{d}x = 0 \text{ pentru } k \text{ impar, iar } \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} x^k \, \mathrm{d}x = \right.$$

$= 2\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x^k \, dx = 2^{\frac{k+3}{2}} \Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)$ pentru k par, și se poate scrie $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} x^k dx =$

$= (f(x), e^{-\frac{x^2}{2}} x^k)_0$, acest produs scalar avînd sens. Pe de altă parte, va exista și transformarea Fourier pentru funcția $f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, care deoarece $f(x)x^k e^{-\frac{x^2}{2}} \in L_2(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ va putea fi derivată de un număr arbitrar de ori; așa dar, notînd

$$F[f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2} + ixs} \, dx \tag{21}$$

avem

$$\frac{d^k}{ds^k} F[f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}](s) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2} + ixs} \, ds, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

și făcînd $s = 0$ în baza lui (20) avem

$$\frac{d^k}{ds^k} F[f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}](0) = i^k \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} x^k \, dx = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Or, din (21) se deduce că integrala improprie $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2} + ixs} \, dx$ definește o funcție ipferențiabilă (olomorfă) în vecinătatea lui $s = 0$ (presupunînd $s \in \mathbb{C}$) deoarece această integrală ca și integralele $\int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2} + ixs} \, dx$ fiind uniform convergente în raport cu s

(avem $\left| \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2} + ixs} \, dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|\, e^{-\frac{x^2}{2} - x \operatorname{Im} s} \, dx \leqslant$

$\leqslant \int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|\, e^{-\frac{x^2}{2} - |x \operatorname{Im} s|} \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|\, e^{-\frac{x^2}{2} - Ax}$, dacă $|\operatorname{Im} s| \leqslant A$,

iar ultima integrală este convergentă deoarece $f \in L_2(\mathbb{R})$ și $x\, e^{-\frac{x^2}{2} - Ax} \in L_2(\mathbb{R})$, $A \in \mathbb{R}$; cum această integrală nu depinde de s rezultă convergența uniformă a integralelor considerate). Utilizînd (22) se deduce $F[f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}](s) = 0$ pentru $|s|$ suficient de mic și aplicînd formula inversă a transformării Fourier sau egalitatea lui Parseval se deduce $f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ adică $f = 0$ în $L_2(\mathbb{R})$.

Observația 5. Deoarece șirul polinoamelor lui Hermite $(H_n)_{n\geqslant 0}$ se obține prin ortogonalizarea șirului $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ pe intervalul $]-\infty, \infty[$ cu ponderea $\rho(x) = e^{-x^2}$, rezultă că funcțiile $e_0, e_1, \ldots e_n, \ldots$ din teorema 5, care de obicei se numesc *funcțiile lui Hermite*, se obțin prin aplicarea procedeului de ortogonalizare Gram-Schmidt (vezi lema 4, punctul 1) șirului liniar independent $(x^k e^{-\frac{x^2}{2}})_{k\geqslant 0}$. Cu alte cuvinte sistemul $S = \{e^{-\frac{x^2}{2}}, x e^{-\frac{x^2}{2}}, \ldots, x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \ldots\}$ formează o bază în spațiul Hilbert $L_2(\mathbb{R})$.

Observația 6. Deoarece polinomul Hermite H_n este o soluție particulară a ecuației diferențiale

$$y'' - 2x\,y' + 2n\,y = 0$$

(vezi iii de la exemplul 3, punctul 4), scriind $e_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, prin înlocuire directă, se deduce că e_n verifică ecuația diferențială

$$y'' - x^2 y = -(2n+1)y\,; \tag{23}$$

aplicînd acestei ecuații transformarea Fourier (deoarece operației $\frac{d^2}{dx^2}$ îi corespunde înmulțirea cu $-s^2$ și la înmulțirea cu $-x^2$ corespunde operația $\frac{d^2}{ds^2}$) rezultă ecuația diferențială

$$\frac{d^2\hat{y}}{ds^2} - s^2\hat{y} = -(2n+1)\hat{y}. \tag{23'}$$

Această ecuație diferențială are aceeași formă cu ecuația diferențială (23); rezultă că avem $\hat{e}_n = c_n e_n$ cu $c_n \in \mathbb{C}$, adică

$$F[e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)](s) = c_n e^{-\frac{s^2}{2}} H_n(s). \tag{24}$$

Este ușor de verificat că ecuația diferențială (23') admite o singură soluție de forma $\hat{y} = e_n$: orice soluție a acestei ecuații diferențiale se scrie sub forma $c_{1n}e_n(s) + c_{2n}e_n(s)\int \frac{ds}{e_n^2(s)}$ (prin efectuarea substituției $\hat{y} = e_n z$ în ecuația (23')), iar $c_{2n} = 0$, deoarece funcția $e_n(s)\int \frac{ds}{e_n^2(s)}$ nu poate fi liniar dependentă de e_n.

Pe de altă parte, aplicînd de patru ori succesiv transformarea Fourier unei funcții se obține funcția inițială înmulțită cu $4\pi^2$; apli-

cînd acest procedeu egalității (24), deoarece $F^2[e_n] = F[F[e_n]] = c_n^2 e_n$, $F^3(e_n) = F[F^2[e_n]] = c_n^3 e_n$, $F^4[e_n] = F[F^3[e_n]] = c_n^4 e_n$, se deduce $c_n^4 = 4\pi^2$, ceea ce înseamnă că e_n nu poate lua decît valorile $\pm\sqrt{2\pi}$ și $\pm i\sqrt{2\pi}$.

Rezultă din egalitatea (24) că funcțiile proprii ale operatorului F definit de transformarea Fourier sînt funcțiile lui Hermite, valorile proprii fiind $\pm\sqrt{2\pi}$ și $\pm i\sqrt{2\pi}$.

Dacă se ia în considerație spațiul $L_2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty]$ și sistemul de funcții e^{-x}, xe^{-x}, ..., $x^n e^{-x}$, prin aplicarea procedeului de ortogonalizare Gram-Schmidt se obține un sistem ortogonal de funcții $(L_n(x)e^{-x})_{n\geqslant 0}$, unde $L_n = L_{0,n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $(L_{\lambda,n})_{n\geqslant 0,\ \lambda>0}$ fiind șirul de polinoame Laguerre definite la punctul 4; aplicînd considerațiile anterioare (care sînt aplicabile în spațiul Hilbert $L_2(\mathbb{R}_+)$ deoarece acest spațiu se poate obține din spațiul Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ presupunînd funcțiile din $L_2(\mathbb{R})$ nule pentru $x < 0$) va rezulta că șirul de funcții $(L_n(x)e^{-x})_{n\geqslant 0}$, numit *șirul funcțiilor Laguerre*, va forma o bază ortogonală în $L_2(\mathbb{R}_+)$.

7.2. Transformarea Laplace

Pentru a defini și a obține proprietățile transformării Laplace se poate utiliza teoria transformării Fourier expusă la 7.1. Vom prefera însă o altă cale prin care rezultatele se obțin direct fără intervenția transformării Fourier.

1. *Spațiul* $\mathcal{L}$. Vom introduce un spațiu de funcții-test cu ajutorul căruia se pot realiza considerațiile care ne interesează relative la transformarea Laplace.

Definiția 1. *Vom spune că* $u \in \mathcal{L}$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *dacă* $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ *și dacă pentru orice număr natural* $k \geqslant 0$ *și orice* a, $M \in \mathbb{R}$ *avem inegalitățile*

$$|e^{at}\ D^k u(t)| \leqslant c,\ t \in [M, \infty[\tag{1}$$

unde $c \in \mathbb{R}_+$ *poate depinde de* a, k *și* u.

Observația 1. Dacă se verifică (1), rezultă

$$\lim_{t\to\infty} e^{a't}\ D^k u(t) = 0 \tag{1'}$$

pentru orice $a' < a$ și orice $k = 0, 1, 2, \ldots$, deoarece din (1) rezultă

$$|e^{a't} D^k u(t)| = e^{(a'-a)t} |e^{at} D^k u(t)| = c\, e^{(a'-a)t}$$

și cum $a' - a < 0$ avem $\lim_{t\to\infty} e^{(a'-a)t} = 0$.

Observația 2. *Dacă* $u \in \mathcal{L}$, *atunci pentru orice* a, $M \in \mathbb{R}$ *și* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *avem*

$$|u|_{k,a,M} = \sup_{t\geqslant M} \{e^{at} |D^k u(t)|\} < \infty. \tag{2}$$

Reciproc, dacă (2) *se verifică pentru orice* $a, M \in \mathbb{R}$ *și* $k = 0,1,2,\ldots$ $\ldots$ *atunci evident* $u \in \mathcal{E}$.

Din aceste observații se deduce că elementele din $\mathcal{E}$ au proprietatea că tind la zero, împreună cu derivatele lor, mai repede decît funcția exponențială.

Propoziția 1. *Mulțimea* $\mathcal{E}$ *este un spațiu vectorial complex.*

Într-adevăr, dacă $u \in \mathcal{E}$ și $\lambda \in \mathbb{C}$, (1) se verifică cu $|\lambda|c$ în loc de c, deci $\lambda u \in \mathcal{E}$, iar dacă $u, v \in \mathcal{E}$, va rezulta

$$|e^{at} D^k(u + v)(t)| = |e^{at} D^k u(t) + e^{at} D^k v(t)| \leqslant |e^{at} D^k u(t)| + |e^{at} D^k v(t)| \leqslant c_1 + c_2 \text{ și}$$

$$u + v \in \mathcal{E}.$$

Observația 3. Din demonstrația de la propoziția 1 rezultă relațiile

$$|\lambda u|_{k,a,M} = |\lambda|\, |u|_{k,a,M}\ |u + v|_{k,a,M} \leqslant |u|_{k,aM} + |v|_{k,a,M} \qquad (3)$$

și deci pentru orice a, $M \in \mathbb{R}$ și orice $k = 0, 1, 2, \ldots$ prin (2) se definește o mulțime numărabilă de seminorme în raport cu k.

Definiția 2. *Șirul de funcții* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *din* $\mathcal{E}$ *converge către* $u \in \mathcal{E}$ *în sensul convergenței din* $\mathcal{E}$ (notație : $u_n \xrightarrow{\mathcal{E}} u$) *dacă pentru orice* a, $M \in \mathcal{E}$ *și orice* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - u|_{k,a,M} = 0\,; \qquad (4)$$

șirul $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *din* $\mathcal{E}$ *se numește șir fundamental,* (sau șir Cauchy) *în* $\mathcal{E}$ *dacă pentru orice* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *și orice* a, $M \in \mathbb{R}$ *avem*

$$\lim_{m,n\to\infty} |u_n - u_m|_{k,a,M} = 0. \qquad (4')$$

Evident, dacă $u_n \xrightarrow{\mathcal{E}} u$ *atunci* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *este un șir fundamental din* $\mathcal{E}$.

Teorema 1. *Orice șir fundamental din* $\mathcal{E}$ *este un șir convergent în* $\mathcal{E}$. *și deci* $\mathcal{E}$ *este un spațiu Fréchet.*

Trebuie ca din (4') să rezulte existența unui element $u \in \mathcal{E}$ astfel încît $u_n \xrightarrow{\mathcal{E}} u$; or din (4') pentru $a = 0$ rezultă că șirul $(D^k u_n)_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent în intervalul $I_M = [M,\infty[$ pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots$ și deci va exista $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ astfel încît $u_n \to u$, uniform pe I_M. Dacă a este oarecare din (4') va rezulta că șirul $(e^{at} D^k u_n)_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent în I_M către funcția $e^{at} D^k u$. Prin urmare $u_n \xrightarrow{\mathcal{E}} u$.

Propoziția 2. *Sînt valabile următoarele afirmații :*

i. *Dacă* $u \in \mathcal{E}$, *atunci* $D^j u \in \mathcal{E}$ *pentru* $j = 0, 1, 2, \ldots$

ii. *Dacă* $u \in \mathcal{E}$, *atunci* $T_s u \in \mathcal{E}$, *unde* $(T_s u)(t) = u(t - s)$, $s \in \mathbb{R}$.

iii. *Dacă* $u \in \mathfrak{L}$, *atunci* $\overline{u} \in \mathfrak{L}$, *unde* $\overline{u}(t) = \overline{u(t)}$ *este funcția complex conjugată atașată lui* u.

iv. *Dacă* $u \in \mathfrak{L}$ *și dacă se notează*

$$(S_+u)(t) = -\int_t^\infty u(s)\,ds$$

atunci $S_+u \in \mathfrak{L}$.

Afirmațiile i, ii, iii sînt evidente și rămîne de justificat iv ; cum u este continuă pe intervalul $[t, \infty]$ și descrește la infinit mai repede decît e^{-at}, $(a>0)$ integrala care definește pe S_+ este convergentă uniform ; în consecință avem $DS_+u(t) = u(t)$, deci

$$|S_+u|_{k,a,M} = |u|_{k-1,a,M} \quad k = 1, 2, \ldots$$

și mai rămîne de studiat cazul $k = 0$. Dacă se presupune $t \geqslant M$, $a > 0$ se deduce

$$|S_+u| \leqslant \int_t^\infty |u(s)|\,ds \leqslant |u|_{0,a,M} \int_t^\infty e^{-as}\,ds = \frac{1}{a}\, e^{-at}\, |u_{0,a,M}| < \infty ;$$

dacă $a \leqslant 0$, deoarece $e^{at} \leqslant e^{a_1 t}$ cu $a_1 > 0$ rezultă $|u|_{k,a,M} \leqslant |u|_{k,a_1,M}$ și cum avem $|S_+u|_{0,a,M} < \infty$, pentru orice $a > 0$, cu atît mai mult $|S_+u|_{0,a,M} < \infty$ pentru $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. a. *Operațiile i—iv din propoziția 2 sînt continue ca aplicații de la* $\mathfrak{L}$ *la* $\mathfrak{L}$ *în sensul convergenței din* $\mathfrak{L}$.

b. *Dacă* $u \in \mathfrak{L}$ *atunci*

$$\frac{1}{s}(T_{-s}u - u) \xrightarrow{\mathfrak{L}} Du \quad \textit{cînd} \quad s \to 0 \tag{5}$$

Punctul a se obține cu ușurință utilizînd definițiile.

Pentru a justifica b vom considera separat părțile reale și cele imaginare din (5) scriind $u = u_1 + iu_2$ (vezi exemplul 1 de mai jos) și vom verifica b doar pentru u_1.

Fie $k = 0, 1, 2, \ldots$ fixat, $v = D^k u_1$, $t \in I_M$ și $0 < |s| \leqslant 1$; aplicînd teorema creșterilor finite rezultă

$$\frac{1}{s}[T_s v(t) - v(t)] = \frac{1}{s}[v(t+s) - v(t)] = Dv(\tau)$$

cu τ între t și $t+s$. Vom avea

$$D^k\left\{\frac{1}{s}[T_{-s}u_1(t) - u_1(t)]\right\} - D^k[Du_1(t)] = Dv(\tau) - Dv(t) = D^{k+1}u_1(\tau) - D^{k+1}u_1(t).$$

Dacă $u \in \mathfrak{L}$, atunci u_1, u_2 verifică inegalitățile (1) și fie

$$|D^{k+1}u_1(\tau) - D^{k+1}u_1(t)| \leqslant c(a, M)e^{-at}, \quad t \in I_M.$$

Cum membrul stîng al acestei inegalități tinde la zero uniform cînd $s \to 0$, pe orice interval de lungime finită, se deduce

$$\left| \frac{1}{s} [T_{-s} u_1 - u_1] - Du \right|_{k,a',M} \to 0 \text{ cînd } s \to 0$$

pentru orice $a' < a$.

Pentru definirea transformării Laplace un rol important îl joacă funcția $\exp(-zt)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ (care va înlocui funcția $\exp(ixs)$ de la transformarea Fourier).

Teorema 3. *Pentru* $\operatorname{Re} z > a$ *există un șir* $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *din* $\mathcal{L}$ *astfel încît pentru orice* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *și orice* $M \in \mathbb{R}$ *să avem*

$$\lim_{n \to \infty} |u_n(t) - e^{-zt}|_{k,a,M} = 0.$$

Fie $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ astfel încît $\varphi(t) = 1$ pentru $t = 1$ și $\varphi(t) = 0$ pentru $t \geqslant 2$; de exemplu

$$\varphi(t) = A \int_t^\infty h(s)ds,\ h(x) = g(x-1)g(2-x),\ g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right),\ x > 0,\ g(x) = 0,\ x \leqslant 0$$

cu $A > 0$ ales pentru a avea $\varphi(1) = 1$. Luînd $\varphi_n(t) = \varphi\left(\frac{t}{n}\right)$, $u_n(t) = \varphi_n(t)\, e^{zt}$, $z \in \mathbb{C}$ fiind fixat, rezultă $u_n \in C^\infty$ și $u_n(t) = 0$ pentru $t \geqslant 2n$, adică $u_n \in \mathcal{L}$. Fie $k = 1$; avem notînd $e_z(t) = e^{-zt}$:

$$e^{at}[D\, u_n(t) - D\, e_z(t)] = e^{at}[\varphi_n(t) D\, e_z(t) + e_z(t) D\, \varphi_n(t) - D\, e_z(t)] = [1 - \varphi_n(t)] z\, e^{(a-z)t} +$$

$$+ D\varphi_n(t)\, e^{(a-z)t}.$$

Prin construcție $D\varphi_n(t)$ și $1 - \varphi_n(t)$ sînt mărginite oricare ar fi t și n și se anulează în afara intervalului $[n, 2n]$; deci

$$|e^{at}\,[D\, u_n(t) - D\, e_z(t)]| \leqslant c\, e^{n(a - \operatorname{Re} z)}$$

cu c independent de n și t. Din ultima inegalitate, dacă $\operatorname{Re} z > a$ se deduce evident (6). Pentru $k > 1$, prin calcule similare se ajunge la același rezultat.

Observația 4. *Pentru* $z \in \mathbb{C}$, *funcția* $e_z(t) = e^{-zt}$ *nu este un element al spațiului* $\mathcal{L}$, *dar teorema* 3 *arată că această funcție poate fi considerată limita unui șir de funcții din* $\mathcal{L}$.

Vom încheia proprietățile de bază ale spațiului $\mathcal{L}$ justificînd următoarele rezultate :

Lema 1. a. *Pentru* $k, k' \in \mathbb{Z}$, $a \leqslant a'$, $M \geqslant M'$ *astfel încît sau* $k = k'$ *sau* $a' > 0$, *atunci există* $c > 0$ *astfel încît să avem*

$$|u|_{k,a,M} \leqslant c\, |u|_{k',a',M'} \tag{7}$$

pentru toți $u \in \mathcal{L}$.

b) *Dacă* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *este un şir din* $\mathfrak{L}$, *atunci* $u_n \overset{\mathfrak{L}}{\to} u$ *şi avem*

$$|u_n - u|_k = |u_n - u|_{k,k-k} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots$

Pentru a este suficient să justificăm (7) în cazul în care doi din cei trei indici sînt egali ; dacă $M = M'$ şi $k = k'$ sau dacă $a = a'$, $k = k'$, (7) este evident şi de aceea fie $a = a' > 0$, $M = M'$, $k' = k + j$ şi să notăm $v = \mathrm{D}^{k'}u$. Derivata $\mathrm{D}^k u$ se poate deduce din v printr-un număr de integrări : $\mathrm{D}^k u = S_+^j v$, cu $S_+^j = S_+(S_+^{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots$; utilizînd inegalitatea $|S_+ u|_{0,a,M} \leqslant \frac{1}{a} \|u\|_{0,a,M} \mathrm{e}^{-aM}$ (obţinută în demonstraţia propoziţiei 2 de un număr convenabil de ori, se deduce

$$|u|_{k,a,M} = |\mathrm{D}^k u|_{0,a,M} \leqslant \frac{1}{a^j} |v|_{0,a,M} = \frac{1}{a^j} |\mathrm{D}^{k'} u|_{0,a,M} = \frac{1}{a^j} |u|_{k',a,M}$$

şi a. este justificat.

Punctul b. rezultă din a. luînd $a = k$ şi $M = -k$ cînd $|u|_{k,a,M} \leqslant c|u|_{k,k_1-k}$ pentru toţi $u \in \mathfrak{L}$ şi o anumită constantă c ; deci dacă $|u_n - u|_k \to 0$ cînd $n \to \infty$, cu atît mai mult avem $|u_n - u|_{k,a,M} \to 0$ cînd $n \to \infty$, iar dacă $|u_n - u|_{k,a,M} \to 0$ $(n \to \infty)$ vom avea evident $|u_n - u|_{k,k-k} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Exemple 1. Dacă $u \in \mathfrak{L}$, atunci $\mathrm{Re}\, u \in \mathfrak{L}$ şi $\mathrm{Im}\, u \in \mathfrak{L}$, deoarece $\mathfrak{L}$ este spaţiu vectorial, iar cum $\bar{u} \in \mathfrak{L}$ avem $\mathrm{Re}\, u = \frac{1}{2}(\bar{u} + u) \in \mathfrak{L}$ şi $\mathrm{Im}\, u = \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{u} - u) \in \mathfrak{L}$.

2. Dacă $u(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, atunci $u \in \mathfrak{L}$, deoarece $\mathrm{e}^{at}\, \mathrm{D}^k(\mathrm{e}^{-t^2}) = \mathrm{e}^{at}\, \mathrm{e}^{-t^2} A_k H_k(t)$, unde H_k este polinomul Hermite de gradul k şi evident $|u|_{k,a,M} < \infty$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, orice $k = 0, 1, 2, \ldots$ şi orice $M \in \mathbb{R}$.

3. Dacă $u, v \in \mathfrak{L}$; atunci $uv \in \mathfrak{L}$, deoarece $|uv|_{k,a,M} = \sup_{t \in I_M} \{\mathrm{e}^{at} |\mathrm{D}^k(uv)|\}$ se exprimă prin $|u|_{k,a,M}$ şi $|v|_{k,a,M}$ în baza regulei lui Leibniz de derivare a unui produs

4. Dacă $u \in \mathfrak{L}$, atunci $u\, e_z \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathbb{C}$, deoarece avem $|u\, \mathrm{e}_z|_{k,a,M} = \sup_{t \in I_M} \{\mathrm{e}^{at} |\mathrm{D}^k(u\, \mathrm{e}^{zt})\}$ şi cum

$$|\mathrm{D}^k(u\, \mathrm{e}^{zt})| = \left| \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, \mathrm{D}^j u\, z^{k-j}\, \mathrm{e}^{zt} \right| \leqslant \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, |\mathrm{D}^j u|\, |z|^{k-j}\, \mathrm{e}^{t \mathrm{Re}\, z}, \text{ se deduce}$$

$$\sup_{t \in I_m} \{\mathrm{e}^{at} |\mathrm{D}^k(u, \mathrm{e}^{zt})|\} \leqslant \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, |z|^{k-j} \sup_{t \in I_M} \{\mathrm{e}^{(a + \mathrm{Re}\, z)t} |\mathrm{D}^j \alpha|\} < \infty.$$

ii. *Spaţiul* $\mathfrak{L}'$.

Definiţia 3. *Vom spune că* f *este o distribuţie din* $\mathfrak{L}'$ *dacă* f *este o funcţională (formă) liniară şi continuă definită pe spaţiul* $\mathfrak{L}$.

Cu alte cuvinte $f \in \mathfrak{L}'$ dacă pentru orice $u \in \mathfrak{L}$ avem $f(u) \in \mathbb{C}$ (deci $f : \mathfrak{L} \to \mathbb{C}$), iar în plus

(6) $\quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ şi orice $u \in \mathfrak{L}$

(6′) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ pentru orice $u_1, u_2 \in \mathcal{L}$

(6″) $f(u_n) \to f(u)$ pentru orice șir $(u_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathcal{L}$, $u_n \overset{\mathcal{L}}{\to} u$.

Ca de obicei, se mai folosește și notația

$$f(u) = \langle f, u \rangle$$

Exemple 1. Distribuția lui Dirac $\delta \in \mathcal{L}'$ dacă δ se definește prin

$$\delta(u) = u(0)$$

deoarece se verifică imediat toate restricțiile impuse de definiție.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ astfel încît f este integrabilă pe $\mathbb{R}$, $f(t) = 0$ dacă $t \leqslant M$ și $|e^{-at} f(t)| \leqslant c \in \mathbb{R}$, pentru un $a \in \mathbb{R}$; definind $f(u)$ prin

$$f(u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)u(t)\,dt = \int_M^\infty f(t)u(t)\,dt$$

rezultă $f \in \mathcal{L}'$ și vom spune că f este o distribuție regulată (sau o distribuție din $\mathcal{L}'$ de tipul funcțiilor). Într-adevăr, fie $a' \in \mathbb{R}$, $a' > a$; avem

$$|f(t)u(t)| = |e^{-at} f(t)|\, |e^{a't}\, u(t)|\, e^{(a-a')t} \leqslant c\, e^{(a-a')t} |u|_{0,a',M}$$

și rezultă că integrala improprie $\int_M^\infty f(t)u(t)dt$ este absolut și uniform convergentă, iar în plus

$$|f(u)| \leqslant c|u|_{0,a,M} \int_M^\infty e^{-(a'-a)t}\,dt = c_1 |u|_{0,a'M'} \quad c_1 = \frac{1}{a'-a}\,[1 - e^{(a-a')M}].$$

Evident f este formă liniară în raport cu u și fiind mărginită va rezulta că f este continuă.

3. Dacă $e_{-z}(t) = e^{zt}$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, atunci definind f_z prin

$$f_z(u) = \int_0^\infty e^{zt} u(t)\,dt$$

deoarece $|e^{zt}| = e^{t \operatorname{Re} z}$, punînd $f(t) = 0$ pentru $t \leqslant 0$ $f(t) = e_{-z}(t)$ pentru $t > 0$, ne încadrăm în exemplul 2 și deci $f_z \in \mathcal{L}'$.

Folosind proprietățile spațiului $\mathcal{L}$ deduse la secțiunea i rezultă, cu ajutorul unor calcule care sînt complet analoage celor din cazul distribuțiilor lui Schwartz sau al distribuțiilor periodice, că distribuțiile din $\mathcal{L}'$ au aceleași proprietăți ca și distribuțiile de orice alt tip; în teorema care urmează vom enunța proprietățile principale ale distri-

buțiilor din $\mathfrak{L}'$, demonstrațiile putîndu-se realiza după modelul standard.

Teorema 4. i. *Spațiul $\mathfrak{L}'$ este un spațiu vectorial complex, adică*

$$\lambda f \in \mathfrak{L}', \text{ dacă } \lambda \in \mathbb{C} \text{ și } f \in \mathfrak{L}'$$

$$f + g \in \mathfrak{L}' \text{ dacă } f, g \in \mathfrak{L}'$$

ii. *Dacă $f \in \mathfrak{L}'$ atunci translația lui f prin $s \in \mathbb{R}$, $T_s f$ se definește prin*

$$(T_s f)(u) = f(T_{-s}u), \ u \in \mathfrak{L}, \ (T_{-s}u)(t) = u(t + s);$$

și $T_s f \in \mathfrak{L}'$.

iii. *Dacă $f \in \mathfrak{L}'$, complex conjugatul său notat $\bar{f}$ se definește prin*

$$\bar{f}(u) = \overline{f(\bar{u})}$$

și $\bar{f} \in \mathfrak{L}'$; prin definiție $f \in \mathfrak{L}'$ este reală dacă $f = \bar{f}$, iar distribuțiile

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \ \operatorname{Im} f = \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{f} - f)$$

se numesc partea reală și parte a imaginară a distribuției f și $\operatorname{Re} f \in \mathfrak{L}'$, $\operatorname{Im} f \in \mathfrak{L}'$.

iv. *Dacă $f \in \mathfrak{L}'$, derivata $\mathrm{D}f$ a acestei distribuții se definește prin*

$$(\mathrm{D}f)(u) = -f(\mathrm{D}u), \ u \in \mathfrak{L},$$

iar derivatele de ordin superior se definesc prin

$$(\mathrm{D}^k f)(u) = (-1)^k f(\mathrm{D}^k u), \ u \in \mathfrak{L}, \ k = 2, 3, \ldots \text{ și}$$

avem $\mathrm{D}^k f \in \mathfrak{L}'$, $k = 1, 2, \ldots$

v. *Un șir $(f_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathfrak{L}'$ este convergent către $f \in \mathfrak{L}'$ în sensul lui $\mathfrak{L}'$ dacă pentru orice $u \in \mathfrak{L}$, șirul $(f_n(u))_{n \geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$ converge către $f(u)$ și în acest caz se folosește notația $f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} f$. Au loc relațiile*

$$af_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} af, \text{ dacă } f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} f$$

$$f_n + g_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} f + g, \text{ dacă } f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} f, \ g_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} g$$

$$T_s f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} T_s f, \text{ dacă } f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} f, \ s \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{D}^k f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} \mathrm{D}^k f, \text{ dacă } f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}'} f, \ k = 1, 2, \ldots$$

$$\frac{1}{s}(T_{-s}f - f) \xrightarrow{\mathfrak{L}'} \mathrm{D}f, \text{ dacă } s \to 0.$$

vi. *Forma liniară* $f : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ *este continuă dacă și numai dacă există un întreg* $k \geqslant 0$ *și constantele reale* a, M, K *astfel încît*

$$|F(u)| \leqslant K\ |u|_{k,a,M},\ \textit{pentru orice}\ u \in \mathcal{L}.$$

vii. *Distribuția* f *din* $\mathcal{L}'$ *se spune că are ordinul* k *dacă inegalitatea de la* vi *are loc (deci proprietatea* vi *afirmă că orice distribuție* f *din* $\mathcal{L}'$ *are ordinul finit* k *depinzînd de* f*); dacă* $f \in \mathcal{L}'$ *și are ordinul* $k - 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 2$, *atunci* f *se poate scrie ca fiind derivata de ordinul* k *a unei distribuții regulate din* $\mathcal{L}'$, *unic determinate*

$$f = \mathrm{D}^k g,$$

g *fiind o distribuție regulată care verifică* $|g(t)| \leqslant ce^{kt}$, $t \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b > a$, $c \geqslant 0$.

Vom încheia prezentarea proprietăților distribuțiilor din $\mathcal{L}'$, indicînd o proprietate specifică a acestora. După cum știm, prin suportul funcției $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se înțelege cea mai mică mulțime închisă $A \subset \mathbb{R}$ astfel încît $u(t) = 0$ dacă $t \notin A$ și se notează $A = \operatorname{supp} u$; cu alte cuvinte $t_0 \notin \operatorname{supp} u$ dacă și numai dacă $u(t) = 0$, pentru $t \in]\, t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2[$, cu $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ suficient de mici.

Suportul unei distribuții se definește în mod similar; dacă $f \in \mathcal{L}'$ și $\operatorname{supp} f$ este suportul acestei distribuții, atunci $t_0 \notin \operatorname{supp} f$ dacă există $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ suficient de mici astfel încît $f(u) = 0$, pentru orice u avînd proprietatea $\operatorname{supp} u \subset]t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2[$.

Proprietatea vi din teorema 4 are drept consecință faptul că pentru orice $f \in \mathcal{L}'$ avem $\operatorname{supp} f \subset [M, \infty[$ pentru un $M \in \mathbb{R}$; într-adevăr, să alegem k, a, M astfel încît să avem (conform cu vi din teorema 4)

$$|F(u)| \leqslant K\ |u|_{k,a,M}$$

cu $K > 0$ convenabil determinat.

Dacă $u \in \mathcal{L}$ și $\operatorname{supp} u \subset [-\infty, M[$, rezultă

$$|u|_{k,a,M} = \left|\sup_{t \in I_M} e^{at} \mathrm{D}^k u(t)\right| = 0,$$

deoarece $I_M = [M, \infty[$; prin urmare avem $|F(u)| \leqslant 0$, ceea ce implică $F(u) = 0$ pentru orice u astfel încît $\operatorname{supp} u \subset]-\infty, M[$.

iii. *Transformarea Laplace a funcțiilor.* Fie $f \in \mathcal{L}'$ o distribuție regulată; conform rezultatelor din secțiunea precedentă f va verifica următoarele restricții:

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este integrabilă pe orice interval din $\mathbb{R}$;

b. $\operatorname{supp} f \subset [M, \infty[$, $M \in \mathbb{R}$

c. $|f(t)| \leqslant K e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$, $K \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Definiția 4. *Dacă f verifică restricțiile* a, b, c, prin *transformarea Laplace* a acestei funcții se înțelege funcția $Lf : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$(Lf)(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}_z(t)\,\mathrm{d}t = \int_M f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Ca o consecință a acestei definiții are loc

Teorema 5. *Dacă f verifică restricțiile* a, b, *și* c, *Lf este o funcție olomorfă în semiplanul* $\mathrm{Re}\, z > a$ *pentru care este valabilă evaluarea*

$$|(Lf(z))| \leqslant \frac{K}{\mathrm{Re}\, z - a}\,\mathrm{e}^{M(a-\mathrm{Re}\, z)},\ \mathrm{Re}\, z > a. \tag{8}$$

Pentru $\mathrm{Re}\, z > a$ avem utilizînd c

$$|f(t)\mathrm{e}_z(t)| = |f(t)|\,|\mathrm{e}^{-zt}| \leqslant K\,\mathrm{e}^{(a-\mathrm{Re}\, z)t}$$

ceea ce implică uniform convergența integralei din (7) precum și evaluarea (8); pentru a arăta că $(Lf)(z)$ este olomorfă pentru $\mathrm{Re}\, z > a$ este suficient să deducem convergența uniformă a integralei $\int_M tf(t)\mathrm{e}_z(t)\mathrm{d}t$ prin derivare directă în (7) sub semnul integral. Or $|tf(t)\,\mathrm{e}_z(t)| \leqslant K|t|\,\mathrm{e}^{(a-\mathrm{Re}\, z)t}$, dacă se utilizează c și integrala $\int_M |t|\mathrm{e}^{(a-\mathrm{Re}\, z)t}\,\mathrm{d}t$ va fi evident uniform convergentă dacă $\mathrm{Re}\, z > a$.

Ca și în cazul transformării Fourier, problema principală care trebuie rezolvată este determinarea lui f dacă se cunoaște Lf.

Să observăm că inițial nu s-a presupus integrabilitatea funcției f, dar condiția c. asigură această integrabilitate după înmulțirea funcției cu exponențiala e^{-at}; atunci integrala

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} [f(t)\,\mathrm{e}^{-yt}]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t,\ z = x + \mathrm{i}y \tag{9}$$

conform ipotezei c, este convergentă pentru $y = \mathrm{Im}\, z > a$ și poate fi interpretată ca fiind transformarea Fourier a funcției $f(t)\,\mathrm{e}^{-yt}$. Prin urmare, dacă se cunoaște funcția $g = Lf$, rezultă că funcția $f(t)\mathrm{e}^{-yt}$ poate fi obținută utilizînd formula de inversare Fourier (în ipoteza că se verifică ipotezele în care această formulă este inversabilă). Așadar, avem

$$f(t)\,\mathrm{e}^{-yt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x \text{ sau } f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x+\mathrm{i}y)}\,\mathrm{d}x,$$

iar cu schimbarea de variabilă $x + iy \to z$, $dx = dz$, rezultă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} g(z)\, e^{-izt}\, dz \tag{9'}$$

ntegrala realizîndu-se în $\mathbb{C}$ pe o dreaptă paralelă cu axa reală situată la distanța $|y|$ de aceasta; efectuînd încă o schimbare de variabilă, punînd $-iz = p$, $dz = -\frac{1}{i}\, dp$ (deci $p = y - ix$) (9') se transcrie

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{y+i\infty}^{y-i\infty} g(ip)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} g(ip)\, e^{pt}\, dp$$

sau, deoarece din (9) și (7) rezultă

$$g(ip) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-pt}\, dt = (Lf)(p)$$

se obține formula de inversare (scriind b în loc de y)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} (Lf)(p)\, e^{pt}\, dp, \quad b > a, \tag{10}$$

integrarea realizîndu-se pe orice dreaptă din semiplanul $\operatorname{Re} p > a$ paralelă cu axa imaginară; cum s-a presupus $g = Lf$, are loc inegalitatea (8) din care se deduce că integrala din (10) nu depinde de b, în sensul că înlocuind pe b prin $b' > b$, valoarea integralei nu se modifică, luînd în considerație dreptunghiul cu vîrfurile în punctele A, B, C, D care sînt afixele punctelor $b + i\alpha$, $b - i\alpha$, $b' - i\alpha$, $b' + i\alpha$ respectiv, integrandul fiind o funcție olomorfă în interiorul dreptunghiului, integrala este nulă; calculînd integralele pe segmentele orizontale BC și AD, în baza lui (8) aceste integrale vor tinde la zero uniform, rezultînd

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} (Lf)(z)\, e^{zt}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{b'-i\infty}^{b'+i\infty} (Lf)(z)\, e^{zt}\, dz, \quad b' > b > a.$$

Definiția 5. *Egalitatea* (10) *poartă numele de formula lui Mellin (sau formula Fourier-Mellin) pentru transformarea Laplace.*

Egalitatea (10) a fost obținută prin considerente formale; se pot obține condiții suficiente pentru $Lf = g$ astfel încît formula lui

Mellin (10) să definească efectiv o funcție f având proprietățile a, b și c. Astfel:

Teorema 6. *Fie g olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} z > a$, $a \in \mathbb{R}$, în care verifică inegalitatea*

$$|g(z)| \leqslant \frac{K\, e^{-M \operatorname{Re} z}}{(1 + |z|)^n}, \quad n \geqslant 2 \tag{11}$$

Va exista o singură funcție continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită de formula lui Mellin (10) având proprietățile:

$$\operatorname{supp} f \subset [M_1, \infty[, \quad M_1 \in \mathbb{R} \text{ fixat}, \quad M_1 \geqslant M; \tag{12}$$

$$|f(t)| \leqslant K\, e^{bt} \quad b \in \mathbb{R} \text{ fixat}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ arbitrar} \tag{12'}$$

$$(Lf)(z) = g(z) \text{ pentru } \operatorname{Re} z > b. \tag{12''}$$

Fie $b \in \mathbb{R}$ astfel încît $b > a$: datorită inegalității (11) rezultă că integrala din (10) este uniform convergentă și nu depinde de b; în plus,

$$|f(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_b} e^{zt} g(z)\, dz \right| \leqslant c\, e^{b(t-M)}, \; t > a, \gamma_b : z = b + is, s \in \mathbb{R} \tag{13}$$

deoarece

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_b} e^{zt} g(z)\, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{(b+is)t} g(b + is)\, ds \right| \leqslant \frac{e^{bt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ist} g(b + is)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{bt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K\, e^{-Mb}\, ds}{(1 + \sqrt{b^2 + s^2})^n} \leqslant c\, e^{b(t-M)}, \; c = \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(1 + |s|)^n}, \quad n \geqslant 2.$$

Integrala cu ajutorul căreia se definește c fiind evident convergentă se constată că c nu depinde de t și b (s-a utilizat faptul că $1 + \sqrt{b^2 + s^2} \geqslant 1 + |s|$). Din (13) pentru $t > M$ rezultă (12'), iar dacă $t < M$, pentru $b \to \infty$ rezultă $f(t) = 0$, adică $\operatorname{supp} f \subset [M, \infty[$ și continuitatea lui f rezultă din uniform convergența integralei lui Mellin; rămîne de arătat că pentru această funcție avem $Lf = g$. Or fiind verificate condițiile a, b c pentru f definit prin formula lui Mellin are sens $(Lf)(p)$ definit pentru $\operatorname{Re} p > a$ și să alegem $b \in \mathbb{R}$ astfel încît $a < b < \operatorname{Re} p$; vom avea:

$$(Lf)(p) = \int_M^{\infty} e^{-pt} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_b} e^{zt} g(z)\, dz \right] dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_b} g(z) \left[\int_M^{\infty} e^{(z-p)t}\, dt \right] dz,$$

schimbarea ordinii de integrare fiind posibilă pentru $t \in \mathbb{R}$ și $z \in \mathbb{C}$ deoarece din (11) se deduce inegalitatea

$$|e^{-pt+zt} g(z)| \leqslant \frac{c}{(1 + |z|)^n} e^{-Mb + t(b - \operatorname{Re} p)}.$$

Cum $\int_M^\infty e^{(z-p)t}\,dt = \frac{e^{(z-p)M}}{p-z}$, rezultă, prin utilizarea formulei lui Cauchy

$$(Lf)(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_b} \frac{g(z)\,e^{(z-p)M}}{z-p}\,dz = g(z)\,e^{(z-p)M}\Big|_{z=p} = g(p); \qquad (14)$$

deși formula lui Cauchy a fost justificată pentru contururi simple închise din $\mathbb{C}$, utilizînd evaluarea $|g(z)\,e^{(z-p)M}| \leqslant \frac{c}{(1+|z|)^n}$ și dreptunghiul $ABCD$ folosit anterior, pentru care se poate aplica formula lui Cauchy, prin trecere la limită, pentru $\alpha \to \infty$, $b' \to \infty$ rezultă (14). Deoarece dacă $f = 0$ se obține $Lf = 0$, din rezultatele anterioare se deduce și $f = 0$ dacă $Lf = 0$, ceea ce atestă unicitatea lui f definit prin formula lui Mellin (10).

Observația 5. Utilizînd conturul simplu $ABC'D'$, cu C', D' simetricele față de $\operatorname{Re} z = b$ ale punctelor C, D sau orice contur omotop cu acesta, situat în semiplanul $\operatorname{Re} z < b$, avînd cu dreapta $\operatorname{Re} z = b$ porțiunea AB comună, care se menține cînd $\alpha \to \infty$, se poate aplica teorema reziduurilor obținîndu-se astfel f din Lf; de exemplu dacă g este olomorfă pentru $\operatorname{Re} z > b$ cu poli simpli în punctele z_1, $z_2, \ldots, z_n$, $\operatorname{Re} z_j < b$, $j = 1, 2, \ldots$, iar g verifică condiții prin care integralele calculate pe AD', BC' și $C'D$ tind la zero cînd $\alpha \to \infty$, $b' \to \infty$ ($\operatorname{Re} z = b$ dacă $z \in C'D'$) atunci se deduce

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_b} g(z)\,e^{zt}\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(g(z)\,e^{zt}; z_j) = \frac{h_1(z_j)\,e^{z_j t}}{h_2'(z_j)},\ t > 0 \qquad (15)$$

dacă $g = \frac{h_1}{h_2}$. Evident, formula (15) este adaptabilă și în cazul polilor multipli pentru g.

Observația 6. În practică se presupune $M = 0$ în condiția b și o funcție care verifică a, b și c se va numi *funcție original*, iar transformarea ei Laplace va purta numele de *funcție imagine*.

Observația 7. Dacă f și g sînt funcții original, convoluția lor se scrie sub forma simplă

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt \qquad (16)$$

deoarece în baza definiției avem

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(x-t)g(t)\,dt + \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt +$$

$$+ \int_x^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt,$$

iar prima și ultima integrală sînt nule (avem $g(t) = 0$ pentru $t < 0$ respectiv $f(x - t) = 0$ pentru $t > x$). Ca și în cazul transformării Fourier, are loc formula

$$L(f*g)(z) = (Lf)(z) \cdot (Lg)(z), \tag{17}$$

care se poate obține și direct calculînd pe baza definiției membrul stîng.

Observația 8. Dacă $f, f', \ldots, f^{(m)}$ sînt funcții original, atunci transformarea Laplace a derivatei $f^{(m)}$ se exprimă cu ajutorul transformării Laplace a lui f prin formula

$$L(f^{(m)})(z) = z^m(Lf)(z) - z^{m-1} f(0+) - z^{m-2} f'(0+) - \ldots - \\ - z f^{(m-2)}(0+) - f^{(m-1)}(0+) \tag{18}$$

care se obține cu ușurință cu ajutorul a m integrări prin părți.

Observația 9. Formulele (17) și (18) stau la baza calculului operațional care este aplicabil unor ecuații sau sisteme de ecuații diferențiale sau cu derivate parțiale și unor ecuații integrale.

În acest context, operația de derivare din spațiul funcțiilor original se transformă în operația de înmulțire cu z în spațiul funcțiilor imagine (deci operația de integrare din spațiul funcțiilor original se va transforma în operația de împărțire cu z în spațiul funcțiilor imagine : $L\left(\int_0^t (f(x)\,dx)\right)(z) = \frac{1}{z} L(f)(z)$, deoarece scriind $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$, dacă $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ avem $g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0$, iar (18) devine $L(g')(z) = z(Lg)(z) - g(0+) = zL(g)(z)$ sau $L(g)(z) = \frac{1}{z}(Lg')(z)$ care coincide cu egalitatea anterioară). De asemenea, convoluției funcțiilor original îi corespunde produsul funcțiilor imagine din spațiul acestor funcții ; în acest mod operațiilor de derivare, integrare, convoluție, le corespund operații algebrice în spațiul funcțiilor imagine ceea ce simplifică anumite calcule în unele situații.

În plus, deoarece se poate justifica ușor egalitatea

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty L(f)(z)\,dz \tag{19}$$

dacă una din integralele improprii din această egalitate există, va exista și cealaltă integrală și deci transformarea Laplace poate fi utilizată și la calculul unor integrale improprii.

Observația 10. Condiția (11) din teorema 6 este doar o condiție suficientă pentru existența unei funcții original cu proprietatea $Lf = g$; într-adevăr, luînd, de exemplu, $g(z) = \frac{1}{z}$, prin aplicarea formulei (15) se deduce

$$f(t) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z}\,;\ 0\right) = 1,\ t > 0,\ f(t) = 0,\ t < 0.$$

Un calcul direct arată că într-adevăr funcția-unitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t)=0$, $t<0$ și $f(t)=1$, $t>0$ admite transformare Laplace și $L(f)(z)= = \int_0^\infty e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z}$.

Alte proprietăți ale transformării Laplace vor fi evidențiate la secțiunea următoare.

iv. *Transformarea Laplace a distribuțiilor.* Fie $\mathcal{L}'$ spațiul formelor liniare și continue pe spațiul $\mathcal{L}$ definit în secțiunea ii; reamintim că $f \in \mathcal{L}'$ dacă $f : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$, $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$, pentru orice u, $v \in \mathcal{L}$ și orice $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ iar $f(u_n) \to f(u)$ $(n \to \infty)$ dacă $u_n \xrightarrow{\mathcal{L}} u$; $u_n \xrightarrow{\mathcal{L}} u$ dacă $(u_n)_{n \geqslant 1}$ este un șir din $\mathcal{L}$ astfel încît

$$|u_n - u|_{k,a,M} = \sup_{t \in [M,\infty[} \{e^{at} |D^k(u_n - u)(t)|\} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

pentru orice a, $M \in \mathbb{R}$ și orice $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$. În baza lui vi de la teorema 4, dacă $f \in \mathcal{L}'$, există constantele k, a, M, K, astfel încît să avem

$$|f(u)| \leqslant K |u|_{k,a,M} \text{ pentru orice } u \in \mathcal{L} \tag{20}$$

iar numărul întreg pozitiv k definește ordinul distribuției f din $\mathcal{L}'$. La secțiunea anterioară s-a definit transformarea Laplace a unei funcții care îndeplinea anumite restricții; în această definiție rolul principal îl juca funcția $e_z(t) = e^{-zt}$; $e_z \notin \mathcal{L}$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$ însă s-a arătat că există un șir $(u_n)_{n \geqslant 1}$ din $\mathcal{L}$ avînd proprietatea (teorema 3)

$$|u_n - e_z|_{k,a,M} \to 0 \ (n \to \infty). \tag{21}$$

Luînd în considerație șirul din (21), se deduce că șirul $(F(u_n))_{n \geqslant 1}$ din $\mathbb{C}$ este un șir fundamental, deoarece din (20) și (21) rezultă

$$|f(u_n) - f(u_m)| = |f(u_n - u_m)| \leqslant K |u_n - u_m|_{k,a,M} \leqslant K(|u_n - e_z|_{k,a,M} + |u_m - e_z|_{k,a,M})$$

și deci $|f(u_n) - f(u_m)| \to 0$ cînd $n, m \to \infty$. În baza continuității formei $f(u)$, $u \in \mathfrak{L}$, este naturală următoarea definiție :

Definiția 6. *Dacă $f \in \mathfrak{L}'$ atunci transformarea Laplace Lf a distribuției f din $\mathfrak{L}'$ este limita*

$$(Lf)(z) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \tag{22}$$

unde $(u_n)_{n\geqslant 1}$ este șirul din $\mathfrak{L}$ definit prin (21).

Vom conveni să scriem (avînd în vedere (21))

$$(Lf)(z) = f(e_z) \tag{22'}$$

deși $e_z \notin \mathfrak{L}$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$; definiția (22) este corectă deoarece Lf nu depinde de șirul $(u_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathfrak{L}$ care apare în (22), pentru că dacă $(v_n)_{n\geqslant 1}$ este un alt șir din $\mathfrak{L}$ pentru care avem $|v_n - e_z|_{k,a,M} \to 0$ $(n \to \infty)$, se deduce

$$|F(u_n) - F(v_n)| = |F(u_n - v_n)| \leqslant K\,|u_n - v_n|_{k,a,M} \to 0\,(n \to \infty).$$

Exemple. 4. Dacă $f = \delta$, δ fiind distribuția lui Dirac, avem $(L\delta)(z) = \delta(e_z) = e^{-zt}|_{t=0} = 1$.

5. Dacă $f \in \mathfrak{L}'$ este o distribuție regulată, atunci considerînd f ca o distribuție din $\mathfrak{L}'$, din (22') se deduce

$$(Lf)(z) = f(e_z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-zt}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-zt}\,dt$$

și deci în baza definiției 4, rezultă că s-a obținut transformarea Laplace a funcției f.

Vom specifica acum cîteva proprietăți ale transformării Laplace Lf, $f \in \mathfrak{L}'$, care în baza exemplului 5, vor fi valabile și în cazul funcțiilor.

Teorema 7. *Fie $f, g \in \mathfrak{L}'$ și $\lambda \in \mathbb{C}$. Atunci :*

i. $L(\lambda f) = \lambda Lf$

ii. $L(f + g) = Lf + Lg$ *(pe mulțimea comună de existență a transformărilor Lf și Lg)*

iii. $L(T_s f)(z) = e^{-sz}(Lf)(z)$, *unde* $(T_s f)(u) = f(T_{-s}u)$, $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathfrak{L}$

iv. $L(D^k f)(z) = z^k(Lf)(z)$, $k = 1, 2, \ldots$

v. $L(S_- f)(z) = \dfrac{1}{z}(Lf)(z)$, *unde* $(S_{-f})(u) = -f(S_+ u)$, $(S_+ u)(t) =$

$$= -\int_t^{\infty} u(s)\,ds,\ u \in \mathfrak{L}$$

vi. $L(e_w f)(z) = (Lf)(z + w)$, *unde* $(e_w f)(u) = f(e_w u)$, $u \in \mathfrak{L}$.

i și ii rezultă direct din definiție. Pentru a justifica iii se poate utiliza definiția 6 și fie $(u_n)_{n\geqslant 1}$ un șir din $\mathcal{E}$ astfel, încît $|u_n - e_z|_{k,a,M} \to 0$ $(n \to \infty)$; șirul $(T_{-s}u_n)_{n\geqslant 1}$, $(T_{-s}u_n)(t) = u_n(t+s)$, $n = 1, 2 \ldots$ va avea evident proprietatea

$|T_{-s}u_n - T_{-s}e_z| \to 0$ $(n \to \infty)$ și deoarece $(T_{-s}e_z)(t) = e^{-z(t+s)} = e^{-zt}.e^{-zs} = e^{-zs}e_z(t)$

din (22) se deduce

$$L(T_sf)(z) = \lim_{n\to\infty}(T_sf)(u_n) = \lim_{n\to\infty} f(T_{-s}u_n) = f(T_{-s}e_z) = f(e^{-zs}e_z) = e^{-zs}f(e_z) =$$

$$= e^{-zs}(Lf)(z).$$

Pentru iv, din definiție, rezultă

$$L(D^kf)(z) = D^kf(e_z) = (-1)^kf(D^k e^{-zt}) = (-1)^k f((-z)^k e_z) =$$

$$= z^kf(e_z) = z^k(Lf)(z)$$ iar tot din definiție rezultă

$$L(S_-f)(z) = (S_-f)(e_z) = -f(S_+e_z) = -f\left(-\int_t^\infty e^{-zs}\,ds\right) = f\left(\frac{1}{z}e_z\right) =$$

$$= \frac{1}{z}f(e_z) = \frac{1}{z}(Lf)(z).$$

În sfîrșit, din șirul de egalități

$$L(e_wf)(z) = (e_wf)(e_z) = f(e_we_z) = f(e_{w+z})$$

rezultă vi.

Observația 11. Proprietățile i, ii, iii și vi din teorema 7 sînt valabile pentru transformarea Laplace a funcțiilor original și pot fi justificate imediat utilizînd proprietățile integralelor; proprietatea iv însă diferă de egalitatea (18) valabilă pentru funcțiile original; vom reveni asupra acestei probleme.

Teorema 8. i. *Fie* $f \in \mathcal{E}'$, *astfel încît* $|f(u)| \leqslant K'|u|_{k,a,M}$ *pentru orice* $u \in \mathcal{E}$, $K' > 0$, a, $M \in \mathbb{R}$ *și* $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$; *atunci transformarea Laplace* Lf *există și definește o funcție olomorfă în semiplanul* $\operatorname{Re} z > a$. ii. *O funcție* g *olomorfă în semiplanul* $\operatorname{Re} z > 0$ *poate fi considerată ca fiind transformarea Laplace a unei distribuții din* $\mathcal{E}'$ *dacă și numai dacă există constantele* a, M, $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ *și numărul întreg* k *astfel încît să fie valabilă evaluarea*

$$|g(z)| \leqslant K(1 + |z|)^k e^{-M\operatorname{Re}z},\ \operatorname{Re} z > a \qquad (23)$$

În baza lui vii de la teorema 4, dacă $f \in \mathcal{E}'$, va exista distribuția regulată f_1, astfel încît $f = D^kf_1$ (derivarea în sensul teoriei distribuțiilor) și în plus $|f_1(t)| \leqslant ce^{bt}$, $t \in \mathbb{R}$, iar $b \in \mathbb{R}$ este astfel încît $b > \max\{a, 0\}$. În aceste condiții Lf_1 va fi o funcție olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} z > b$ și de aceea și derivata de orice ordin a lui Lf_1 va fi o funcție olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} z > b$ (dacă f este derivabilă, derivata în sensul teoriei distribuțiilor coincide cu derivata în sens clasic). De aceea i este justificat pentru $a \geqslant 0$; dacă $a < 0$, fie $g \in \mathcal{E}'$ cu $g = e_af$, ceea ce face să avem $|g(u)| = |e^{-at}f(u)| \leqslant K'|u|_{k,0,M}$ și deci g

este olomorfă pentru $\operatorname{Re} z > 0$. Utilizînd vi din teorema 7 se deduce $(Lf)(z) = (Lg)(z-a)$ ceea ce antrenează olomorfia lui Lf pentru $\operatorname{Re} z > a$.

ii. Dacă $g = Lf$, $f \in \mathcal{E}'$ și vom avea $|f(u)| \leqslant K'|u|_{k,a,M} = K' \sup_{t \in I_M} \{e^{at} D^k u(t)\}$, $I_M = [M, \infty]$;) pentru $\operatorname{Re} z > a$, vom putea scrie din (22′)

$$|(Lf)(z)| = |f(e_z)| \leqslant K'|e^{-zt}|_{k,a,M} = K' \sup_{t \in I_M} \{e^{at}|D^k e^{-zt}|\} =$$

$$= K' \sup_{t \in I_M} \{e^{at}|(-z)^k e^{-zt}|\} = K'|z|^k \sup_{t \in I_M} \{e^{at - t\operatorname{Re} z}\} = K' e^{aM}(1 + |z|)^k e^{-M \operatorname{Re} z} =$$

$$= K(1 + |z|)^k e^{-M \operatorname{Re} z}$$

cu $K = K' e^{aM}$ și (23) se verifică.

Reciproc, dacă se verifică (23), se poate aplica formula lui Mellin (10) funcției $h(z) = \dfrac{g(z)}{z^{k+2}}$ luînd $b > \max\{a, 0\}$ și deci va exista f_1 (funcție-original continuă) astfel încît $h = Lf_1$; rezultă $g(z) = z^{k+2}(Lf_1)(z)$ și conform cu iv din teorema 7 se deduce $g(z) = L(D^{k+2} f_1)(t) = (Lf)(z)$ dacă $f = D^{k+2} f_1$ și ii este justificat dacă $a > 0$.

Dacă $a < 0$, fie $g_1(z) = g(z + a)$ și g_1 va fi olomorfă pentru $\operatorname{Re} z > 0$ și va satisface o inegalitate de forma (23), eventual cu o altă constantă K; această înseamnă că $g_1 = Lf_2$ pentru un $f_2 \in \mathcal{E}'$ și pentru $\operatorname{Re} z > 0$. Aplicînd acum vi din teorema 7 (cu $w = a$) vom avea $g = Lf$ cu $f = e_{-a} f_2$.

Teorema 8. este centrală în teoria transformării Laplace și cu ajutorul ei putem decide dacă funcțiile olomorfe în semiplanul $\operatorname{Re} z > a$ sînt sau nu posibile transformări Laplace ale unor distribuții din $\mathcal{E}'$; combinînd acest rezultat cu teorema 6 rezultă că pentru $k = -2, -3, \ldots$ distribuțiile $f \in \mathcal{E}'$ pentru care $Lf = g$ și g verifică (23) sînt distribuții regulate (vezi și observația 10). Pentru $k = 0, 1, \ldots$ nu se mai verifică condițiile din teorema 5 și deci distribuțiile $f \in \mathcal{E}'$ cu proprietatea $Lf = g$ vor fi distribuții singulare.

Exemple 6. Dacă $f = D^k \delta$, δ fiind distribuție lui Dirac definită prin $\delta(u) = u(0)$, $u \in \mathcal{E}$, în baza lui iv din teorema 7 avem

$$L(D^k \delta)(z) = z^k (L\delta)(z) = z^k, k = 1, 2, \ldots.$$

deoarece $(L\delta)(z) = \delta(e_z) = 1$.

7. Să calculăm $L(T_s \delta)$, unde $(T_s \delta)(u) = \delta(T_{-s} u)$; în baza proprietății iii din teorema 7, rezultă

$$L(T_s \delta)(z) = e^{-sz} L(\delta)(z) = e^{-sz}, s \in \mathbb{R}.$$

Să facem unele considerații privind transformarea Laplace a convoluției $f * g$, $f, g \in \mathcal{E}'$; dacă f și g sînt distribuții regulate, în baza lui (17) avem

$$L(f * g) = (Lf)(Lg) \tag{24}$$

și egalitatea rămîne valabilă pentru orice $f, g \in \mathcal{L}'$, justificarea realizîndu-se în etape în modul următor :

Dacă f și g sînt funcții original, atunci se poate scrie șirul de egalități

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\check{g}(t-x)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(T_x\check{g})(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(t-x)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (T_x\check{f})(t)g(t)\,dt,$$

și deci presupunînd $f \in \mathcal{L}'$ și $g = u \in \mathcal{L}$, vom defini convoluția $f * u$ prin

$$(f*u)(x) = (T_x\check{f})(u) = f(T_{-x}u). \tag{25}$$

Cu ajutorul relației (25) se definește un element din $\mathcal{L}$ și de aceea dacă $f, g \in \mathcal{L}'$, deoarece $g*u \in \mathcal{L}$, are sens $f(g*u)$ și vom pune, prin definiție

$$(f*g)(u) = f(\check{g}*u),\ (\check{g}*u)(t) = g(T_{-t}u). \tag{26}$$

Este ușor de verificat că $f * g \in \mathcal{L}'$, iar dacă f și g sînt distribuții regulate din $\mathcal{L}'$, atunci (26) conduce la definiția uzuală a convoluției pentru două funcții original ; calculînd $L(f * g)$, rezultă

$$L(f * g)(z) = (f * g)(e_z) = f(\check{g} * e_z),$$

și deoarece $(\hat{g} * e_z)(x) = g(T_{-x}e_z) = g(e^{-z(t+x)}) = e^{-zx}g(e_z) =$
$= e^{-zx}(Lg)(z)$ se deduce egalitatea (24) :

$$L(f * g)(z) = f(e^{-zx}Lg) = f(e_z)Lg = (Lf)(Lg)(z).$$

Egalitatea (24) se poate justifica utilizînd faptul că ea este valabilă pentru funcții continue din $\mathcal{L}'$ (vezi (17)) și rezultatul vii din teorema 4 și anume $f = D^k h$, h fiind o funcție continuă și k un număr întreg pozitiv ; scriind $g = D^{k_1}h_1$, avem

$$L(f * g) = L[(D^k h) * (D^{k_1}h_1)] = L(D^{k_1+k}(h * h_1)] =$$

$$= z^{k_1+k}\,L(h_1 * h) = z^{k_1+k}(Lh_1)\,L(h) =$$

$$= [z^{k_1}L(h_1)]\,[z^k L(h)] = L(D^{k_1}h_1)\cdot L(D^k h) = L(f)\cdot L(g).$$

Exemple 8. Avem $\delta * f = f, f \in \mathcal{L}'$, deoarece $L(\delta * f) = L(\delta)L(f) = 1 \cdot L(f) = L(f)$.
9. $D^k\delta * f = D^k f, f \in \mathcal{L}'$, deoarece $L(D^k\,\delta * f) = L(D^k\,\delta)\cdot L(f) = z^k\,L(f) = L(D^k f)$.

10. $L\left(\int_0^t f(s)ds\right)(z) = L(f*1)(z) = L(f)(z)L(1)(z) = (Lf)(z)\cdot\frac{1}{z}$, deoarece $L(1) =$

$= L(1_+) = \frac{1}{z}$.

Vom încheia considerațiile relative la transformarea Laplace a distribuțiilor din $\mathcal{E}'$ prin lămurirea aspectelor legate de observația 11. Să presupunem f funcție-original continuă pe $\mathbb{R}_+$, avînd derivatele pînă la ordinul $m \geqslant 1$, de asemenea funcții original; s-a dedus egalitatea

$$L(\mathrm{D}^k f)(z) = z^k(Lf)(z) - z^{k-1}f(0+) - z^{k-2}f'(0+) - \ldots - \\ - zf^{(k-2)}(0+) - f^{(k-1)}(0+) \tag{18}$$

valabilă pentru $k = 0, 1, \ldots, m$, iar din teorema 7, dacă f este considerată distribuție regulată din $\mathcal{E}'$, se obține egalitatea

$$L(\mathrm{D}^k f)(z) = z^k L(f)(z), \; k = 0, 1, \ldots . \tag{18'}$$

Diferența dintre formulele (18) și (18') este explicabilă deoarece distribuțiile nu sînt definite în puncte ale lui $\mathbb{R}$ ci pe vecinități ale acestor puncte, de aceea, în general nu putem vorbi de valoarea distribuției f în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$. Lucrurile se schimbă însă dacă luăm în discuție distribuții regulate; astfel, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție care admite în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ un salt, dar este de clasă C^m pentru $x > x_0$ și pentru $x < x_0$, derivatele lui f existînd și avînd de asemenea discontinuități de tip salt în punctul x_0, rezultă integrînd prin părți

$$(\mathrm{D}^k f)(x) = f^{(k)}(x) + [f^{(k-1)}(x_0+) - f^{(k-1)}(x_0-)]\delta(x - x_0) + \\ + [f^{(k-2)}(x_0+) - f^{(k-2)}(x_0-)]\,\mathrm{D}\delta(x - x_0) + \ldots + \tag{27}$$

$$+ [f'(x_0+) - f'(x_0-)]\mathrm{D}^{k-2}\delta(x - x_0) + [f(x_0+) - f(x_0-)]\mathrm{D}^{k-1}\delta(x - x_0)$$

unde $f^{(k)}$ este distribuția regulată corespunzînd funcției $(\mathrm{D}^k f)(x)$ pentru $x \neq x_0$.

Dacă f este o funcție original continuă și cu derivate continue pentru $x > 0$, avem $x_0 = 0$ și $f^{(j)}(0-) = 0$, deci (27) se transcrie

$$\mathrm{D}^k f = f^{(k)} + f^{(k-1)}(0+)\delta + f^{(k-2)}(0+)\,\mathrm{D}\delta + \ldots + \tag{27'}$$

$$+ f'(0+)\mathrm{D}^{k-2}\delta + f(0+)\mathrm{D}^{k-1}\delta\,;$$

Calculînd transformarea Laplace în ambii membrii ai egalității (27') rezultă (18).

v. *Transformarea Laplace și ecuațiile diferențiale.* Fie ecuația diferențială de ordinul n cu coeficienți constanți

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f, \; a_j \in \mathbb{C}, \; a_0 \neq 0, \\ f \in \mathcal{C}^\circ \tag{28}$$

scrisă sub forma

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}\,\mathrm{D}^j y = f, \tag{28'}$$

și fie $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcția polinomială definită prin

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} z^j \qquad (29)$$

numită *polinomul caracteristic* atașat ecuației diferențiale (28). Înlocuind z prin D se obține operatorul diferențial

$$p(\mathrm{D}) = a_0 \mathrm{D}^n + a_1 \mathrm{D}^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \mathrm{D} + a_n \mathrm{D}^0 = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \mathrm{D}^j \qquad (29')$$

care permite transcrierea ecuației diferențiale (28′) sub forma

$$p(\mathrm{D})y = f. \qquad (28'')$$

Dacă $y \in C^n$, și avem verificată ecuația (28″) într-un interval $I \subset \mathbb{R}$ y se va numi *soluție clasică* a acestei ecuații; dar aceeași ecuație poate fi interpretată ca o ecuație în distribuții, cînd y și f sînt elemente ale unui spațiu dat de distribuții.

Teorema 9. *Dacă p este o funcție polinomială de grad $n \geqslant 1$, pentru orice distribuție $f \in \mathcal{E}'$ există o singură distribuție y din $\mathcal{E}'$ astfel încît să avem $p(\mathrm{D})y = f$.*

Aplicînd transformarea Laplace ambilor membri ai ecuației date (dacă $y \in \mathcal{E}'$, avem $p(\mathrm{D})y \in \mathcal{E}'$) și cum pentru orice element din $\mathcal{E}'$ transformarea sa Laplace este unic determinată, se deduce egalitatea

$$p(z)(Ly)(z) = (Lf)(z), \qquad (30)$$

deoarece $L(a_j \mathrm{D}^j y)(z) = a_j L(\mathrm{D}^j)y(z) = a_j z^j (Ly)(z)$. Fie $a > 0$ suficient de mare pentru a avea $p(z) \neq 0$ cînd $\operatorname{Re} z > a$ și în plus $(Lf)(z)$ să fie o funcție olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} z > a$; din (30) rezultă

$$(Ly)(z) = \frac{(Lf)(z)}{p(z)}, \quad \operatorname{Re} z > a$$

și deoarece $|(Lf)(z)| \leqslant K(1 + |z|)^k \, \mathrm{e}^{-M \operatorname{Re} z}$, $\operatorname{Re} z > a$ (vezi teorema 8), iar

$$|p(z)| \geqslant \frac{1}{2} |a_0| (1 + |z|)^n \left(\text{cum } \lim_{|z| \to \infty} \frac{|p(z)|}{(1 + |z|)^n} = |a_0|, \text{ se deduce } \left| \frac{|p(z)|}{|(1 + |z|)^n} - a_0 \right| < \varepsilon \right.$$

dacă $|z| \geqslant M_1(\varepsilon) > 0$ și pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} |a_0| > 0$ rezultă

$$\left. \frac{|p(z)|}{(1 + |z|)^n} > \frac{1}{2} |a_0|, \text{ dacă } |z| > M_1 \right) \text{ avem în definitiv}$$

$$|(Ly)(z)| \leqslant K'(1 + |z|)^{k'} \, \mathrm{e}^{-M \operatorname{Re} z}, \; K' = \frac{2K}{a_0}, \; k' = k - n,$$

$\operatorname{Re} z > a'$, unde $a' = \max(a, M_1)$.

În baza teoremei 8, va exista un singur element $y \in \mathcal{E}'$ astfel încît $(Ly)(z) = \dfrac{(Lf)(z)}{p(z)}$.

Dacă se ține seama de egalitatea (24) și se presupune $G \in \mathcal{L}'$ astfel încît $(LG)(z) = \dfrac{1}{p(z)}$, rezultă $(Ly)(z) = (Lf)(z) \cdot (LG)(z)$ sau

$$y = G * f. \tag{31}$$

Definiția 7. *Distribuția $G \in \mathcal{L}'$ definită prin egalitatea*

$$(LG)(z) = \frac{1}{p(z)} \qquad \operatorname{Re} z > a'$$

unde p este polinomul caracteristic al ecuației diferențiale (28) se numește funcția Green a operatorului diferențial $p(\mathrm{D})$ definit prin (29').

Propoziția 3. *Funcția Green a operatorului diferențial $p(\mathrm{D})$ avînd ordinul $n \geqslant 2$ este o distribuție regulată din $\mathcal{L}'$ avînd următoarele proprietăți*

i. $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $G \in C^{n-2}(\mathbb{R})$

ii. $G(t) = 0$, pentru $t \leqslant 0$

iii. $p(\mathrm{D})G(t) = \delta(t)$

iv. $G^{(k)}(0+) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, $G^{(n-1)}(0+) = \dfrac{1}{a_0}$

Din demonstrația teoremei 9 se deduce

$$\frac{1}{|p(z)|} \leqslant \frac{2}{|a_0|(1 + |z|)^n} \tag{32}$$

și deci în baza teoremei 6 $\left(\text{cu } M = 0,\ K = \dfrac{2}{|a_0|}\right)$, G va fi o funcție continuă pe $\mathbb{R}$, obținută cu ajutorul formulei lui Mellin

$$G(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_b} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{p(z)}\, \mathrm{d}z,\ b > a',\ G^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_b} \frac{z^j\, \mathrm{e}^{zt}}{p(z)} \cdot \mathrm{d}z. \tag{33}$$

În baza inegalității (32), integrala din (33) rămîne uniform convergentă după $n-2$ derivări sub semnul integral, adică $G \in C^{n-2}(\mathbb{R})$; faptul că $G^{(j)}(t) = 0$ pentru $t \leqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$ rezultă din olomorfia integradului din (33) pentru $\operatorname{Re} z < b$ (integrala poate fi calculată cu ajutorul teoremei lui Cauchy înlocuind γ_b prin C_R, unde C_R este un contur simplu din $\mathbb{C}$ format din segmentul cu extremitățile în $b - \mathrm{i}R$ și $b + \mathrm{i}R$ și semicercul $|z - b| = R$, $\operatorname{Re} z \geqslant b$ și făcînd apoi $R \to \infty$; dacă $t \leqslant 0$ integrala pe semicerc va tinde la zero cînd $R \to \infty$). În acest mod i și ii sînt justificate. Apoi, deoarece $p(\mathrm{D})G = a_0 \mathrm{D}^n G + a_1 \cdot \mathrm{D}^{n-1} G + \ldots + a_{n-1} \mathrm{D}G + a_n G$, prin aplicarea transformării Laplace, în baza relației $L(\mathrm{D}^j G) = z^j LG$ se deduce $L[p(\mathrm{D})G](z) = p(z)L(G)(z) =$

$= 1 = L(\delta)(z)$, adică $p(D)G = \delta$ și iii este justificat. Pentru iv se poate utiliza din nou formula lui Mellin, obținîndu-se

$$D^k G(0+) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_b} \frac{z}{p(z)}\,dz,\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

iar deoarece $\int_{\gamma_b} \frac{z^k}{p(z)}\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^k}{p(z)}\,dz = 0$ (diferența gradelor celor două polinoame este minim egală cu doi și deci pe semicercul $|z-b| = R$ integrala va tinde uniform la zero cînd $R \to \infty$ și $k \leqslant n-2$). În cazul $k = n-1$, avem

$$D^{n-1}G(0+) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_b} \frac{z^{n-1}}{p(z)}\,dz = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_R} \frac{z^{n-1}}{p(z)}\,dz,$$

unde C'_R este dreptunghiul avînd vîrfurile în punctele $b \pm iR$, $(b-\sqrt{R}) \pm iR$ (se verifică prin calcul că integralele pe laturile neaflate pe γ_b tind la zero cînd $R \to \infty$), iar conform teoremei lui Cauchy avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_R} \frac{z^{n-1}}{p(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{z^{n-1}}{p(z)}\,dz,$$

integrandul fiind funcție olomorfă între cele două drumuri de integrare; scriind $z = R\cdot e^{it}$, $dz = iRe^{it}\,dt$, $0 \leqslant t < 2$, se deduce

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{z^{n-1}}{p(z)}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^n\,dt}{|p(Re^{it})|} \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a_0} = \frac{1}{a_0}$$

avînd în vedere că $p(Re^{it})$ este o funcție polinom de gradul n în R. Așadar $D^{n+1}G(0+) = \frac{1}{a_0}$.

Exemple 11. Dacă $p(D) = D^2 + a^2$, $a > 0$ (adică în cazul ecuației diferențiale $y'' + a^2y = f$) funcția Green va fi $G(t) = \frac{1}{a}\sin(at)$, $t \geqslant 0$, $G(t) = 0$, $t < 0$, deoarece

$$(LG)(z) = \frac{1}{z^2 + a^2},$$

aplicînd formula (15) se deduce

$$G(t) = \frac{e^{iat}}{2ia} - \frac{e^{-iat}}{2ia} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} = \frac{1}{a}\sin(at)$$

deoarece zerourile numitorului sînt $\pm ia$.

12. Dacă $p(D) = D^2 - a^2$, deoarece $(LG)(z) = \dfrac{1}{z^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a(z - a)} - \dfrac{1}{2a(z + a)}$ se deduce

$$G(t) = \frac{1}{a} \operatorname{sh}(at),\ t \geqslant 0,\ G(t) = 0,\ t < 0.$$

13. Dacă $p(D) = D^2$, rezultă $G(t) = t$ pentru $t \geqslant 0$, $G(t) = 0$, $t < 0$.

8. Funcția caracteristică a VA

Fie X o VA (se poate presupune X și vector aleator dar nu vom lua în discuție decît cazul VA).

Definiția 5. *Prin funcția caracteristică a VA X, notată c_X se înțelege transformarea Fourier a densității de probabilitate f_X a acestei VA.*

Din această definiție, rezultă că dacă f_X este o funcție (avînd proprietățile unei densități de probabilitate, adică $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_X(x) \geqslant 0$, $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$), vom avea

$$c_X(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixs} f_X(x)\,dx, \tag{34}$$

iar c_X va avea sens $\left(\text{deoarece } x, s \in \mathbb{R} \text{ și deci } |e^{ixs}| = 1 \text{ ceea ce antrenează } c_X(s) \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left| e^{ixs} f_X(x) \right| dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1\right)$ fiind o funcție reală cu valori complexe.

Tot din definiție rezultă posibilitatea extinderii teoriei probabilităților presupunînd densitatea de probabilitate a VA X o distribuție (cu proprietăți asemănătoare densității de probabilitate); dacă avem în vedere VA discrete studiul acestor VA se va face nu cu ajutorul densității de probabilitate f_X ci cu funcția caracteristică c_X care va fi o distribuție; teoria transformării Fourier arată că dacă c_X este cunoscut, atunci avem

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} c_X(s)\, e^{-isx}\,ds, \tag{34'}$$

deci densitatea de probabilitate a VA X este perfect determinată odată cu funcția ei caracteristică (evident dacă c_X este o distribuție, atunci se vor folosi relațiile de la teoria distribuțiilor).

Observația 7. Deoarece media VA $Y = g(X)$ este dată de

$$M[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X dx$$

prin comparație cu (34) se deduce că funcția caracteristică a VA X nu este altceva decît media VA $e^{isx} = \text{cis}\,(sx)$ care depinde de parametrul s.

Vom stabili acum cîteva proprietăți simple ale lui c_X :

Teorema 6. i. $c_X \in C(\mathbb{R})$, $|c_X(s)| \leqslant 1$, $c_X(0) = 1$, $\overline{c_X(s)} = c_X(-s)$

ii. c_X *este pozitiv definită, adică* $\sum_{j,k=1}^{N} c_x(s_j - s_k)\xi_j\overline{\xi}_k \geqslant 0$ *pentru orice* $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$ *și orice* $\xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{C}$

iii. *Dacă* VA $X_1, X_2, \ldots X_n$ *sînt independente atunci, cu* $s = (s_1, \ldots, s_n)$

$$c_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(s) = c_{X_1}(s_1)c_{X_2}(s_2)\ldots c_{X_n}(s_n),\ s \in \mathbb{R} \tag{35}$$

și reciproc, dacă are loc ultima egalitate, atunci VA $X_1, X_2, \ldots X_n$ *sînt independente.*

i. rezultă direct din definiție.

ii. Calculînd suma $\sum_{j,k=1}^{N} c_X(s_j - s_k)\,\xi_j\overline{\xi}_k$ găsim :

$$\sum_{j,k=1}^{N} c_X(s_j - s_k)\,\xi_j\overline{\xi}_k = \sum_{j,k=1}^{N}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{i(s_j-s_k)x} f_X(x)\,dx\right]\xi_j\overline{\xi}_k =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_X(s)\left[\sum_{j,k=1}^{N}(e^{is_jx}\xi_j)\,\overline{(e^{is_kx}\xi_k)}\right]dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(s)\left|\sum_{j=1}^{N} e^{is_jx}\xi_j\right|^2 dx \geqslant 0$$

iii. Avem, cu $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$c_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x_1s_1+x_2s_2+\ldots+x_ns_n)} f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx \text{ și deoarece} \tag{36}$$

VA $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sînt independente, rezultă

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\ldots f_{X_n}(x_n)$$

ceea ce justifică (35), dacă se folosește (36). Reciproc, avem

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} c_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n)}\, \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\int_{\mathbb{R}} c_{X_1}(s_1)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1 s_1}\, \mathrm{d}s_1 \right) \ldots \left(\int_{\mathbb{R}} c_{X_n}(s_n)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_n s_n} \mathrm{d}s_n \right) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

Exemple 9. Dacă VA X este discretă, adică

$$f_{\boldsymbol{X}}(x) = \sum_j p_j \delta(x - x_j) \qquad p_j > 0,\ \sum_j p_j = 1$$

se deduce

$$c_{\boldsymbol{X}}(s) = \sum_j p_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s x_j} \tag{37}$$

deoarece transformarea Fourier a distribuției $\delta(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$ este $\mathrm{e}^{\mathrm{i}sa}$.

10. Funcția caracteristică a distribuției binomiale X este $c_{\boldsymbol{X}}(s) = (p\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} + q)^n$, $q = 1 - p$, deoarece utilizînd (37), avem cu $p_j = P(X = j) = C_n^j\, p^j q^{n-j}$,

$$c_{\boldsymbol{X}}(s) = \sum_{j=1}^{n} C_n^j p^j\, q^{n-j}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}sj} = (p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s} + q)^n.$$

11. Funcția caracteristică a distribuției lui Poisson X este $c_{\boldsymbol{X}}(s) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} - 1)}$, deoarece aici $p_j = \frac{\lambda^j}{j!}\, \mathrm{e}^{-\lambda}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, iar (37) conduce la rezultatul indicat.

12. În cazul unei VA X uniform distribuite în intervalul $[a, b]$ deci dacă $f_{\boldsymbol{X}}(x) = \dfrac{1}{b - a}$, pentru $x \in [a, b]$ și $f_{\boldsymbol{X}} = 0$ pentru $x \notin [a, b]$, se deduce $c_{\boldsymbol{X}}(s) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_{\boldsymbol{X}}(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}}{b - a}\, \mathrm{d}x =$

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}sb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}sa}}{\mathrm{i}s(b - a)}.$$

13. Dacă se ține seama de transformarea Fourier a exponențialei e^{-ax^2} funcția caracteristică a unei VA normal distribuite avînd media m și dispersia σ^2 este egală cu $c_{\boldsymbol{X}^*}(s) =$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}sm - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}.$$

14. În cazul distribuției gamma, cînd $f_X(x) = \dfrac{k^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} x^{\mu} e^{-kx}$ pentru $x > 0$ și $f_X(x) = 0$, pentru $x \leqslant 0$, $k > 0$, funcția caracteristică este egală cu $c_X(s) = k^{\mu+1}(k - is)^{-\mu-1}$. Într-adevăr avem :

$$c_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, e^{isx}\, dx = \frac{k^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} x^{\mu} e^{-x(k-is)}\, dx =$$

$$= \frac{k^{\mu+1}}{(k-is)^{\mu+1}\Gamma(\mu+1)} \int_0^{(k-is)\infty} t^{\mu} e^{-t}\, dt,$$

integrarea efectuîndu-se pe semidreapta din planul complex t cu extremitatea în origine și dirijată după vectorul $k - is$; în baza teoremei lui Cauchy, această integrală se poate înlocui cu integrala pe semiaxa reală pozitivă, deoarece între aceste semidrepte integrandul este fără singularități. Deci

$$\int_0^{(k-is)\infty} t^{\mu} e^{-t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\mu} dt = \Gamma(\mu+1)$$

15. În cazul unei distribuții exponențiale, cînd $f_X(x) = k e^{-kx} H(x)$ (deci $\mu = 0$ în exemplul 14), se deduce funcția caracteristică $c_X(s) = \dfrac{k}{k - is}$

16. În cazul distribuției hi doi avem $c_X(s) = (1 - 2is)^{-\frac{n}{2}}$. deoarece aici $f_X(x)$ se deduce din exemplul 14 pentru $\mu = \dfrac{n}{2} - 1$, $k = \dfrac{1}{2}$

Între funcția caracteristică a unei VA X și momentele de ordin $n = 0, 1, 2, \ldots$ ale acestei VA există o legătură strînsă, deoarece momentul inițial de ordin întreg se definește prin

$$\alpha_n[X] = \int_{\mathbb{R}} x^n(x)\, f_X(x)\, dx;$$

scriind dezvoltarea în serie a funcției exponențiale, deducem

$$c_X(s) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, e^{isx}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(isx)^n}{n!} \right] dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n s^n}{n!} \alpha_n [X]$$

rezultînd

Teorema 2. *Momentul inițial de ordin n al* VA X *se poate deduce din funcția caracteristică* c_X *cu ajutorul relației* :

$$\alpha_n[X] = \mathrm{i}^{-n} c_X^{(n)}(0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{38}$$

Observînd că funcția $\mathrm{e}^{\mathrm{i}sm_X} c_X(s)$ este funcția caracteristică a VA centrate $\mathring{X} = X - m_X$, rezultă din (38) expresiile momentelor centrate de ordin $n = 0, 1, 2, \ldots$ ale VA X :

$$\mu_n[X] = \mathrm{i}^{-n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sm_X} c_X(s)] \Big|_{s=0} . \tag{38'}$$

Relațiile (38) și (38') se pot extinde și la vectori aleatori X; astfel ($X = (X_1, \ldots, X_k)$, $n = n_1 + \ldots + n_k$)

$$\alpha_{n_1, \ldots, n_k}[X] = \mathrm{i}^{-n} \left[\frac{\partial^n c_X}{\partial s_1^{n_1} \ldots \partial s_k^{n_k}} (s) \right]_{s=0}$$

$$\mu_{n_1, \ldots, n_k}[X] = \mathrm{i}^{-n} \left\{ \frac{\partial^n [c_X(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sm_X}]}{\partial s_1^{n_1} \ldots \partial s_k^{n_k}} \right\}_{s=0}$$

Exemplul 15. Pentru o VA X normal distribuită cu $m=0$, în baza exemplului 13, rezultă imediat

$$\mu_{2n-1}[X] = 0, \quad \mu_{2n}[X] = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sigma^{2n}.$$

ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Ecuații diferențiale liniare

Fie $a_0, a_1, \ldots, a_n, f : I \to \mathbb{R}$ funcții continue și $\varphi : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^n.

Definiția 1. *Dacă*

$$a_0(x)\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\,\varphi(x) = f(x)$$

pentru orice $x \in I$, vom spune că φ este o soluție pe I a ecuației diferențiale (pe scurt ED) *liniare*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f \tag{1}$$

sau că funcția φ verifică pe intervalul I ED (1).

Funcțiile $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se numesc coeficienții ED (1) *iar f este termenul liber sau factorul perturbator al aceleiași ecuații; dacă a_0 nu este nul,* ED (1) *va fi o* ED *de ordinul n iar dacă $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt numere reale* ED (1) *va fi* ED *cu coeficienți constanți.*

Dacă $f(x) = 0$, $x \in I$, ED (1) *se va numi* ED *liniară și omogenă, iar dacă f nu este nulă pe I, ecuația în cauză se va numi neomogenă.*

Dacă $a_0 \in C^0(I)$ și $a_0(x_j) = 0$, $x_j \in I$, $j = 1, 2, \ldots$ atunci x_j se numește punct singular al ED (1) (ceilalți coeficienți ai ED (1) se presupun continui pe I).

ED (1) *cu a_0 nenul, împreună cu datele (condițiile) inițiale*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{2}$$

cu $x_0 \in I$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ definesc o problemă Cauchy (sau o problemă cu condiții inițiale).

Definiția 2. *Aplicația $L : C^n(I) \to C^0(I)$ definită prin membrul stîng al* ED (1), *adică*

$$Ly = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} \tag{3}$$

se va numi operator diferențial liniar (ordinar), de ordinul n dacă a_0 nu este nul.

Cu ajutorul lui (3) ED (1) se scrie simbolic

$$Ly = f \tag{1'}$$

ceea ce permite scrierea soluției y a acestei ED sub forma

$$y = L^{-1}f. \tag{4}$$

Problema de bază în teoria ecuațiilor diferențiale se referă la determinarea lui L^{-1} dacă L este dat.

Observația 1. *Dacă* $c \in \mathbb{R}$, *deoarece* $(cy)^{(n-k)} = cy^{(n-k)}$, *din* (3), *se deduce*

$$L(cy) = cLy \tag{5}$$

iar dacă $y, z \in C^n(I)$, *cum* $(y + z)^{(n-k)} = y^{(n-k)} + z^{(n-k)}$, *rezultă*

$$L(y + z) = Ly + Lz. \tag{5'}$$

Egalitățile (5) și (5') justifică denumirea de operator liniar dată aplicației L definită mai sus, iar pentru orice număr finit $c_1, c_2, \ldots, c_r$ de numere reale și orice funcții $y_1, y_2, \ldots, y_r$ de clasă $C^n(I)$, se deduce egalitatea

$$L\left(\sum_{j=1}^{r} c_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{r} c_j L y_j. \tag{6}$$

Observația 2. *Din* (6) *rezultă că orice combinație liniară de soluții ale* ED (1) *omogenă este iarăși o soluție a aceleiași* ED $\left(Ly_j = 0 \text{ implică } L\left(\sum_{j=1}^{r} c_j y_j\right) = 0\right)$; dacă y_j verifică ED (1), din (6) rezultă

$$L\left(\sum_{j=1}^{r} c_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{r} c_j f, \text{ dacă } Ly_j = f, j = 1, 2, \ldots, r$$

și deci o combinație liniară de soluții ale ED (1) neomogenă va fi o soluție a acestei ecuații dacă și numai dacă $\sum_{j=1}^{r} c_j = 1$ (astfel de combinații liniare se numesc *convexe*).

Observația 3. *Dacă notăm prin* y_h *o soluție oarecare a* ED *omogenă* $Ly = 0$, *iar* y *și* z *sînt soluții ale* ED (1), *atunci* $y = z + y_h$ deoarece $L(y - z) = Ly - Lz = f - f = 0$, deci $y - z = y_h$) *și orice soluție a* ED (1) *se scrie sub forma* $y = y_h + y_p$ *unde* $Ly_h = 0$, *iar* $Ly_p = f$ (avem $L(y - y_p) = 0$, deci $y - y_p = y_h$).

În observația 3 este important faptul că este suficient să determinăm o singură soluție particulară y_p a ED (1) pentru a putea scrie

$$y = y_h + y_p \tag{7}$$

Observația 4. În AM (teorema 9, cap. II, punctul 2) s-a demonstrat o teoremă de existență și unicitate pentru problema Cauchy atașată ED de primul ordin $y' = f(x, y)$; în cazul ED liniare avem $f(x, y) = a(x)y + g(x)$ și condițiile teoremei se verifică dacă a și g sînt funcții continue. Aceeași teoremă se poate extinde și la problema Cauchy (2) pentru ED (1) și vom considera demonstrat următorul rezultat:

Teorema 1. *Dacă în* ED (1) *coeficienții* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *și termenul liber* f *sînt funcții continue în intervalul* $I \subset \mathbb{R}$, *atunci pentru orice* n *numere reale* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ *va exista o singură soluție* $\varphi : I_1 \to \mathbb{R}$ *a* ED (1) *care verifică datele Cauchy* (2), *cu* $x_0 \in I_1 \subset I$ *dacă* $a_0(x_0) \neq 0$; *intervalul* I_1 *poate fi extins astfel încît* ∂I_1 *să fie două puncte singulare consecutive ale* ED (1). *In particular, dacă* $f = 0$, *iar* $y_0 = y_1 = \ldots = y_{n-1} = 0$, *singura soluție a* ED (1) *va fi soluția banală,* $y = 0$ *în* I.

Observația 5. Considerînd ED a polinoamelor Jacobi (cap. IV, punctul 4)

$$(1-x^2)y'' + [q-p-(p+q+2)x]y' + n(p+q+n+1)y = 0 \quad (8)$$

se constată că punctele singulare ale acestei ecuații sînt $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$; în baza teoremei 1, dacă $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, ecuația (8) va admite o soluție φ care verifică $\varphi(x) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, iar $\varphi \in C^2(V_{x_0})$ unde V_{x_0} este o vecinătate a punctului x_0 care se poate extinde pînă la punctele -1 sau 1; dar ED (8) admite soluții polinomiale care vor fi indefinit derivabile pe $\mathbb{R}$, deci pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$, această ecuație va admite soluții valabile și în punctele singulare ale ecuației.

Cu alte cuvinte, este posibil ca unele ED să admită soluții definite și în punctele singulare ale ecuației în cauză.

Observația 6. *Dacă* $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $f \in C^1(I_1)$, $I_1 \subset I$, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$ *atunci orice soluție a* ED (1) *va fi de clasă* $C^{n+1}(I_1)$; într-adevăr, scriind ED (1) sub forma

$$y^{(n)} = \frac{1}{a_0}[f - a_1 y^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1}y' - a_n y]$$

se deduce $\frac{1}{a_0}[f - a_1 y^{(n-1)} - \ldots - a_n y] \in C^1(I_1)$, deci $y^{(n)} \in C^1(I_1)$, adică $y \in C^{n+1}(I_1)$.

Iterînd rezultatul din observația 6, se deduce $y \in C^{n+k}(I_1)$, dacă $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $f \in C^k(I_1)$, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I_1$, $k = 1, 2, \ldots$; în particular, pentru $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $f \in C^\infty(I_1)$, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I_1$, orice soluție a ED (1) va fi de asemenea indefinit derivabilă pe I_1.

Din observația 2 rezultă că *mulțimea soluțiilor ecuațiilor liniare și omogene* $Ly = 0$ *formează un spațiu vectorial real*; acest spațiu vectorial va fi deci nucleul operatorului L notat Ker L.

Teorema 2. *Dacă L este un operator diferențial liniar de forma* (3) *iar* $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$, *atunci dacă* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C^0(I)$ *avem*:

i. Ker $L \subset C^n(I)$.

ii. dim Ker $L = n$, *unde* dim V *este dimensiunea spațiului* V.

i. Rezultă direct din teorema 1.

ii. Fie $A = [a_{jk}]$ o matrice pătrată de ordinul n nesingulară și $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluțiile ED $Ly = 0$ care verifică datele Cauchy $\varphi_j(x_0) = a_{1j}$, $\varphi_j'(x_0) = a_{2j}, \ldots, \varphi_j^{(n-1)}(x_0) = a_{nj}, j = 1, 2, \ldots, n$. Aceste soluții sînt funcții de clasă C^n în I și sînt liniar independente; într-adevăr dacă am avea $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) = 0$, $x \in I$ cu $|c_1| + \ldots + |c_n| > 0$ am avea și $c_1\varphi_1^{(j)}(x) + \ldots + c_n\varphi_n^{(j)}(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $x \in I$, iar în punctul x_0 s-ar deduce $AC = 0$ cu $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, adică $C = 0$ (det $A \neq 0$) și deci $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$, contrar ipotezei. Mai rămîne de arătat că orice soluție în I a ED $Ly = 0$ este o combinație liniară a funcțiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$; notînd cu φ această soluție, avem $\varphi \in C^n(I)$ și $\varphi(x_0) = \alpha_0$, $\varphi'(x_0) = \alpha_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$ cu $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ numere reale. Cu aceste numere se poate rezolva sistemul liniar $AC = B$, $B = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$ rezultînd $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (componentele lui C) unic determinate. Scriind $y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n$ rezultă $y = \varphi$, deoarece avem $Ly = 0$ (din observația 2) $y(x_0) = c_1\varphi_1(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n(x_0) = \alpha_0 = \varphi(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n\varphi_n^{n-1}(x_0) = \alpha_{n-1} = \varphi^{(n-1)}(x_0)$ (în baza sistemului algebric $AC = B$), iar teorema 1 conduce la concluzia $y = \varphi$.

Analizînd demonstrația anterioară, rezultă că rolul esențial l-a jucat matricea nesingulară A; ținînd cont de modul de determinare a soluțiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ cu ajutorul elementelor acestei matrice, ajungem la matricea

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \tag{9}$$

Definiția 3. *Dacă* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *sînt soluții ale* ED $Ly = 0$ *atunci determinantul matricii* (9) *se numește wronskianul (sau determinantul lui Wronski) soluțiilor* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *și se notează* $W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n](x)$.

Din această definiție, rezultă că wronskianul soluțiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, definite pe intervalul I, ale ecuației $Ly = 0$ va fi o funcție de clasă $C^1(I)$, iar din demonstrația teoremei 2 se deduce că dacă $W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](x_0) \neq 0$, $x_0 \in I$, soluțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sînt liniar independente și formează o bază în spațiul vectorial Ker L.

Teorema 3. *Dacă* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *sînt soluții pe intervalul* I *ale* ED $Ly = 0$, *unde* $Ly = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$, *atunci are loc formula Abel-Liouville*

$$(10) \quad W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n](x) = W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n](x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\, dt}, \quad x \in I$$

Cum $S(x) = W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](x) \in C^1(I)$, se poate calcula W'; deoarece derivata unui determinant de ordinul n este o sumă de determinanți de același ordin, fiecare determinant din W' obținîndu-se prin derivarea unei linii din determinantul W, se deduce

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & \ldots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \ldots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Înlocuind derivatele din ultima linie prin $-\frac{a_1}{a_0}\varphi_j^{(n-1)} - \frac{a_2}{a_0}\varphi_j^{(n-2)} - \ldots - \frac{a_n}{a_0}\varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, rezultă egalitatea (după descompunerea determinantului într-o sumă de n determinanți)

$$W'(x) = -\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(x)\, W(x)$$

care coincide cu (10).

Așadar, teorema 3 afirmă că wronskianul a n soluții particulare în I ale ED $Ly = 0$ este nenul în I dacă este nenul într-un punct din I și reciproc, este suficient ca acest wronskian să fie nul într-un punct din I, pentru a fi nul în orice alt punct din I.

Prin urmare, revenind la demonstrația lui ii din teorema 2, deși aparent ea este valabilă doar în vecinătatea lui $x_0 \in I$, rezultatul este adevărat în orice interval de continuitate al coeficienților ED $Ly = 0$ în care a_0 nu se anulează.

Se mai poate face observația că wronskianul $W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$, prin relația (10) pune din nou în evidență ipoteza $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$ (în caz contrar integrala din (10) este improprie); de asemenea, nu trebuie generalizate aceste rezultate la orice funcții de clasă C^n: există funcții de clasă $C^n(I)$, pentru care wronskianul lor este nul, dar ele sînt liniar independente: wronskianul funcțiilor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nenul, devine un criteriu de liniar independență pentru aceste funcții (de clasă cel puțin C^n) numai dacă ele verifică ED $Ly = 0$ (deoarece se utilizează și teorema de existență și unicitate a soluțiilor problemei Cauchy pentru aceste ecuații).

Observația 7. *Dacă* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in C^0(I)$ *o condiție necesară și suficientă de liniar independență a acestor funcții este dată de matricea Gram* $G = [g_{jk}]$, $g_{jk} = \int_I \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,dx$: *dacă* $\det G = 0$, *funcțiile* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *sînt liniar dependente, iar dacă* $\det G \neq 0$, *aceleași funcții vor defini un sistem liniar independent în* $C^0(I)$.

Justificarea acestui rezultat este simplă : scriind $c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n = 0$ după înmulțirea succesivă cu $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ și integrarea în I, se obține un sistem liniar și omogen în $c_1, c_2, \ldots, c_n$ avînd matricea G ; se aplică apoi teorema Kronecker-Capelli.

Comparînd cele două condiții privind liniar (in)-dependența elementelor din $C^n(I)$, se deduce că utilizarea wronskianului este proprie teoriei ecuațiilor diferențiale pe cînd utilizarea matricii Gram este o metodă generală utilizînd structura de spațiu prehilbertian a spațiilor $C^k(I)$, $k \geqslant 0$.

Un rezultat important din teoria ecuațiilor diferențiale se referă la posibilitatea integrării ED (1) $Ly = f$ dacă se cunoaște o bază în Ker L.

Teorema 4. (*metoda variației parametrilor sau metoda lui Lagrange*) *Dacă* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *este o bază în spațiul vectorial* Ker L, $Ly = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, y^{(n-j)}$, *atunci se pot determina funcțiile* $c_1, c_2, \ldots, c_n : I \to \mathbb{R}$, $c_j \in C^n(I)$ *astfel încît funcția* $y_p : I \to \mathbb{R}$, $y_p(x) = c_1(x)\,\varphi_1(x) + \ldots + c_n(x)\varphi_n(x)$ *să verifice* ED $Ly = f$, *pentru orice* $f \in C^0(I)$, $a_0(x) \neq 0$ $x \in I$.

Dacă $y_p = c_1\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n$, în ipotezele teoremei rezultă $y_p \in C^n(I)$, iar $y_p' = (c_1\varphi_1' + \ldots + c_n\varphi_n') + (c_1'\varphi_1 + \ldots + c_n'\varphi_n) = c_1\varphi_1' + \ldots + c_n\varphi_n' + b_1$, $b_1 = c_1'\varphi_1 + \ldots + c_n'\varphi_n$, $b_1 \in C^{n-1}(I)$, apoi $y_p'' = (c_1\varphi_1'' + \ldots + c_n\varphi_n'') + (c_1'\varphi_1' + \ldots + c_n\varphi_n' + b_1') = c_1\varphi_1'' + \ldots + c_n\varphi_n'' + b_2$, $b_2 = c_1'\varphi_1' + \ldots + c_n\varphi_n' + b_1'$ cu $b_2 \in C^{n-2}(I)$. Continuînd acest procedeu, se deduce

$$y_p^{(k)} = c_1\varphi_1^{(k)} + \ldots + c_n\varphi_n^{(k)} + b_k,$$

$$b_k = c_1'\varphi_1^{(k-1)} + \ldots + c_n'\varphi_n^{(k-1)} + b_{k-1}' \in C^{(n-k)}(I)$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ($b_0 = 0$) ; prin urmare, derivînd $y^{(n-1)}$ rezultă

$$y_p^{(n)} = (c_1\varphi_1^{(n)} + \ldots + c_n\varphi_n^{(n)}) + (c_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'\varphi_n^{(n-1)} + b_{n-1}').$$

Înlocuind în ED $Ly_p = f$, se deduce avînd în vedere că $L\varphi_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$

$$a_0\,[c_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'\varphi_n^{(n-1)} + b_{n-1}'] + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 = f,$$

iar derivatele funcțiilor $c_1, \ldots, c_n$ se vor determina din sistemul

$$\begin{cases} c_1'\varphi_1 + \ldots + c_n'\varphi_n = b_1 \\ c_1'\varphi_1' + \ldots + c_n'\varphi_n' = b_2 - b_1' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'\varphi_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'\varphi_n^{(n-2)} = b_n - b_{n-1}' \\ c_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'\varphi_n^{(n-1)} = \dfrac{f}{a_0} - \dfrac{a_1}{a_0} b_{n-1} - \ldots - \dfrac{a_{n-1}}{a_0} b_1 \end{cases}$$

care admite o singură soluție (dacă $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sînt definiți), deoarece determinantul sistemului este chiar wronskianul soluțiilor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ale ED omogene $Ly=0$ (care este nenul $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fiind o bază în Ker L).

Observația 8. De regulă, în demonstrația teoremei 4 se pot presupune funcțiile $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ arbitrare, de clasă convenabilă; de aceea se poate presupune $b_1 = 0, b_2 = 0, \ldots, b_{n-1} = 0$ ceea ce face ca sistemul din care se determină derivatele funcțiilor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ să aibă forma mai simplă

$$\begin{cases} c_1'\varphi_1 + \ldots + c_n'\varphi_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'\varphi_1^{(n-2)} + \ldots + c_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'\varphi_n^{(n-1)} = \dfrac{f}{a_0} \end{cases} \qquad (11)$$

care de obicei se întîlnește în calcule.

Rezumînd, se deduce că *orice* ED *liniară* $Ly = f$ *se poate considera integrată dacă se cunoaște o bază în* Ker L; în teoria ecuațiilor diferențiale o bază în Ker L se numește *sistem fundamental de soluții pentru* ED (1).

Determinarea efectivă cu ajutorul funcțiilor elementare a unui sistem fundamental de soluții pentru ED liniare nu se poate realiza decît într-un număr restrîns de cazuri; practic este vorba de ED cu coeficienți constanți sau de ED care prin transformări convenabile (asupra lui x și y) se pot reduce la ED cu coeficienți constanți. Cazul ED cu coeficienți constanți va fi tratat la punctul următor.

Definiția 4. *Se numește operator diferențial ordinar formal adjunct atașat operatorului diferențial*

$$Ly = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y,$$

în care $a_0 \in C^n(I)$, $a_1 \in C^{n-1}(I)$, $\ldots$, $a_{n-1} \in C^1(I)$, $a_n \in C^0(I)$, *aplicația* $L^+ : C^n(I) \to C^0(I)$ *definită prin*

$$L^+z = (-1)^n(a_0z)^{(n)} + (-1)^{n-1}(a_1z)^{(n-1)} + \ldots - (a_{n-1}z)' + a_nz = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}(a_jz)^{(n-j)}. \tag{12}$$

Importanța noțiunii de operator diferențial formal adjunct rezultă din rezultatul următor, util în studiul problemelor la limită din teoria ED.

Teorema 5. *Dacă pentru operatorul diferențial* L *există operatorul diferențial formal adjunct* L^+ *atunci are loc identitatea lui Lagrange*

$$zLy - yL^+z = F'[y, z] \tag{13}$$

unde $F[u, v]$ *este forma liniară în* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *și* $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ *definită prin*

$$F[u, v] = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{j+k=m-1 \\ j\geqslant 0,\ k\geqslant 0}} (-1)^j y^{(k)}(a_{n-m}z)^{(j)}. \tag{14}$$

In plus, pentru orice $x_1, x_2 \in I$ *are loc formula lui Green*

$$\int_{x_1}^{x_2} (zLy - yL^+z)\,dx = F[y, z](x_2) - F[y, z](x_1). \tag{15}$$

În baza formulei de derivare a unui produs, se poate scrie

$$zy^m = (-1)^m z^{(m)}y + [y^{(m-1)}z - y^{(m-2)}z' + \ldots + (-1)^{m-1}yz^{(m-1)}]$$

pentru $m = 0, 1, \ldots, n$ și deci

$$zLy = z\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}y^{(m)} + za_ny = \sum_{m=1}^{n} (a_{n-m}z)\,y^{(m)} + za_ny =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} (-1)^m (a_{n-m}z)^{(m)}y + za_ny + \left[\sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{j+k=m-1 \\ j\geqslant 0,\ k\geqslant 0}} (-1)^j y^{(k)}(a_{n-m}z)^{(j)}\right]$$

ceea ce coincide cu (13) în baza lui (14).

Formula (15) se deduce din (13) prin integrare.

Consecința 1. *Dacă* $z_0 \in C^n(I)$ *verifică* ED $L^+z = 0$, *atunci integrarea* ED $Ly = 0$ *revine la integrarea unei* ED *de ordin* $n - 1$

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{j+k=m-1 \\ j\geqslant 0,\ k\geqslant 0}} (-1)^j y^{(k)}(a_{n-m}z_0)^{(j)} = c \tag{16}$$

unde $c \in \mathbb{R}$ *este o constantă oarecare.*

Într-adevăr, înlocuind în identitatea lui Lagrange (13) z prin z_0 se deduce $F'[y,z_0] = 0$, ceea ce coincide cu (16).

Exemplul 1. În cazul ED liniare de ordinul al doilea avem

$$Ly = a_0y'' + a_1y' + a_2y = f$$

rezultînd operatorul diferențial formal adjunct (dacă $a_0 \in C^2(I)$, $a_1 \in C^1(I)$, $a_2 \in C^0(I)$),

$$L^+z = (a_0z)'' - (a_1z)' + a_2z = a_0z'' + (2a_0' - a_1)z' + (a_0'' - a_1' + a_2)z.$$

Definiția 5. *Dacă $Ly = L^+y$ pentru orice $y \in C^n(I)$, operatorul L se va numi formal autoadjunct.*

Exemplul 2. Dacă $Ly = a_0y'' + a_1y' + a_2y$, cu ajutorul exemplului 1 se deduce că L va fi formal autoadjunct dacă $a_0 = a_1$.

Scriind însă ED, $Ly = f$ prin înmulțire cu funcția

$$\frac{1}{a_0(x)}\, e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\,dt}$$

cu $x_0, x_1 \in I$, $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$ se deduce ED

$$e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\,dt} y'' + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)(x)\, e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\,dt} y' +$$

$$+ \left(\frac{a_2}{a_0}\right)(x)\, e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\,dt} y = f(x)\, e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\,dt}$$

care se scrie sub forma

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f_1, \tag{17}$$

unde

$$p(x) = e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\,dt}, \quad q(x) = \left(\frac{a_2}{a_0}\right)(x)\, e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\,dt}, \tag{18}$$

$$f_1(x) = f(x)\, e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t)\,dt}.$$

Forma (17) se numește forma autoadjunctă a ED liniare de ordinul al doilea deoarece pentru ED (17) avem $a_0 = p$, $a_1 = p'$ și deci $a_0' = a_1$; așadar, fără a se pierde din generalitate, se deduce că pentru ED de ordinul al doilea se poate utiliza direct forma autoadjunctă

(17). Pentru identitatea lui Lagrange se obține, cu $Ly = (py')' + qy$, $L^+z = Lz$,

$$zLy - yLz = [p(yz' - yz')]'$$

adică $F[y, z] = p(zy' - yz')$, iar

$$\int_{x_1}^{x_2} (zLy - yLz)\,\mathrm{d}x = p(x)(zy' - yz')(x)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

Observația 9. *Din definițiile 4 și 5 se deduce că operatorul diferențial L va putea fi autoadjunct numai dacă ordinul său este par.*

Exemplul 3. ED a polinoamelor ortogonale (cap. IV, pct. 4), adică ED

$$\beta y'' + (\alpha + \beta')y' - n\,[(n+1)\beta_2 + \alpha_1]y = 0,$$

unde $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha}{\beta}$, ρ fiind ponderea polinoamelor în cauză, se poate scrie sub forma autoadjunctă

$$(\rho\beta y')' - n\,[(n+1)\beta_2 + \alpha_1]\rho y = 0$$

(aici $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, $\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, $|\alpha_1| + |\beta_2| > 0$). Se deduce $Ly = (\rho\beta y')' + \lambda_n \rho y$, $\lambda_n = -n\,[(n+1)\beta_2 + \alpha_1]$ și deci

$$zLy - yLz = [\rho\beta(zy' - yz')]'.$$

Dacă y și z sînt finite în $x = a$ și $x = b$, $]a, b[$ fiind intervalul de ortogonalitate, deoarece $\rho\beta = 0$ în a și b, rezultă $\int_a^b z\,Ly\,\mathrm{d}x = \int_a^b y\,Lz\,\mathrm{d}x$.

2. Sisteme diferențiale de ordinul întîi

2.1. Generalități

Fie $F_1, F_2, \ldots, F_n : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ și $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : J_1 \to \mathbb{R}$, $J_1 \subset J$ (J_1, J fiind intervale din $\mathbb{R}$) funcții de clasă $C^1(J_1)$ și să notăm $\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.

Definiția 1. *Dacă pentru orice $t \in J_1$ avem*

$$F_1[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \dot{\varphi}_1(t), \ldots, \dot{\varphi}_n(t)] = 0, \ldots,$$

$$\ldots F_n[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \dot{\varphi}_1(t), \ldots, \dot{\varphi}_n(t)] = 0$$

vom spune că sistemul de funcții ${}^t(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}$

este o soluție a sistemului diferențial (pe scurt SD) *de ordinul întîi*

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0 \\ F_2(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ F_n(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dacă în plus $\varphi_1(t_0) = \alpha_1$, $\varphi_2(t_0) = \alpha_2, \ldots,$ $\varphi_n(t_0) = \alpha_n$, $\alpha = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in J_1$, *soluția în cauză va verifica datele inițiale* α; *condițiile inițiale* $\alpha = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *împreună cu* SD (1) *vor defini o problemă Cauchy pentru acest sistem.*

Vom presupune că SD (1) se poate scrie sub forma normală

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{2}$$

unde $f_1, f_2, \ldots, f_n : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se obțin prin explicitarea variabilelor $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ din sistemul (1); SD (2) se poate scrie sub forma matriceală

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2'}$$

dacă $x = {}^t(x, \ldots, x_n)$, $f = {}^t(f_1, \ldots, f_n)$

Pentru sistemul (2) teorema de existență și unicitate a problemei Cauchy $x(t_0) = \alpha$, $t_0 \in J$ este valabilă în aceleași condiții ca și pentru cazul scalar: este suficient să se presupună $f \in C^0(J \times \mathbb{R}^n)$ și f lipschitziană în x (adică $|f(t, x_1, \ldots, x_n) - f(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$, $t \in J$) pentru ca în vecinătatea lui t_0 să existe o singură soluție $x = \varphi(t) = {}^t(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ astfel încît $\varphi(t_0) = \alpha$ (aici $J_1 =]t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2[$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$).

Definiția 2. *Dacă în* SD (1) $F_1, \ldots, F_n$ *sînt liniare în* $x_1, \ldots, x$, $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ *sau echivalent, dacă în* SD (2) $f_1, \ldots, f_n$ *sînt liniare în* $x_1, \ldots, x_n$, *aceste sisteme diferențiale se vor numi liniare.*

Luînd în considerație SD (2), sistemul va fi liniar dacă el se scrie sub forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases} \tag{3}$$

sau

$$\dot{x} = Ax + b, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; A = [a_{jk}], \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

în care vom presupune coeficienții a_{jk}, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ și termenii liberi $b_1, \ldots, b_n$ funcții continue pe un interval J. Dacă $a_{jk} \in \mathbb{R}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ atunci SD (3) va fi cu coeficienți constanți.

Este ușor de stabilit că ipotezele teoremei de existență și unicitate sînt verificate pentru orice sistem (3) dacă

$$a_{jk}, \; b_j \in C^0(J), \; t_0 \in J, \; j, \; k = 1, \ldots, n.$$

Între ED (liniare sau nu) de ordinul n și SD de primul ordin există o legătură strînsă, pusă în evidență de rezultatul următor:

Propoziția 1. ED *liniară*

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = f(t)$$

se poate scrie sub forma SD (3) *în care*

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \; b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\frac{f}{a_0}\right)(t) \end{bmatrix}$$

$$A(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\left(\frac{a_n}{a_0}\right)(t) & -\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}\right)(t) & -\left(\frac{a_{n-2}}{a_0}\right)(t) & -\left(\frac{a_{n-3}}{a_0}\right)(t) \ \ldots & -\left(\frac{a_1}{a_0}\right)(t) \end{bmatrix}.$$

Reciproc, dacă matricele A și b sînt de clasă $\geqslant n$, atunci fiecare funcție $x_1, \ldots, x_n$ din SD (3) *este soluție a unei* ED *liniare de ordin maxim n.*

Scriind $y = x_1, y' = x_2, \ldots, y^{(n-1)} = x_n$, din ED se deduce $a_0\dot{x}_n + a_1x_n + \ldots + a_{n-1}x_2 + a_nx_1 = f$, obținîndu-se astfel SD

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -\dfrac{a_n}{a_0}x_1 - \dfrac{a_{n-1}}{a_0}x_2 - \ldots - \dfrac{a_1}{a_0}x_n + \dfrac{f}{a_0} \end{cases}$$

Reciproc, eliminînd prin operații algebrice funcțiile $x_2, \ldots, x_n$ din ecuațiile SD (3) și derivatele sale, rezultă o ED de ordin cel mult n verificată de x_1; analog se procedează și cu celelalte funcții $x_2, \ldots, x_n$.

Observația 1. Plecînd de la ED

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

prin procedeul utilizat la demonstrația propoziției 1 se obține SD neliniar $\dot{x} = g$, unde x are aceeași semnificație ca în propoziția 1, iar

$$g(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Definiția 3. SD (2) *se numește autonom dacă funcțiile $f_1, \ldots, f_n$ nu depind explicit de variabila independentă t.*

Un SD *liniar va fi autonom numai dacă el este cu coeficienți constanți.*

Observația 2. În baza propoziției 1, va rezulta că o mare parte din rezultatele deduse la punctul 1 vor avea un corespondent în teoria sistemelor diferențiale liniare. Astfel, este valabil următorul rezultat fundamental : *dacă S este o matrice pătrată nesingulară de clasă $C^1(I)$ cu proprietatea*

$$\frac{dS}{dt} = AS \tag{4}$$

atunci orice soluție a sistemului $\dot{x} = Ax + B$ se va scrie sub forma

$$x(t) = S(t)C + S(t)\int_{t_0}^{t} S^{-1}(s)\, b(s)\, ds, \tag{5}$$

în care C este o matrice coloană constantă cu n linii, adică notînd

$$x_h(t) = S(t)C,\ x_p(t) = S(t)\int_{t_0}^{t} S^{-1}(s)\, b(s)\, ds \tag{6}$$

egalitatea (5) se transcrie sub o formă întîlnită la punctul 1

$$x_h(t) = x_p(t) + x\ (t), \tag{5'}$$

x_h verificînd (4), iar x_p fiind o soluție particulară a SD $\dot{x} = Ax + b$ (deoarece x_p se deduce din (5) pentru $C = 0$). Matricea S cu aceste proprietăți se va numi *matrice fundamentală* a SD (3).

Într-adevăr, fie SD omogen $\dot{x} = A(t)x$ și să presupunem $x = Sy$, unde y este o matrice coloană cu n linii. Derivînd și utilizînd (4) avem

$$\dot{x} = A[Sy] = \frac{dS}{dt}y + S\dot{y} = [AS]y + S\dot{y},$$

adică $S\dot{y} = 0$; cum matricea S^{-1} există, rezultă $\dot{y} = 0$, deci $y = C$, ceea ce înseamnă că orice soluție a SD $\dot{x} = Ax$ se va scrie sub forma lui x_h din (6).

Pentru determinarea lui x_p se utilizează metoda lui Lagrange, adică se presupune $x_p(t) = S(t)\ C(t)$; se deduce $\dot{x}_p = \frac{dS}{dt}\ C + S\frac{dC}{dt} = ASC + S\frac{dC}{dt}$. Deoarece $\dot{x}_p = Ax_p + b = ASC + b$, rezultă

$S\,\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = b$, adică $C(t) = \displaystyle\int_{t_0} S^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s$ și x_p din (6) este astfel justificat.

Existența matricii S cu proprietățile din observația 2 se justifică la fel ca în cazul existenței unei baze în spațiul vectorial Ker L (vezi punctul 1), adică presupunînd matricea $[c_{jk}]$ nesingulară și construind soluțiile SD $\dot{x} = Ax$ care pentru $t = t_0 \in J$ (J este intervalul de continuitate pentru matricea A) coincid cu elementele care formează coloanele matricii $[c_{jk}]$.

Prin derivare, se deduce, utilizînd sistemul omogen și notația $\mathrm{Tr}\ A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det S) = (a_{11} + \ldots + a_{nn}) \det S = (\mathrm{Tr}\ A) \det S,$$

rezultînd formula Abel-Liouville pentru SD liniare

$$\det S(t) = \det S(t_0)\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} (a_{11} + \ldots + a_{nn})(s)\,\mathrm{d}s}; \qquad (7)$$

așadar, dacă S este nesingulară în punctul $t_0 \in J$, S va fi nesingulară în J (în acest mod formula (5) are toate elementele definite în întreg intervalul de continuitate al matricelor A și b).

Observația 3. Din formula (3), ținînd cont de matricele x și A din propoziția 1 rezultă (10) de la punctul 1 : dacă SD $\dot{x} = Ax$ provine din ED $Ly = 0$, atunci $x(t) = {}^t[y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$, iar $(a_{11} + \ldots + a_{nn})(t) = (\mathrm{Tr}\ A)(t) = -\left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)(t)$, ${}^tB$ fiind matricea transpusă atașată matricii B.

Observația 4. SD $\dot{x} = Ax$ conduce la operatorul diferențial liniar vectorial de primul ordin

$$Lx = \dot{x} - Ax = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A\right)x,\ L(cx) = cLx,\ c \in \mathbb{R},\ L(x + x^*) = Lx + Lx^*,$$

iar teorema 1 arată că dacă x este vector coloană cu n linii, iar A este o matrice pătrată de ordinul n, atunci Ker L este un spațiu vectorial real și $\dim(\mathrm{Ker}\ L) = n$.

Avantajul utilizării SD $\dot{x} = Ax + b$ în locul ED $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f$ constă în faptul că în anumite situații integrarea SD este analogă integrării ED $y' = ay + b$, cu $a, b \in C^0(J)$; astfel în baza teoromei 1 va trebui să determinăm o matrice de forma

matricii S, adică o matrice pătrată de ordinul n verificînd (4). Or ED scalară $y' = ay$ admite soluția $y(t) = e^{at}$, dacă $a \in \mathbb{R}$ așa că este normal să verificăm dacă are loc egalitatea $S(t) = e^{At}$, A fiind o matrice pătrată constantă (de ordinul n), iar construcția matricii e^{At} se poate realiza cu ajutorul teoriei Dunford-Taylor expusă la punctul 7, cap. III. Avem

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_z(A)\, e^{zt}\, dz,\ R_z(A) = \det (zI - A)^{-1}, \tag{8}$$

unde γ este un contur din $\mathbb{C}$ care conține la interior spectrul matricii A (funcția $e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!}$ fiind o funcție întreagă, nu are singularități în $\mathbb{C}$).

Teorema 1. *Matricea* e^{At} *definită prin* (8) *are următoarele proprietăți* :

i. *Este definită pentru orice matrice pătrată constantă* A *și orice* $t \in \mathbb{R}$;

ii. $e^{At}\Big|_{t=0} = I$, *I fiind matricea unitate de ordinul n* ;

iii. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} = e^{As}e^{At}$, $s,t \in \mathbb{R}$, $e^{At} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(I + \frac{1}{n} At\right)^n$;

iv. $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$;

v. $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$.

i. rezultă din (8), ținînd seama de proprietățile exponențialei.

ii. Cum $e^{zt}\Big|_{t=0} = 1$ din (8) avem, folosind continuitatea integralei (8) în raport cu parametrul t :

$$e^{At}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_z(A)\ e^{zt}\ dz\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_z(A)\, e^{zt}\Big|_{t=0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_z(A)\, 1\, dz = I$$

(deoarece $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_z(A)\, dz = I$).

iii. Din (8) se deduce

$$e^{A(t+s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\, e^{z(t+s)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\, e^{zt}\cdot e^{zs}\, dz = e^{At}\cdot e^{As},$$

proprietatea de comutativitate rezultînd din egalitatea $e^{zt}\cdot e^{zs} = e^{zs}\cdot e^{zt}$. Apoi, deoarece $e^{zt} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{zt}{n}\right)^n$, $z\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}$, avem (utilizînd iarăşi continuitatea integralei cu parametrul t din (8)) :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\left(1+\frac{zt}{n}\right)^n dz\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{zt}{n}\right)^n\right] dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\, e^{zt}\, dz,$$

dar $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\left(1+\frac{zt}{n}\right)^n dz = \left(I+\frac{1}{n}tA\right)^n$ şi din şirul anterior de egalităţi avem evident $\lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{1}{n}tA\right)^n = e^{At}$, convergenţa fiind uniformă.

iv. Făcînd în prima egalitate din iii $s=-t$ se deduce $e^{A(t+s)}\Big|_{s=-t} = I =$ $= e^{At}\cdot e^{-At}$, adică e^{-At} este matricea inversă a matricii e^{At}.

v. Utilizînd regula de derivare a integralelor cu parametru, avem :

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\, e^{zt}\, dz\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{zt}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\, z\, e^{zt}\, dz = A\, e^{At},$$

deoarece $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_z(A)\, z\, e^{zt}\, dz$ defineşte matricea Ae^{At}. În plus, $A\, e^{At} = e^{At}\cdot A$.

Combinînd teorema 1 şi observaţia 2 se deduce următorul rezultat :

Teorema 2. *Soluţia problemei Cauchy* $x(t_0) = x_0$ *pentru* SD $\dot{x} = Ax + b$, *A fiind o matrice pătrată de ordinul n constantă, b o matrice coloană cu n linii, avînd componentele funcţii continue pe* $\mathbb{R}$, *iar* x_0 *o matrice coloană constantă, se scrie sub forma :*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)\, ds. \qquad (9)$$

Este evident că aici $S(t)=e^{A(t-t_0)}$, deoarece $e^{A(t-t_0)}\Big|_{t=t_0} = e^{As}\Big|_{s=0} = I$.

Observația 5. Din formula 9 se deduce că fără a micșora generalitatea, se poate presupune $t_0 = 0$; în caz contrar, notînd $e^{-At_0}x_0 = x_0^*$, $+\int_0^t e^{-As}b(s)\,ds$ în baza proprietății iii din teorema 1, (9) se scrie

$$x(t) = e^{At}e^{-At_0}\,x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)\,ds = e^{At}x_0^* + \int_0^t e^{A(t-s)}\,b^*(s)\,ds$$

Definiția 4. *Funcțiile elementare care sînt elemente ale matricii* e^{At}, *pentru orice matrice pătrată cu elemente din* $\mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$, *se numesc cvasipolinoame.*

Cu alte cuvinte soluțiile SD $\dot{x} = Ax$, cu A matrice constantă pătrată, sînt constituite numai cu ajutorul cvasipolinoamelor; în particular, soluțiile ED liniare cu coeficienți constanți (în baza propoziției 1) vor fi de asemeni cvasipolinoame. Pentru a obține forma efectivă a cvasipolinoamelor, va fi suficient să deducem, în baza teoriei din cap. III, punctul 7, forma matricii e^{At}. Or scriind polinomul minimal al matricii pătrate A de ordinul n sub forma ($r_j \neq r_k$, $j \neq k$, $m_1, m_2, \ldots, m_q \in \mathbb{N}$)

$$P^*(z) = (z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2}\ldots(z-r_q)^{m_q},\ m_1+m_2+\ldots+m_q \leqslant n$$

avem (cu z_{jk} matrice pătrate constante de ordin n)

$$e^{At} = e^{r_1t}z_{10} + t\,e^{r_1t}z_{11} + \ldots + t^{m_1-1}\,e^{r_1t}z_{1,m_1-1} + \tag{10}$$
$$+ \ldots + e^{r_qt}z_{q0} + t\,e^{r_qt}z_{q1} + \ldots + t^{m_q-1}e^{r_qt}\,z_{q,m_q-1}.$$

Așadar, în $\mathbb{C}$ cvasipolinoamele sînt exponențiale, puteri naturale ale variabilei t, produse și combinații lineare de astfel de funcții; în $\mathbb{R}$, deoarece scriind $x(t) = \operatorname{Re}x(t) + i\operatorname{Im}x(t)$ avem $\dot{x}(t) = \operatorname{Re}\dot{x}(t) + i\operatorname{Im}\dot{x}(t)$, rezultînd din SD $\dot{x} = Ax$, dacă A are elemente din $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{Re}\dot{x} + i\operatorname{Im}\dot{x} = A(\operatorname{Re}x + i\operatorname{Im}x) = A\operatorname{Re}x + iA\operatorname{Im}x.$$

Separînd părțile reale și cele imaginare, avem

$$\operatorname{Re}\dot{x} = A\operatorname{Re}x,\ \operatorname{Im}\dot{x} = A\operatorname{Im}x,$$

deci atît părțile reale cît și cele imaginare ale unei soluții complexe pentru SD $\dot{x} = Ax$ (A fiind matrice pătrată reală) vor verifica același SD. Prin urmare, în $\mathbb{R}$ cvasipolinoamele se deduc considerînd părțile reale și cele imaginare ale cvasipolinoamelor din $\mathbb{C}$; rezultă deci următoarele funcții elementare: $1,\ t,\ \ldots,\ t^{m_1},\ e^{rt},\ te^{rt},\ \ldots,\ t^{m_2}e^{rt},$

$\cos(\beta t)$, $\sin(\beta t)$, $t\cos(\beta t)$, $t\sin(\beta t)$, ..., $t^{m_3}\cos(\beta t)$, $t^{m_3}\sin(\beta t)$, $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $te^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $te^{\alpha t}\sin(\beta t)$, ..., $t^{m_4}e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $t^{m_4}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, iar orice combinație liniară a acestor funcții va fi iarăși cvasi-polinom.

În cazul ED liniare, omogene, de ordinul n și cu coeficienți constanți, polinomul minimal al matricii A din propoziția 1 va fi:

$$a_0P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n \tag{11}$$

într-adevăr avem $P_n(z) = \det(zI - A)$ și calculînd acest determinant după elementele ultimei linii se deduce:

$$\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & z & -1 \\ \frac{a_n}{a_0} & \frac{a_{n-1}}{a_0} & \frac{a_{n-2}}{a_0} & \ldots & \frac{a_2}{a_0}z + \frac{a_1}{a_0} & \end{vmatrix} =$$

$$= z^n + \frac{a_1}{a_0}z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}z^{n-2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0}z + \frac{a_n}{a_0}.$$

Deoarece există un minor de ordinul $n-1$ al determinantului matricii $zI - A$ care nu depinde de z, polinomul minimal al matricii A va coincide cu polinomul caracteristic al acestei matrici.

Aplicînd rezultatele anterioare valabile pentru SD, se deduce direct modul de determinare al soluției y_h pentru ED $Ly = 0$, $Ly = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_n$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$: forma cvasipolinoamelor în cauză va fi direct legată de rădăcinile polinomului (11) și multiplicitățile acestora. Rezultă așadar, regula cunoscută de determinare a lui y_h în cazul ED $Ly = 0$, operatorul L avînd coeficienții constanți.

Observația 6. *Dacă* $S(t)$ *este o soluție fundamentală pentru* SD $\dot{x} = Ax$, *adică* $\dot{S} = AS$, $\det S \neq 0$, *atunci are loc egalitatea*

$$e^{At} = S(t)\,S^{-1}(0).$$

Într-adevăr, fie S_1 o matrice fundamentală oarecare a SD $\dot{x} = Ax$; va exista o matrice constantă pătrată C (avînd același ordin cu matricea A) astfel încît să avem egalitatea

$$S_1(t) = S(t)C,$$

deoarece scriind $S_1(t) = S(t)T(t)$, T fiind o matrice pătrată, avem $\dot{S}_1 = \dot{S}T + S\dot{T}$ și deoarece $\dot{S}_1 = AS_1$, $\dot{S} = AS$, rezultă egalitatea $AS_1 = AST + S\dot{T}$, deci $S\dot{T} = 0$, adică $\dot{T} = 0$, deci $T = C$.

Deoarece e^{At} este o matrice fundamentală a SD $\dot{x} = Ax$ (vezi teorema 2), avem

$$e^{At} = S(t)C;$$

matricea C se va putea determina punînd $t = 0$ în egalitatea anterioară, obținîndu-se astfel egalitatea cerută.

Exemplul 1. Fie SD $\dot{x} = Ax$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Deoarece $\det(zI - A) = z^2 - (a+d)z + ad - bc = (z - z_1)(z - z_2)$ rezultă :

i. Dacă $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, avem (deoarece $f(A) = f(z_1)Z_1 + f(z_2)Z_2$, iar $f(z) = e^{tz}$,

$$e^{At} = \frac{e^{z_1 t}}{z_1 - z_2}\begin{bmatrix} a - z_2 & b \\ c & d - z_2 \end{bmatrix} + \frac{e^{z_2 t}}{z_1 - z_2}\begin{bmatrix} z_1 - a & -b \\ -c & z_1 - d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a - z_2}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} + \frac{z_1 - a}{z_1 - z_2} e^{z_2 t} & \frac{b}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} - \frac{b}{z_1 - z_2} e^{z_2 t} \\ \frac{c}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} - \frac{c}{z_1 - z_2} e^{z_2 t} & \frac{d - z_2}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} + \frac{z_1 - d}{z_1 - z_2} e^{z_2 t} \end{bmatrix}$$

ii. Dacă $z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$ $\left(\text{deci } z_1 = z_2 = \frac{a+d}{2}\right)$ avem (deoarece $f(A) = f(z_1)Z_1 + f'(z_1)Z_2$, iar $f(z) = e^{tz}$)

$$e^{At} = e^{z_1 t} I + t e^{z_1 t}\begin{bmatrix} a - z_1 & b \\ c & d - z_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{z_1 t}[1 + (a - z_1)t] & bt e^{z_1 t} \\ ct e^{z_1 t} & e^{z_1 t}[1 + (d - z_1)t] \end{bmatrix}.$$

Același rezultat se obține din i trecînd la limită, pentru $z_2 \to z_1$.

iii. Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, avem $z_2 = \bar{z}_1$, iar din i efectuînd calculele în această ipoteză rezultă forma reală pentru e^{At} (avem $z_1 - z_2 = 2i \operatorname{Im} z_1$, $e^{z_1 t} = e^{t \operatorname{Re} z_1}[\cos(t \operatorname{Im} z_1) + i \sin(t \operatorname{Im} z_1)]$, $e^{z_2 t} = e^{t \operatorname{Re} z_1}[\cos(t \operatorname{Im} z_1) - i \sin(t \operatorname{Im} z_1)]$.

2.2. Metoda funcțiilor și valorilor proprii pentru integrarea sistemelor diferențiale liniare

Revenind la SD liniar, omogen, de primul ordin cu coeficienți constanți

$$\dot{x} = Ax, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{jk} \in \mathbb{C} \qquad (12)$$

am văzut la secțiunea 2.1 că soluția sa se scrie sub forma

$$x(t) = e^{At}c \tag{13}$$

cu c un vector constant cu n linii $c = {}^t[c_1, c_2, \ldots, c_n]$. Ținînd cont de structura matricii e^{At}, se pot obține soluții particulare pentru SD (12) de forma $x(t) = e^{zt}v$, unde v este un vector constant; într-adevăr, deoarece

$$\frac{d}{dt}(e^{zt}v) = z\,e^{zt}v,\ A(e^{zt}v) = e^{zt}Av$$

$x(t) = e^{zt}v$ va fi o soluție pentru SD (12) dacă avem $z\,e^{zt}v = e^{zt}Av$ adică dacă se verifică egalitatea

$$Av = zv \text{ sau } (zI - A)v = 0. \tag{14}$$

Prin urmare, vectorul $x(t) = e^{zt}v$ va fi o soluție a SD (12) dacă și numai dacă z este o valoare proprie pentru matricea A, iar v este vector propriu al aceleiași matrice A corespunzînd valorii proprii z. Pentru orice vector propriu v^j al matricii A corespunzînd valorii proprii z_j, o soluție a SD (12) va fi $x^j(t) = e^{z_jt}v^j$.

Propoziția 2. *Dacă $v^1, v^2, \ldots, v^n$ sînt vectorii proprii liniar independenți ai matricii A* (dacă există) *soluția generală a* SD (12) *se scrie sub forma*

$$x(t) = c_1 e^{z_1t}v^1 + c_2e^{z_2t}v^2 + \ldots + c_ne^{z_nt}v^n, \tag{15}$$

unde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ sînt constante arbitrare, iar $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sînt valorile proprii ale matricii A (nu neapărat distincte).

Într-adevăr, avem scriind $x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{z_jt}v$:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_jz_j e^{z_jt},$$

$$Ax(t) = A\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{z_jt} v^j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{z_jt} Av^j = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{z_jt} z_jv^j$$

adică $\dot{x}(t) = Ax(t)$; propoziția va fi justificată dacă arătăm că matricea pătrată formată cu vectorii proprii $v^1, v^2, \ldots, v^n$ este nesingulară, deoarece în acest caz va fi nesingulară și matricea $S(t) = [e^{z_1t}v^1, \ldots, e^{z_nt}v^n]$ (avem $S(0) = [v^1, \ldots, v^n]$, iar în baza formulei Abel-Liouville (7) se va deduce $\det S(t) \neq 0$ dacă $\det S(0) \neq 0$). Utilizînd principiul inducției, se observă că pentru $k = 1$ avem, din $c_1v^1 = 0$, $c_1 \in \mathbb{C}$, neapărat $c_1 = 0$ ($v^1 \neq 0$, fiind vector propriu) și să presupunem că orice mulțime formată din k vectori proprii ai matricii A corespunzînd la valorile proprii $z_1, \ldots, z_k$ diferite este liniar independentă. Fie $z_1, \ldots, z_k$, z_{k+1}, $k+1$ valori proprii distincte ale matricii A și $v^1, \ldots, v^k, v^{k+1}$ vectorii proprii corespunzători; scriind

$$c_1v^1 + \ldots + c_kv^k + c_{k+1}v^{k+1} = 0 \tag{16}$$

se obține

$$0 = A(c_1v^1 + \ldots + c_kv^k + c_{k+1}v^{k+1}) = c_1z_1v^1 + \ldots + c_{k+1}z_kv^k + c_{k1}z_{k+1}v^{k+1}.$$

Scăzînd din ultima egalitate (16) înmulțită cu z_1 se deduce $(z_2 - z_1)c_2v^2 + \ldots + (z_k - z_1)c_kv^k + (z_{k+1} - z_1)c_{k+1}v^{k+1} = 0$, egalitate formată cu k vectori proprii liniari independenți; deci $(z_2 - z_1)c_2 = 0, \ldots, (z_{k+1} - z_1)c_{k+1} = 0$, adică $c_2 = c_3 = \ldots = c_{k+1} = 0$ (s-a presupus $z_j \neq z_k$ pentru $j \neq k$) și din (16) se deduce $c_1 = 0$.

În particular din propoziția 2 se deduce că S este o matrice fundamentală pentru SD $\dot{x} = Ax$ dacă coloanele lui S sînt vectori liniar independenți.

Exemple 2. Să se determine soluția SD

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

cu proprietatea $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Deoarece $P(z) = \det(zI - A) = (z - 7)(z + 5)$, se deduc valorile proprii $z_1 = 7$ și $z_2 = -5$; pentru $z_1 = 7$ ne interesează $v^1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}$ astfel încît $(7I - A)v^1 = 0$, adică $\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0$, deci $v_{11} = 2v_{12}$. Se deduce $v^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ și prin urmare $x'(t) = e^{7t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ va verifica sistemul dat; pentru $z = z_2 = -5$, procedînd analog, se deduce $v^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ și deci o altă soluție a SD considerat va fi $x^2(t) = e^{-5t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Deoarece $z_1 \neq z_2$, în baza propoziției 2 orice soluție a SD dat va fi $x(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t)$, numerele c_1 și c_2 determinîndu-se din condiția inițială $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, rezultînd $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. Așadar soluția căutată va fi

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{7t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-5t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{1}{2}e^{7t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

3. În cazul SD $\dot{x} = Ax$, cu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ avem $P(z) = \det(zI - A) = (z - 1)(z - 3)(z + 2)$; se deduc valorile proprii $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_3 = -2$. Rezolvînd sistemele liniare $(I - A)v^1 = 0$, $(3I - A)v^2 = 0$, $(2I + A)v^3 = 0$ se obțin soluțiile $v^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ cărora le corespund soluțiile $x^1(t) = e^zv^1$,

$x^2(t) = e^{3t}v^2$, $x^3(t) = e^{-2t}v^3$ pentru SD considerat. Deoarece valorile proprii z_1, z_2 și z_3 sînt distincte, rezultă, în baza propoziției 2, soluția SD considerat :

$$x(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + c_3x^3(t) =$$

$$= c_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 e^t + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4c_1 e^t + 2c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

4. Fie SD $\dot{x} = Ax$ în care

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{bmatrix}.$$

În acest caz calculul lui $P(z) = \det(zI - A)$ ca și obținerea valorilor proprii ale matrici A sînt probleme complicate care însă se pot evita observînd că avem

$$A \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ 2v_1 + 2v_2 + \dots + 2v_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ nv_1 + nv_2 + \dots + nv_n \end{bmatrix} = (v_1 + v_2 + \dots + v_n) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$$

și deci dacă se aleg numerele $v_1, v_2, \dots, v_n$ astfel încît $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$ se vor obține vectori proprii corespunzînd valorii proprii $z = 0$. Rezultă direct $n - 1$ vectori proprii liniar independenți

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \dots, v^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

și deoarece $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = (1 + 2 + \dots + n) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$ avem

$z_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ o nouă valoare proprie pentru matricea A, vectorul propriu corespunzător fiind $v_n = {}^t[1, 2, \ldots, n]$; vectorii $v^1, \ldots, v^n$ sînt evident liniar independenți, conducînd la soluțiile particulare

$$x^1(t) = v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ldots, x^{n-1}(t) = v^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; x^n(t) = \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$$

și deci la soluția generală a SD considerat ;

$$x(t) = c_1 x^1(t) + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}(t) + c_n x^n(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 + c_n \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2} t} \\ c_2 + 2c_n \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2} t} \\ \vdots \\ -c_1 - c_2 - \ldots - c_{n-1} + nc_n \mathrm{e}^{\frac{n(n+1)}{2} t} \end{bmatrix}.$$

Dacă valorile proprii ale matricii A sînt multiple, iar la o valoare proprie z_j avînd ordinul de multiplicitate $n_j > 1$ corespund $n_1' < n_1$ vectori proprii liniar independenți, atunci construcția unei matrice fundamentale $S(t)$ pentru SD $\dot{x} = Ax$ se realizează cel mai simplu prin utilizarea teoriei din secțiunea 2.1, construind, cu ajutorul teoriei Dunford-Schwartz matricea fundamentală e^{At}. În fine dacă A are elementele din $\mathbb{R}$ atunci SD $\dot{x} = Ax$ va trebui integrat cu ajutorul unor cvasipolinoame reale (dacă A are valori proprii complexe cărora le corespund funcții proprii complexe) ; în acest caz, scriind $x = y + \mathrm{i}z$, atît y cît și z vor verifica SD $\dot{x} = Ax$ (deoarece $\dot{x} = \dot{y} + \mathrm{i}\dot{z}$, iar $Ax = A(y + \mathrm{i}z) = Ay + \mathrm{i}Az$, iar $\dot{y} + \mathrm{i}\dot{z} = Ay + \mathrm{i}Az$ conduce la SD $\dot{y} = Ay$ și $\dot{z} = Az$.

Dacă avem pentru SD $\dot{x} = Ax$ soluția complexă

$$x(t) = \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)t}[v^1(t) + \mathrm{i}v^2(t)] =$$
$$= \mathrm{e}^{\alpha t}[v^1(t) \cos(\beta t) - v^2(t) \sin(\beta t)] +$$
$$+ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha t}[v^1(t) \sin(\beta t) + v^2(t) \cos(\beta t)]$$

vor rezulta două soluții reale pentru același SD și anume

$$y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}[v^1(t) \cos(\beta t) - v^2(t) \sin(\beta t)]$$
$$z(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}[v^2(t) \sin(\beta t) + v^2(t) \cos(\beta t)]$$

(apar două soluții deoarece în acest caz odată cu $z = \alpha + i\beta$ și $\bar{z} = \alpha - i\beta$ va fi o valoare proprie pentru matricea A, așa că aceste două soluții corespund practic la două valori proprii distincte ale matricii A).

2.3. Sisteme diferențiale liniare în complex

Vom considera SD de forma

$$w'(z) = A(z)w(z),\ w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{17}$$

în care a_{jk} sînt funcții olomorfe în domeniul $D \subset \mathbb{C}$.

Folosind metodele utilizate în cazul SD reale se poate justifica imediat următorul rezultat :

Teorema 3. *Pentru orice $w_0 \in \mathbb{C}^n$ și orice $z_0 \in D$ există o singură soluție w olomorfă într-o vecinătate V_{z_0} convenabilă a punctului z_0, $V_{z_0} \subset D$, a* SD (17) *astfel încît $w(z_0) = w_0$.*

Soluțiile olomorfe ale SD (17) definesc un spațiu liniar complex n-dimensional, iar pentru un $z_0 \in D$ fixat, transformarea $w_0 \to w(z)$ va defini un izomorfism între $\mathbb{C}^n$ și acest subspațiu.

Observația 7. *Dacă D este un domeniu simplu conex se poate arăta că V_{z_0} se poate înlocui prin D.*

Rezultatul din observația 7 este în concordanță cu rezultatele anterioare ; astfel, dacă A este o matrice constantă, ea va fi olomorfă în $\mathbb{C}$ și soluțiile SD (17) vor fi de asemenea funcții olomorfe în $\mathbb{C}$ (deoarece cvasipolinoamele din $\mathbb{C}$ sînt evident funcții olomorfe în $\mathbb{C}$).

Teorema 3 nu mai este valabilă dacă în punctul $z_0 \in D$ matricea A admite o singularitate izolată (adică dacă cel puțin una din componentele matricii A admite o singularitate în z_0, aceste componente fiind olomorfe și uniforme în vecinătatea lui z_0) ; fără a micșora gradul de generalitate, în cazul unei singure singularități z_0, se poate presupune $z_0 = 0$ (în caz contrar este suficient să se efectueze translația $z \mapsto z - z_0$). SD de acest tip se numesc *sisteme diferențiale cu puncte singulare*, iar cele mai simple SD cu puncte singulare sînt :

i. *Sistemele de tip Euler* avînd forma

$$w' = \frac{A}{z} w, \text{ cu } A \text{ o matrice constantă nenulă} \tag{18}$$

ii. *Sistemele de tip Fuchs* care au forma

$$w' = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{z - z_j} \right) w,\ A_1, \dots, A_k \text{ fiind matrice pătrate nenule.} \tag{19}$$

Teorema 4. *O matrice fundamentală pentru* SD *Euler* (18) *este dată de matricea* $S(z) = z^A$, *dacă* $\det A \neq 0$.

Într-adevăr, în baza teoriei Dunford-Taylor avem

$$z^A = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_t(A)\, z^t\, dt,\ z^t = e^{t \ln z}$$

unde conturul γ cuprinde la interior spectrul matricii A și nu conține singularitățile funcției $f(t) = z^t$; or funcția $f(t) = z^t$ admite ca punct singular $z=0$ și deoarece $\det A \neq 0$ spectrul matricii A nu conține originea ceea ce face ca definiția matricii z^A să fie corectă. Apoi, deoarece

$$\frac{d}{dz}(z^A) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_\gamma R_t(A)\, z^t\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_t(A)\, tz^{t-1}\, dt = \frac{1}{2\pi i z} \int_\gamma R_t(A)\, tz^t\, dt$$

rezultă $\frac{d}{dz} z^A = \frac{1}{z} Az^A$, adică $\frac{d}{dz} S(z) = \frac{1}{z} AS(z)$.

Observația 8. *Din demonstrația teoremei* 4 *rezultă egalitatea*

$$z^{A-I} = \frac{1}{z} z^A \left(\text{sau } z^{A-kI} = \frac{1}{z^k} z^A \right),$$

deoarece această egalitate este echivalentă cu egalitatea

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_t(A)\, tz^{t-1}\, dt = \frac{1}{2\pi i z} \int_\gamma R_t(A)\, tz^t\, dt.$$

Observația 9. Printr-un raționament analog celui din demonstrația teoremei 4, se deduce că *matricea*

$$S(z) = (z - z_1)^{A_1} \ldots (z - z_k)^{A_k}$$

va fi o matrice fundamentală pentru sistemul de tip Fuchs (19) *dacă spectrul matricii* A_j *nu conține punctul singular* z_j, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Plecînd de la aceste situații particulare se poate arăta că pentru SD de forma

$$w' = \frac{1}{z} A(z)w,$$

în care A este o matrice pătrată olomorfă în vecinătatea originii, există matrice fundamentale de forma

$$S(z) = U(z)\, z^B; \qquad (20)$$

aici U este o matrice olomorfă pentru $|z| < r$, $r > 0$, iar B este o matrice constantă pătrată de același ordin cu matricea A, convenabil aleasă (matricea B nu este unic determinată deoarece se poate scrie, în baza observației 8 : $S(z) = [U(z)z^k]z^{B-kI}$, $k = 1, 2, \ldots$). Aceste matrice se determină prin înlocuire în SD $S'(z) = \frac{1}{z} A(z)S(z)$(dezvoltînd A și U în serie Taylor). În cazul SD de forma

$$w' = \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j(z)}{z - z_j}\right] w \tag{21}$$

unde $A_1, \ldots, A_k$ sînt matrice pătrate olomorfe în $\mathbb{C}$, vor exista matrice fundamentale de forma

$$S(z) = U(z)\,(z - z_j)^{B_j},\ j = 1, \ldots, k$$

în vecinătatea fiecărui punct singular $z_1, \ldots, z_k$, $B_1 \ldots, B_k$ fiind matrice pătrate constante.

Definiția 5. SD *avînd forma* (21), *cu* A_j *matrice olomorfe în* $\mathbb{C}$ *se numesc sisteme diferențiale cu puncte singulare regulate sau cu singularități slabe.*

Cu ajutorul transformării $t = \frac{1}{z}$ se poate analiza și situația punctului $z = \infty$, care se transformă în punctul $t = 0$ din planul complex t; în acest mod, punînd $v(t) = w\left(\frac{1}{t}\right)$, din SD (17) se va deduce SD

$$v'(t) = -\frac{1}{t^2} A\left(\frac{1}{t}\right) v(t),$$

care va fi analizat în vecinătatea punctului $t = 0$. În cazul SD de tip Fuchs (19), este ușor de constatat că punctul $z = \infty$ va fi o singularitate slabă dacă și numai dacă matricele pătrate constante $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_k$ verifică relația $A_1 + \ldots + A_k \neq 0$ (dacă $A_1 + \ldots + A_k = 0$, $z = \infty$ va fi un punct ordinar pentru SD (19)).

Pentru exemplificarea teoriei enunțate mai sus, vom considera ED liniară și omogenă de ordinul al doilea

$$y'' + a(z)y' + b(z)y = 0 \tag{22}$$

unde y este funcție scalară de variabila complexă z; scriind

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \tag{23}$$

din (22) se deduce SD

$$w' = A(z)\,w,\ A(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(z) & -a(z) \end{bmatrix}. \qquad (22')$$

Rezultă că ED (22) va admite o singularitate slabă în z_0 dacă z_0 este un pol de ordin cel mult unu pentru funcțiile a și b.

Dar ED (22) se poate transforma într-un SD și pe altă cale considerînd de exemplu

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ (z - z_0)y' \end{bmatrix},$$

obținîndu-se astfel SD

$$w' = A_1(z)w,\ A_1(z) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{z - z_0} \\ -(z - z_0)\,b(z) & \dfrac{1}{z - z_0} - a(z) \end{bmatrix};$$

pentru acest SD punctul $z=z_0$ va fi un punct singular regulat dacă coeficientul a are în z_0 un pol de ordin maxim egal cu unitatea, iar coeficientul b admite punctul z_0 ca pol de ordin cel mult doi.

În acest mod, dacă în SD (22), coeficienții a și b sînt funcții olomorfe în vecinătatea punctului z_0 situat la distanță finită, atunci z_0 va fi un punct regulat pentru această ED ; dacă însă z_0 este un pol de ordin cel mult unu sau de ordin cel mult doi pentru coeficienții a respectiv b, atunci z_0 va fi o singularitate slabă pentru ED (22) (se mai spune că z_0 este un punct singular regulat pentru acest SD).

Pentru $z_0 = \infty$, se va aplica transformarea $t = \dfrac{1}{z}$ și dacă se scrie $u(t) = y\left(\dfrac{1}{t}\right)$, din ED (22) se deduce ED

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\,a\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{t^4} + b\left(\frac{1}{t}\right)u = 0. \qquad (24)$$

Presupunînd coeficienții a și b funcții olomorfe în vecinătatea punctului de la infinit, adică

$$a(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z_2} + \ldots, b(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \ldots, |z| > R, \quad (25)$$

se deduce

$$a\left(\frac{1}{t}\right) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots, b\left(\frac{1}{t}\right) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \ldots \quad (25')$$

În baza ED (24) va rezulta că $z = \infty$ este un punct ordinar pentru ED (22) dacă și numai dacă $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$,

iar $z = \infty$ va fi o singularitate slabă pentru ED (22) dacă și numai dacă $a_0 = 0$, $b_0 = b_1 = 0$; în celelalte situații $z = \infty$ va fi o singularitate forte pentru ED (22).

Observația 10. În cazul SD cu singularitate slabă în punctul z_0

$$w' = \frac{A(z)}{z - z_0} w$$

unde A este o matrice pătrată olomorfă, cu schimbarea $z \leftrightarrow t$, $z - z_0 = e^t$, se va obține SD

$$\frac{dw}{dt} = A(z_0 + e^t) w = A_1(t) w,$$

în care $A_1 = A \circ \varphi$, $\varphi(t) = z_0 + e^t$. Dacă $S_1(t)$ este o matrice fundamentală pentru acest ultim sistem, evident $S(t) = S_1[\ln(z - z_0)]$ va fi o matrice fundamentală pentru sistemul inițial. De aceea, este posibil ca SD cu singularitate slabă să conțină soluții cu termeni logaritmici.

Exemple. 5. Pentru ED

$$z^n(z + 1)y'' + (z + 1)y' + 9zy = 0$$

a cărei formă normală se scrie

$$y'' + \frac{1}{z^n} y' + \frac{9}{z^{n-1}(z + 1)} y = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

punctul $z = -1$ va fi un punct singular regulat (slab), pe cînd punctul singular $z = 0$ va fi slab numai dacă $n = 1$; pentru $n = 0$, $z = 0$ este punct ordinar, iar pentru $n = 2,3,\ldots$ acest punct este un punct cu singularitate tare. Pentru orice n, $z = \infty$ este singular tare.

6. Pentru ED

$$(\sin z)y'' + 4zy' + (e^z - 1 - z)y = 0$$

punctele singulare sînt $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; dar evident $z = 0$ este un punct ordinar, iar punctele $z_k = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ vor fi puncte singulare slabe. Punctul $z = \infty$ nu poate fi clasificat deoarece este un punct de acumulare de singularități (s-au avut în vedere numa punctele singulare izolate ale ED).

Definiția 6. ED (22) *se numește de tip Fuchs dacă admite doar un număr finit de puncte singulare slabe în* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Teorema 5. ED (22) *este de tip Fuchs cu m puncte singulare* $z_1, \ldots, z_m$ *dacă*

$$a(z) = \frac{a_1}{z - z_1} + \ldots + \frac{a_m}{z - z_m}, \tag{25}$$

$$b(z) = \frac{b_1}{(z - z_1)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_m)^2} + \frac{c_1}{z - z_1} + \ldots + \frac{c_m}{z - z_m}$$

unde $a_j,\ b_j,\ c_j \in \mathbb{C}$, *iar* $|a_j| + |b_j| + |c_j| > 0$, $c_1 + \ldots + c_m = 0$. *Punctul* $z = \infty$ *va fi ordinar pentru* ED (22) *dacă se verifică condițiile*

$$a_1 + \ldots + a_m = 2,\ (b_1 + z_1c_1) + \ldots + (b_m + z_mc_m) = 0,$$
$$(2z_1b_1 + z_1^2c_1) + \ldots + (2z_mb_m + z_m^2c_m) = 0. \tag{26'}$$

Dacă z_1 este punct singular slab pentru ED $y'' + a(z)y' + b(z)y = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ atunci

$$a(z) = \frac{a_1}{z - z_1} + A_1(z),\ b(z) = \frac{b_1}{(z - z_1)^2} + \frac{c_1}{z - z_1} + B_1(z),$$

funcțiile A_1 și B_1 fiind olomorfe în punctul z_k și în vecinătatea acestui punct. Deoarece A_1 și B_1 admit punctul z_2 ca punct singular slab, avem $A_1(z) = \frac{a_2}{z - z_2} + A_2(z)$, $B_1(z) = \frac{b_2}{(z - z_2)^2} + \frac{c_2}{z - z_2} + B_2(z)$ și analog se va proceda cu funcțiile A_2 și B_2. Va rezulta că diferențele $a(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{z - z_k}$, $b(z) - \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{b_k}{(z - z_k)^2} + \frac{c_k}{z - z_k} \right]$ vor fi funcții olomorfe în $\mathbb{C}$ și deoarece $z = \infty$ este cel mult un punct singular slab, va trebui să avem (din 25))

$$\lim_{z \to \infty} \left[a(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z - z_k} \right] = 0,$$

$$\lim_{z \to \infty} \left\{ b(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{b_k}{(z - z_k)^2} + \frac{c_k}{z - z_k} \right] \right\} = 0,$$

$$\lim_{z \to \infty} z \left\{ b(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{b_k}{(z - z_k)^2} + \frac{c_k}{z - z_k} \right] \right\} = 0.$$

În baza teoremei lui Liouville neapărat a și b sînt constante în $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, iar constantele sînt nule ; astfel s-au justificat egalitățile (25) precum și relația $c_1 + \ldots + c_m = 0$. Condițiile (26') rezultă în baza dezvoltării (25') scrisă pentru puncte ordinare ale ED în discuție, ținînd cont de egalitățile

$$\frac{1}{z - z_k} = \frac{1}{z} + \frac{z_k}{z^2} + \frac{z_k^2}{z^3} + \ldots,\ \frac{1}{(z - z_k)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2z_k}{z^3} + \frac{3z_k^2}{z^4} + \ldots,$$

valabile pentru $|z|$ suficient de mare.

Exemplu 7. Nu există ED de ordinul al doilea de tip Fuchs cu un singur punct singular, deoarece dacă z_0 este acest punct singular va trebui să avem ED

$$y'' + a(z)y' + b(z)y = 0,\ a(z) = \frac{a}{z - z_0},\ b(z) = \frac{b}{(z - z_0)^2} + \frac{c}{z - z_0}.$$

Scriind condițiile ca punctul de la infinit să fie ordinar, se deduce (luînd în discuție doar coeficientul a)

$$a\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{at}{1 - tz_0} = at + az_0t^2 + yaz_0^2t^2 + \ldots,$$

deci nu putem avea $a = 0$ și $z_0 = 2$.

8. ED de ordinul al doilea de tip Fuchs cu două puncte singulare slabe (fie ele $z_1 = 0$ și $z_2 = \infty$) va fi ED Euler

$$z^2y'' + \alpha zy' + \beta y = 0, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Într-adevăr, avem

$$a(z) = \frac{\alpha}{z}, \ b(z) = \frac{\beta}{z^2} + \frac{\gamma}{z},$$

rezultînd $a\left(\frac{1}{t}\right) = \alpha t$, $\beta\left(\frac{1}{t}\right) = \beta t^2 + \gamma t$ cu $\gamma = 0$; așadar $a(z) = \frac{\alpha}{z}$, $b(z) = \frac{\beta}{z^2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

9. ED de ordinul al doilea avînd doar punctele singulare slabe $0, 1, \infty$ este de forma

$$z(1 - z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

și se numește *ecuația lui Gauss* sau ED *hipergeometrică* (justificarea se realizează exact la fel ca în cazul exemplelor 7 și 8).

Această ecuație va admite o soluție olomorfă în origine (deși $z = 0$ este punct singular) numită funcția hipergeometrică și care se scrie

$${}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n, \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

unde $(z)_n = z(z + 1) \ldots (z + n - 1)$. Se constată, în plus, că pentru α (sau β) număr întreg negativ $-n$, funcția hipergeometrică degenerează într-un polinom, care nu este altcineva decît polinomul ortogonal Jacobi de gradul n.

3. Ecuații diferențiale de ordinul al doilea

3.1. Generalități

Dintre toate ED în practică se întîlnesc cel mai des ED de ordinul al doilea, care au fie forma

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = b(x), \tag{1}$$

fie forma autoadjunctă

$$[p(x)\, y']' - q(x)\, y = f(x). \tag{2}$$

Dacă nu se fac alte specificații, se presupune că funcțiile a_1, a_2, p, p', q, b și f sînt continue pe un interval $I \subset \mathbb{R}$ avînd valori reale

(cazul valorilor complexe se poate trata analog, cu mici diferențe), iar $p(x) \neq 0$, $x \in I$ (dacă I este mărginit ultima ipoteză se înlocuiește cu $x \in I^-$); faptul că se face ipoteza $p(x) \neq 0$ $x \in I$ se justifică prin aceea că în intervalul I, ED (2) se presupune fără puncte singulare.

Între cele două ED (1) și (2) există evident o strînsă legătură (de exemplu, din (2) prin împărțire cu p și notînd $\frac{p'}{p} = a_1$, $-\frac{q}{p} = a_2$, $\frac{f}{p} = b$ se deduce (1), iar dacă se înmulțește (1) cu $\exp\left(\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t\right)$ $x_0, x_1 \in I$, notînd $p(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t} > 0$, $a_2(x)\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t} = -q(x)$, $b(x)\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,\mathrm{d}t} = f(x)$ rezultă **ED** (2); totuși **ED** (2) este o formă mai generală decît **ED** (1), deoarece dacă p este doar funcție continuă, atunci ED (2) nu se mai reduce la ED (1) și studiul ED (2) în această situație se realizează cu ajutorul SD

$$u' = \frac{1}{p(x)}\,v, \quad v' = q(x)\,u + f(x) \tag{2'}$$

avînd matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q & 0 \end{bmatrix}$. Prin urmare, o soluție în I a ED (2) trebuie să fie o funcție de clasă $C^1(I)$ astfel încît $py' \in C^1(I)$ și y să verifice ED (2) în I, fără a mai utiliza ipoteza $p \in C^1(I)$, după cum rezultă din analiza SD (2').

Un caz particular important al ED (1) se obține cînd $p(x) = 1$, $x \in I$, obținîndu-se forma redusă a ED liniare de ordinul al doilea

$$y'' - q(x)\,y = f(x). \tag{3}$$

Propoziția 1. ED (2) *se poate întotdeauna scrie sub forma redusă* (3) *cu ajutorul schimbării de variabile* $x \mapsto t = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}$, $x, x_0 \in I$.

Deoarece avem $t'(x) = \frac{1}{p(x)}$, $x \in I$, iar $p(x) \neq 0$, $x \in I$, în I t este strict monotonă, deci este inversabilă: $x = x(t)$, $t \in J$, unde J este un interval definit cu ajutorul intervalului I și a funcției t; rezultă

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{p(x)}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

adică din ED(2) va rezulta ED $\frac{d^2y}{dt^2} - pqy = pf$, variabila x din funcțiile pq și p fiind înlocuită prin $x(t)$.

Observația 1. *Dacă în* **ED** (1) *avem* $a_1 \in C^1(I)$ *această ecuație se poate scrie sub forma redusă* (3) *prin schimbarea de funcție*

$$y(x) = z(x)\, e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}, \quad x, x_0 \in I$$

deoarece prin înlocuirea în **ED** (1) se deduce pentru z **ED**

$$z'' + \left[a_2(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x)\right]z = b_1(x) \tag{3'}$$

$$b_1(x) = b(x)\, e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt}.$$

Prin urmare, pentru ED de ordinul al doilea este suficient să se ia în discuție fie forma autoadjunctă (2) fie forma redusă (3).

Exemple 1. Dintre ED (2) cele mai simple se scriu sub una din formele

$$y'' = 0,\ y'' - c^2y = 0,\ y'' + c^2y = 0,\ c > 0,$$

ale căror soluții se scriu respectiv

$$y(x) = c_1 + c_2x,\ y(x) = c_1\, e^{cx} + c_2\, e^{-cx},\ y(x) = c_1 \cos(cx) + c_2 \sin(cx).$$

Dacă însă $a, b \in \mathbb{R}$ și se consideră ED

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{4}$$

utilizînd observația 1, prin transformarea $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} z(x)$ se obține forma redusă corespunzătoare.

$$z'' + \left(b - \frac{1}{4}\,a^2\right)z = 0$$

și deci dacă $4b = a^2$ rezultă soluția (pentru ED (1'))

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}ax}(c_1 + c_2x);$$

dacă $b - \frac{1}{4}\,a^2 - c^2 < 0$, pentru ED (1') se deduce soluția $\left(c = \sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 - b}\right)$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}ax}(c_1\, e^{cx} + c_2\, e^{-cx}) = c_1\, e^{r_1x} + c_2\, e^{r_2x},$$

unde r_1 și r_2 sînt rădăcinile reale ale polinomului caracteristic $r^2 + ar + b = 0$, $r_{1,2} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$.

În fine, dacă $b - \frac{1}{4}a^2 = c^2 > 0$, prin calcule similare se deduce soluția ED (4) sub forma

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\left[c_1 \cos\left(x\sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}\right) + c_2 \sin\left(x\sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}\right)\right]$$

2. În cazul ED de tip Euler

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0,\ x \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R},$$

prin schimbarea variabilei independente $t \to x = e^t$, se va obține ED

$$e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) + a\,e^{-t}\frac{dy}{dt} + b\,e^{-2t}y = 0, \text{ adică}$$

$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$, deci o ED din exemplul 1.

Observația 2. *Dacă* ED *de ordinul al doilea se scrie sub forma autoadjunctă* (2) *cu* $f = 0$ *atunci are loc egalitatea*

$$W[y_1, y_2](x) = \frac{c}{p(x)}, \tag{4}$$

cu $c \in \mathbb{R}$ *și* y_1, y_2 *soluții particulare ale acestei* ED, *avînd wronskianul* $W[y_1, y_2]$.

Într-adevăr, din formula Abel-Liouville (vezi punctul 1) rezultă $W[y_1, y_2](x) = c_1 \exp\left[-\int_{x_0}^{x}\left(\frac{p'}{p}\right)(t)\,dt\right] = c\,e^{-\ln p(x)} = \frac{c}{p(x)}$, $c = c_1 e^{\ln p(x_0)} = c_1 p(x_0)$.

În particular, dacă p este constantă, se deduce că wronskianul oricăror două soluții ale ED reduse $y'' - q(x)y = 0$, $q \in C^0(I)$ va fi constant.

Observația 3. *Din observația 2 se deduce egalitatea*

$$y_1y_2' - y_2y_1' = \frac{c}{p}; \tag{4'}$$

scriind y *în loc de* y_1, y_1 *în loc de* y_2 *și* c_2 *în loc de* c, *prin împărțire la* y_1^2 *rezultă* $\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{c_2}{py^2}$, *iar prin integrare se deduce*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{p(t)\, y_1(t)}, \tag{5}$$

egalitate care constituie soluția generală a ED $(py')' - qy = 0$, *în ipoteza că* y_1 *este o soluție particulară a ei. La același rezultat se ajunge cu înlocuirea* $y = y_1 z$ *și integrînd* ED *obținută pentru* z.

Observația 4. *Fie* y_1, y_2 *două soluții particulare ale* ED $(py')' - qy = 0$ *care verifică* (4′) *cu* $c \neq 0$; *pentru* t *fixat din* I *se va scrie*

$$y(x, t) = \frac{1}{c}\,[y_2(x)\, y_1(t) - y_2(t)\, y_1(x)] = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}.$$

Funcția $y(x, t)$ *are următoarele proprietăți*:

i. $$\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\, \frac{\partial y}{\partial x}\,(x, t)\right] - q(x)\, y(x, t) = 0$$

ii. $$y(x, t)\Big|_{t=x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}\quad (x, t)\ \Big|_{t=x} = \frac{1}{p(x)}$$

care se pot verifica imediat prin calcul.

Observația 5. *Dacă* $y(x, t)$ *este funcția considerată la observația* 4, *atunci definind* $y_p : I \to \mathbb{R}$ *prin*

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} y(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t, \quad x_0, \quad x \in I, \quad f \in C^0(I),$$

atunci y_p *va fi o soluție a* ED (2) *astfel încît* $y_p(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$.

Într-adevăr, folosind ii de la observația 4 avem:

$$y_p'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial y}{\partial x}\,(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t + y(x, t)\, f(t)\Big|_{t=x} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial y}{\partial x}\,(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t,$$

iar după înmulțirea cu $p(x)$ și încă o derivare în raport cu x, tot în baza lui ii, rezultă :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[p(x)\,y'_p(x)] = \int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\,\frac{\partial y}{\partial x}\,(x,t)\right]f(t)\,\mathrm{d}t + p(x)\,\frac{\partial y}{\partial x}\,(x,t)\,f(t)\right\}\Bigg|_{t=x} =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[p\,(x)\,\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right]f(t)\mathrm{d}t + f(x).$$

Prin urmare, se deduce :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[p(x)\,y'_p(x)] - q(x)y = \int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\,\frac{\partial y}{\partial x}\,(x,t)\right] - q(x)\,y(x,t)\right\}f(t)\,\mathrm{d}t + f(x) = f(x),$$

ultima egalitate fiind consecința lui i de la Observația 4.

În baza observației 5, soluția generală a ED (2) se va scrie, ținînd cont de forma lui $y(x,\,t)$:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = y_1(x)\left[c_1 - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} y_2(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\right] +$$

$$+\,y_2(x)\left[c_2 + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} y_1(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\right]. \qquad (6)$$

Fie acum $[a,\,b]$ un interval închis din I și să presupunem $x_0 = a$, $c_1 = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_a^b y_2(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$, $c_2 = 0$; din (6) rezultă :

$$y(x) = \frac{1}{c}\,y_1(x)\left[\int_a^b y_2(x)\,f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x y_2(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\right] +$$

$$+\frac{1}{c}\,y_2(x)\int_a^x y_1(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\,y_2(x)\int_a^x y_1(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t +$$

$$+\frac{1}{c}\,y_1(x)\int_x^b y_2(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Introducînd funcția $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c} y_1(t)\, y_2(x), & \text{pentru } a \leqslant t \leqslant x \leqslant b \\ \dfrac{1}{c} y_1(x)\, y_2(t), & \text{pentru } a \leqslant x \leqslant t \leqslant b \end{cases} \tag{7}$$

ultima egalitate se va transcrie sub forma simplă

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)\, f(t)\, dt. \tag{8}$$

Observația 7. Din (8) rezultă că dacă f nu este continuă pe $[a, b]$ ci doar integrabilă, totuși y va fi o funcție de clasă $C^1([a, b])$, dar nu va fi o soluție în sens clasic a ED (2).

3.2. Probleme la limită Sturm–Liouville

Această secțiune este una din cele mai importante din teoria ED de ordinul al doilea, avînd aplicații practice de o mare importanță.

Vom lua în discuție ED cu parametru :

$$[p(x)\, y']' - q(x)\, y + \lambda y = 0 \tag{9}$$

unde $p, p', q \in C^0([a, b])$, $p(x) > 0$, $x \in [a, b]$, iar $\lambda \in \mathbb{C}$ ($p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$).

Definiția 1. *Prin problemă Sturm-Liouville vom înțelege determinarea valorilor parametrului λ pentru care* ED (9) *admite soluții nebanale care satisfac și condițiile la limită omogene*

$$y(a) - k_1 y'(a) = 0, \; y(b) + k_2 y'(b) = 0 \tag{10}$$

unde $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0$ sînt dați. Aceste valori ale lui λ se vor numi valori (numere) proprii ale problemei (9), (10), *iar soluțiile corespunzătoare vor purta numele de funcții proprii ale problemei Sturm-Liouville considerate.*

Observația 8. *Condițiile* (10) *se scriu uneori și sub forma*

$$\begin{cases} u(a) \cos \alpha - p(a)\, u'(a) \sin \alpha = 0, \\ u(b) \cos \beta + p(b)\, u'(b) \sin \beta = 0 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \tag{10'}$$

deoarece comparînd (10) *cu* (10'), *cum $p(a)$ și $p(b)$ sînt cunoscuți și nenuli, se pot determina unghiurile α și β din relațiile*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1}{p(a)}, \; \operatorname{tg} \beta = \frac{k_2}{p(b)}.$$

Observația 9. *Valorile proprii ale problemei Sturm-Liouville* (9), (10) *dacă există sînt neapărat reale.*

Într-adevăr, dacă λy este o valoare proprie, $\lambda \in \mathbb{C}$, cu notația

$$Ly = -[p(x)y']' + q(x)y \tag{9'}$$

ED (9) se scrie $Ly = \lambda y$; utilizînd identitatea lui Green, deoarece aici $L^+ = L$, rezultă

$$\int_a^b (zLy - yLz)\,dx = p(b)[y(b)\,z'(b) - y'(b)\,z(b)] - \tag{11}$$

$$-p(a)[y(a)z'(a) - y'(a)\,z(a)].$$

Cum $\overline{Ly} = [p(x)\,\bar{y}']' - q(x)\bar{y} = L\bar{y}$, se deduce că odată cu y și $\bar{y}$ va fi o funcție proprie corespunzînd valorii proprii $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$, deci scriind (11) cu $z = \bar{y}$, va rezulta (deoarece $Lz = L\bar{y} = \lambda y$ și $y(b) = -k_2 y'(b)$, $\bar{y}(b) = -k_2\bar{y}'(b)$ etc.).

$$\int_a^b (\lambda y\bar{y} - \bar{\lambda}\bar{y}y)\,dx = 0 \text{ adică } (\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b |y(x)|^2\,dx = 0.$$

Cum y nu este nul în $[a, b]$ se deduce $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, deci $\bar{\lambda} = \lambda$, adică $\lambda \in \mathbb{R}$.

Din condițiile de la limită (10) sau (10') se deduc următoarele situații particulare:

i. *Condiții la limită omogene de primul tip*: $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ (pentru $k_1 = k_2 = 0$ în (10)),

ii. *Condiții la limită omogene de-al doilea tip*: $y'(a) = 0$, $y'(b) = 0$ $\left(\text{pentru } \alpha = \beta = \frac{\pi}{2} \text{ în (10')}\right)$,

iii. *Condiții la limită omogene de-al treilea tip*:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(b) = 0,\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

În afară de aceste condiții la limită în practică mai apar și:

iv. *Condiții la limită periodice*: $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

Observația 10. *Exceptînd condițiile la limită periodice* iv, *valorile proprii în condițiile la limită* i—iii *sînt simple* (adică la o valoare proprie corespunde o singură funcție proprie).

Într-adevăr, dacă valorii proprii λ i-ar corespunde două funcții proprii liniar independente y_1 și y_2 atunci soluția generală a ED (9) se va scrie $y = c_1y_1 + c_1y_2$; va rezulta $y(a) = 0$ (în cazul i) și impunînd condiția $y'(a) = 0$, în baza teoremei de existență și unicitate va rezulta soluția $y(x) = 0$, $x \in [a, b]$, deci y nu va fi o funcție proprie oricare ar fi constantele c_1 și c_2 ceea ce este contradictoriu cu ipotezele inițiale (pentru $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ avem $y = y_1 \neq 0$, pentru $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ avem $y = y_2 \neq 0$). Analog se tratează și

celelalte situații. În cazul condițiilor la limită periodice, cazul ED $y'' + y = 0$ arată că pentru $\lambda = n^2$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ rezultă soluțiile liniar independente $y_1(x) = \cos(nx)$, $y_2(x) = \sin(nx)$.

Pentru a rezolva problema existenței funcțiilor și valorilor proprii pentru problemele Sturm-Liouville vom lua în discuție doar condițiile la limită i, adică :

$$y(a) = 0,\ y(b) = 0 \tag{11}$$

și vom arăta cum se poate aplica teoria de la punctul 5 din cap. IV ; cu alte cuvinte, vom arăta că în spațiul $C_0^\infty([a, b])$ operatorul diferențial L definit prin (9′) este un operator coercitiv. Într-adevăr notînd

$$(u, v)_0 = \int_a^b u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x,\ (u, v)_1 = \int_a^b [u(x)\, v(x) + u'(x)\, v'(x)]\, \mathrm{d}x \tag{12}$$

cu $\varphi, \psi \in C_0^\infty([a, b])$, pentru $(L, \varphi, \psi)_0$ rezultă, integrînd prin părți și ținînd seama că termenul integrat este nul :

$$(L\varphi, \psi)_0 = \int_a^b \psi(x)\, (L\varphi)(x)\, \mathrm{d}x = -\int_a^b \psi(x)\, [p(x)\, \varphi'(x)]'\, \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_a^b q(x)\, \varphi(x)\, \psi(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b (p\varphi'\psi' + q\varphi\psi)\, \mathrm{d}x.$$

Notînd

$$B(\varphi, \psi) = \int_a^b (p\varphi'\psi' + q\varphi\psi)\, \mathrm{d}x \tag{13}$$

B va fi o formă biliniară pe $\mathring{H}_1 \times \mathring{H}_1 (\mathring{H}_1 = \mathring{H}_1([a, b]) = \{C_0^\infty([a, b])\}^-$ mărginită ($|B(\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\|_1 \|\psi\|_1$) și coercitivă :

$$B(\varphi, \varphi) = \int_a^b (p\varphi'^2 + q\varphi^2)\, \mathrm{d}x \geqslant \underline{p} \int_a^b \varphi'^2\, \mathrm{d}x + \underline{q} \int_a^b \varphi^2\, \mathrm{d}x =$$

$$= \underline{p}\, \|\varphi\|_1^2 + (\underline{q} - \underline{p})\, \|\varphi\|_0^2 = k_1 \|\varphi\|_1^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2,$$

unde $k_1 = \underline{p} = \inf_{x \in [a, b]} p(x) > 0$, $k_0 = \underline{p} - \underline{q}$, $\underline{q} = \inf_{x \in [a, b]} q(x)$. Faptul că se poate presupune $k_0 = 0$ rezultă direct din considerarea operatorului diferențial $L_1 = L + k_0$ în locul operatorului L (dacă $B(\varphi, \varphi) =$

$= (L, \varphi, \varphi)_0 \geqslant k_1 \|\varphi\|_1^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2$, va rezulta $B_1(\varphi, \varphi) = (L_1\varphi, \varphi)_0 = (L\varphi, \varphi)_0 + k_0 (\varphi, \varphi)_0 \geqslant (k_1 \|\varphi\|_1^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2) + k_0 \|\varphi\|_0^2 = k_1 \|\varphi\|_1^2$).

Prin urmare, în baza rezultatelor din punctul amintit, se deduce existența unei infinități numărabile de valori proprii reale simple $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, lui λ_n corespunzîndu-i o singură funcție proprie $y_n \in \mathring{H}_1[a, b]$); dar în baza observației 7 deoarece ED (9) se scrie sub forma

$$(py')' - qy = -\lambda y$$

va rezulta (pentru $\lambda = \lambda_n$, $y = y_n$, $n = 1, 2, \ldots$)

$$y_n(x) = -\lambda_n \int_a^b G(x, t)\, y_n(t)\, \mathrm{d}t. \tag{14}$$

Deoarece $y_n \in \mathring{H}_1([a, b])$, din (14) rezultă $y_n \in C^1([a, b])$; dar atunci se deduce $y_n \in C^2([a, b])$ deci funcțiile proprii vor fi soluții ale ED (9). Vom prezenta aceste rezultate sub forma următoarei teoreme:

Teorema 1. *Fie* $p(x) > 0$, $x \in [a, b]$, $p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$, $p', q \in C^0([a, b])$. *Atunci există un șir* $(\lambda_n)n \geqslant 1$ *strict crescător din* $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ *astfel încît problema Sturm-Liouville*

$$(py')' - qy + \lambda y = 0,\ y(a) = 0,\ y(b) = 0$$

admite soluții nebanale numai dacă $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$; *aceste soluții* (funcțiile proprii ale problemei în cauză) *formează un șir ortonormal în* $\mathring{H}_0([a, b])$, *complet în* $\mathring{H}_1([a, b])$, *adică, pentru orice* $f \in \mathring{H}_1([a,b])$ *seria Fourier* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f, y_n)_0\, y_n$ *converge în norma din* $\mathring{H}_1([a, b])$ *către* f, *iar* $\|f\|_0^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (f, y_n)_0^2$ *și* $B(f, f) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, y_n)_0^2$.

Observația 11. *Teorema* 1 *rămîne valabilă și în cazul* ED

$$(py')' - qy + \lambda ry = 0,\ r(x) > 0,\ x \in [a, b],\ r \in C^0([a, b])$$

cu condiția utilizării produsului scalar cu pondere r *în locul produsului scalar* $(f, g)_0 = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$, *adică dacă se folosește produsul scalar*

$$(f, g)_r = \int_a^b r(x)\, f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

În acest caz seria Fourier pentru $f \in \mathring{H}_1([a, b])$ se va scrie

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, y_n)_r \, y_n$$

și seria va converge în $\mathring{H}_1([a, b])$ către f.

Observația 12. *In cazul* ED *neomogene*

$$-Ly + \lambda y = f$$

soluția care verifică $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ *poate fi obținută sub forma unei serii* $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$; deoarece $Ly = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, Ly_n =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda y_n$ prin înlocuire se deduce $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda - \lambda_n) y_n = f$, adică $a_n = \dfrac{(f, y_n)_0}{\lambda - \lambda_n}$.

Soluția va exista (cel puțin formal) dacă λ nu este o valoare proprie pentru sistemul Sturm-Liouville $Ly = \lambda y$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ și va fi unic determinată. Dacă însă $\lambda = \lambda_{n_0}$, λ_{n_0} fiind o valoare proprie pentru sistemul Sturm-Liouville în cauză atunci sînt posibile două situații:

i. Soluția nu există (dacă $(f, y_{n_0})_0 \neq 0$)

ii. Soluția există, dar nu este unic determinată (dacă $(f, y_{n_2})_0 = 0$); această soluție se va scrie

$$y = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{(f, y_n)_0}{\lambda - \lambda_n} y_n + a_{n_0} y_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{(f, y_n)_0}{\lambda - \lambda_n} y_n$$

unde $a_{n_0} \in \mathbb{R}$ este arbitrar.

În ipoteze restrictive pentru f, se poate obține și convergența soluțiilor anterioare către f.

3.3. Metode speciale de integrare pentru ecuații diferențiale

Din teoria expusă pînă acum rezultă că se poate găsi soluția generală a ED sau SD numai în unele cazuri particulare (cazul coeficienților constanți și al ecuațiilor reductibile la acestea). În afară de posibilitatea determinării unor soluții ale ED sau SD prin serii de puteri, se mai pot imagina metode de integrare pentru ED bazate pe teoria transformărilor integrale; vom prezenta, pe scurt, o metodă de integrare a unor ED bazată pe teoria transformării Laplace, care din acest motiv se numește *metoda lui Laplace*.

Fie ED liniară

$$\sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j x) \, y^{(n-j)} = 0 \quad a_j, \; b_j \in \mathbb{C} \tag{15}$$

avînd coeficienții funcții polinomiale de gradul întîi; metoda lui Laplace constă în ipoteza că soluția se poate scrie sub forma unei integrale cu parametru de forma

$$y(x) = \int_{\gamma} S(p)\, e^{px}\, dp \tag{16}$$

unde x și p sînt variabile complexe, S fiind continuă pe γ, iar conturul de integrare γ se determină convenabil (se observă că forma (16) a soluției este asemănătoare cu formule lui Mellin de inversare în cazul transformării Laplace, diferența constînd în faptul că drumul de integrare nu este o dreaptă verticală în planul complex p).

Pentru ca (16) să verifice (15), deoarece $y^{(n-j)}(x) = \int_{\gamma} p^{n-j} S(p)\, e^{px}\, dx$

se deduce $\left(\text{deoarece } x\, e^{px} = \dfrac{\partial}{\partial p} e^{px}\right)$:

$$0 = \int_{\gamma} [F(p) + x\, G(p)]\, S(p)\, e^{px}\, dp = e^{px}\, G(p)\, S(p)\Big|_{\delta\gamma} +$$

$$\int_{\gamma} \left\{ -\frac{dp}{d} [G(p)\, S(p)] + F(p)\, S(p) \right\} e^{px}\, dp$$

unde

$$F(p) = \sum_{j=0}^{n} a_j p^{n-j},\ G(p) = \sum_{j=0}^{n} b^j p^{n-j} \tag{17}$$

termenul integrat fiind calculat la extremitățile drumului γ. Se alege drumul γ astfel încît la extremitățile sale să avem

$$G(p)\, S(p)\, e^{px}\Big|_{\delta\gamma} = 0, \tag{18}$$

iar funcția S se alege astfel încît să verifice ED de primul ordin

$$[G(p)\, S(p)]' = F(p)\, S(p)$$

(rezultă că S trebuie presupusă olomorfă într-un domeniu din planul complex p care conține drumul γ). Prin urmare,

$$S(p) = \frac{c}{G(p)} \exp\left[\int \frac{F(p)}{G(p)}\, dp \right] \tag{19}$$

cu $c \in \mathbb{C}$ și deci soluția căutată va fi

$$y(x) = c \int_{\gamma} \frac{1}{G(p)}\, e^{px + \int \frac{F(p)}{G(p)}\, dp}\, dp, \tag{20}$$

unde γ este determinat prin (18); schimbînd γ se va schimba și soluția.

Observația 13. S-a putut găsi soluția (20) sub formă explicită deoarece ED (15) are coeficienții funcții polinomiale de primul grad; dacă acești coeficienți erau funcții polinomiale de gradul al doilea, metoda pretindea integrarea unei ED de ordinul al doilea.

Această metodă va fi utilizată la punctul 4, în studiul funcțiilor Bessel; acum vom considera o aplicație a ei în teoria ecuației Hermite.

Exemplul 3. Fie ED

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0 \tag{21}$$

care, pentru $\nu \in \mathbb{N}$ admite soluția particulară $y_n(x) = H_n(x)$, unde H_n este polinomul Hermite de gradul n $\left(H_n(x) = a_n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),\ n = 0, 1, \ldots,\ a_0, a_1 \ldots \text{fiind constante}\right)$.

Cu notațiile anterioare avem:

$$F(p) = p^2 + 2\nu,\ G(p) = -2p,\ S(p) = -\frac{1}{2p}\exp\left[\int \frac{p^2 + 2\nu}{2p}\,dp\right] = -\frac{1}{2}\,p^{-\nu-1}e^{-\frac{1}{4}p^2};$$

scriind s în loc de $\frac{p}{2}$ se deduce reprezentarea integrală

$$y(x) = c\int_\gamma \frac{e^{-s^2+2sx}}{s^{\nu+1}}\,ds\Big|_{\delta\gamma}, \qquad c \in \mathbb{C}$$

drumul de integrare γ este astfel încît $\left.\frac{e^{-s^2+2sx}}{s^{\nu+1}}\right|_{\delta\gamma} = 0$.

Dacă $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ γ poate fi orice drum închis care ocolește originea și deci polinoamele Hermite admit reprezentarea integrală $\left(\text{cu } c = \frac{n!}{2\pi i}\right)$

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|s|=R} \frac{e^{-s^2+2xs}}{s^{n+1}}\,ds,$$

iar cu schimbarea de variabilă $s = t - x$, va rezulta

$$H_n(x) = \frac{n!\,e^{x^2}}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{-t^2}}{(t-x)^{n+1}}\,dt = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)},$$

adică formula lui Rodrigues pentru aceste polinoame.

4. Funcții Bessel

În acest punct ne vom ocupa de soluțiile ED,

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - \nu^2)\,w = 0, \tag{1}$$

numită *ecuația lui Bessel*; se observă că este o ED liniară și omogenă cu coeficienți funcții polinomiale, $z = 0$ fiind singurul punct singular la distanță finită al ED (1) (se va presupune variabila independentă $z \in \mathbb{C}$), iar w, dacă verifică ED (1), va fi o funcție olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ (seria de puteri care va defini soluția w va avea raza de convergență cel puțin egală cu $|z_0|$, dacă z_0 este punctul din $\mathbb{C}$ în care este centrată această serie de puteri).

Trebuie făcută însă observația că în practică sînt utilizate soluțiile ED (1) definite în vecinătatea originii, iar aceste soluții se numesc *funcții Bessel* sau *funcții cilindrice*.

Cu ajutorul transformării $w(z) \to z^\nu y(z)$, se deduce imediat că funcția y va verifica ED

$$zy'' + (2\nu + 1)\, y' + zy = 0 \tag{2}$$

care admite iarăși punctul $z = 0$ ca punct singular.

Observația 1. *Dacă* ED (2) *admite o soluție în vecinătatea originii atunci în mod obligatoriu* $y'(0) = 0$.

Într-adevăr, pentru $z = 0$, din (2) se deduce $(2\nu + 1)y'(0) = 0$ și deci pentru $\nu \neq -\frac{1}{2}$ neapărat $y'(0) = 0$; cum ν este un parametru arbitrar, condiția $\nu \neq -\frac{1}{2}$ este justificată.

Lema 1. *Dacă* ED (2) *admite o soluție de clasă* $\mathbb{C}^m$ *în vecinătatea originii, atunci are loc egalitatea*

$$y^{(m)}(0) = -\frac{n-1}{n+2\nu}\, y^{(n-2)}(0),\ n \leqslant m \tag{3}$$

Derivînd (2) de $n - 1$ ori (presupunînd y înlocuit prin soluția în cauză, cea ce face ca (2) să devină o identitate) se obține identitatea

$$zy^{(n+1)}(z) + (n-1)\, y^{(n)}(z) + (2\nu + 1)\, y^{(n)}(z) + zy^{(n-1)}(z) + (n-1)\, y^{(n-2)}(z) = 0$$

din care, pentru $z = 0$, se deduce (3).

Relația de recurență (3) combinată cu observația 1, arată că trebuie presupus n par; dacă n este impar, se va putea exprima $y^{(n)}(0)$ prin $y'(0)$ și cum legătura dintre $y^{(2k+1)}(0)$ și $y'(0)$ este liniară, se deduce $y^{(2k+1)}(0) = 0$.

Prin urmare, vom scrie $n = 2k$ în (3) obținîndu-se

$$y^{(2k)}(0) = -\frac{2k-1}{2(k+\nu)}\, y^{(2k-2)}(0). \tag{3'}$$

Scriind (3') succesiv pentru $k = 1, 2, \ldots$ rezultă imediat

$$y^{(2k)}(0) = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)}{2^k(k+\nu)(k+\nu-1)\ldots(\nu+1)} y(0)$$

adică, deoarece $\frac{\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} = (k+\nu)(k+\nu-1)\ldots(\nu+1)$,

$1 \cdot 3 \ldots (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$,

$$y^{2k}(0) = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)(2k)!}{2^{2k} k! \Gamma(k+\nu+1)} y(0) = \tag{4}$$

$$= \frac{(-1)^k (2k)! 2^\nu \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} \Gamma(k+\nu+1)} y(0).$$

Teorema 1. *Pentru* $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ED *Bessel* (1) *admite două soluții particulare liniar independente notate* J_ν *și* $J_{-\nu}$,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{5}$$

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu},$$

numite funcții Bessel de prima speță și de indice ν ($\nu \in \mathbb{C}$).

ED (2) fiind liniară și omogenă, o soluție a sa este unic determinată dacă se face abstracție de un factor constant multiplicativ ; scrind seria Taylor pentru o soluție a acestei ecuații, adică

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} z^n .$$

în baza lui (4), cu $y(0) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ se deduce seria de puteri $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^\nu \Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$ a cărei rază de convergență este $R = \infty$. Vom nota prin $J_\nu(z)\, z^{-\nu}$ funcția definită în $\mathbb{C}$ de această serie de puteri și va rezulta că J_ν verifică ED Bessel (în baza legăturii dintre ED (1) și (2)). Schimbînd în J_ν parametrul ν prin $-\nu$, se va obține din nou o soluție a ED (1) (deoarece această ecuație nu se modifică scriind $-\nu$ în loc de ν și teorema va fi demonstrată dacă se justifică liniar independența soluțiilor J_ν și $J_{-\nu}$. Pentru aceasta se utilizează teorema Abel—Liouville

care arată că neapărat $W[J_\nu, J_{-\nu}](z) = C(\nu)e^{-\int \frac{1}{z}dz} = \frac{C(\nu)}{z}$, deci wronskianul $W[J_\nu, J_{-\nu}]$ nu va conține decît puterea -1 pentru z; prin urmare

$$W[J_\nu, J_{-\nu}](z) = \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z) \\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} + \cdots & \frac{z^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)} + \cdots \\ \frac{\nu z^{\nu-1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} + \cdots & \frac{-\nu z^{-\nu-1}}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)} + \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\right].$$

(ceilalți termeni din determinant avînd puterile mai mari decît -1 se vor anula doi cîte doi; s-a utilizat identitatea $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Cum $\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu) = \frac{\pi}{\sin(-\pi\nu)}$ și $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)}$ rezultă $W[J_\nu, J_{-\nu}](z) = -\frac{2}{\pi z}\sin(\pi\nu)$, adică $C(\nu) = -\frac{2}{\pi\nu}\sin(\pi\nu)$; avem $C(\nu) \neq 0$, deci $W[J_\nu, J_{-\nu}] \neq 0$, dacă și numai dacă, $\pi\nu \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, deci dacă și numai dacă $\nu \neq \mathbb{Z}$.

Observația 2. *Din teorema 1 se deduce că funcțiile Bessel de prima speță sînt produsul dintre o funcție întreagă și funcția multivocă* $z^\nu = e^{\nu \ln z}$, *deci pentru* $z \neq 0$ *aceste funcții Bessel sînt funcții olomorfe.*

Observația 3. *Pentru* $\nu = n$, $n \in \mathbb{Z}$, *are loc egalitatea*

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

după cum se deduce direct din (5): în J_{-n} coeficienții lui $\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}$, $\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2}, \ldots, \left(\frac{z}{2}\right)^{0}$ sînt nuli deoarece $|\Gamma(0)| = |\Gamma(-1)| = \ldots = |\Gamma(-n)| = \infty$, deci seria lui J_{-n} începe de la $k = n$:

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n};$$

schimbînd k în $k+n$, însumarea va începe de la zero și se va obține (6).

Așadar, pentru $\nu \notin \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{C}$, orice funcție Bessel, notată C_ν se va putea scrie sub forma

$$C_\nu = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}, \quad \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \; c_1, \; c_2 \in \mathbb{C} \tag{7}$$

unde c_1 și c_2 pot depinde de ν, dar nu depind de z.

Lema 2. *Funcțiile Bessel J_ν și $J_{-\nu}$ verifică următoarele relații de recurență* :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu J_\nu(z)] = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\nu} J_\nu(z)] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \tag{8}$$

Vom justifica a doua relație (8), prima demonstrîndu-se în mod similar ; din (5) avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\nu} J_\nu(z)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2k z^{2k-1}}{2^{2k}\, k\Gamma(k)\,\Gamma(k+\nu+1)},$$

derivarea termen cu termen fiind permisă, seria de puteri avînd raza de convergență infinită. Schimbînd indicele de însumare din k în $k+1$ se obține :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\nu} J_\nu(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1} = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z).$$

Propoziția 1. *Funcțiile Bessel de speța întîi de indice semiîntreg* $\left(\nu = n + \frac{1}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right)$ *sînt funcții elementare.*

Avem :

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \quad J_{\frac{3}{2}}(z) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right), \quad J_{-\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\cos z}{z} + \sin z\right)$$

și $J_{-\frac{5}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\sin z - \frac{3}{z}\cos z\right]$, $J_{-\frac{5}{2}}(z) =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\cos z + 3\frac{\sin z}{z}\right] \text{ etc.}$$

Este suficient să-l determinăm pe $J_{-\frac{1}{2}}$ pentru că ceilalți se deduc succesiv cu ajutorul relațiilor de recurență (8) ; or din ED (2), pentru $\nu = -\frac{1}{2}$ se obține ED $y'' + y = 0$, deci $y(z) = c_1 \cos z + c_2 \sin z$. Revenind la ED Bessel (1). se deduce :

$$C_{\frac{1}{2}}(z) = c_1\frac{\cos z}{\sqrt{z}} + c_2\frac{\sin z}{\sqrt{z}},$$

în baza definiției prin serii de puteri a funcțiilor cos și sin ; prin comparație cu funcțiile Bessel (5) rezultă formele prescrise pentru $J_{-\frac{1}{2}}$ și $J_{\frac{1}{2}}$ ($C_{\frac{1}{2}} = c_1 J_{\frac{1}{2}} + c_2 J_{-\frac{1}{2}}$).

Lema 3. (*funcția generatoare a funcțiilor Bessel de primă speță*). *Funcția* $K : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $K(z, t) = e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}$ *dezvoltată în serie Laurent în vecinătatea lui* $t = 0$ *se scrie*

$$K(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, t^n. \tag{9}$$

Într-adevăr,

$$K(z, t) = e^{\frac{zt}{2}} \cdot e^{-\frac{z}{2t}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j t^j}{2^j j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{2^k k!\, t^k}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{j+k} \cdot t^{j-k}}{2^{j+k} j!\, k!} \; ;$$

punînd $j = n + k$ se obține coeficientul lui t^n, care este dat de seria $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+n}}{2^{2k+n} k!(n+k)!}$, deci coincide în baza teoremei 1 cu $J_n(z)$.

Consecința 1. *Pentru* $t = \operatorname{cis}(x) = e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$ *se deduce identitatea*

$$e^{iz \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \cdot e^{inx},$$

care reprezintă dezvoltarea în serie Fourier — trigonometrică bilaterală a funcției cis ($z \sin x$).
Din teoria seriilor trigonometrice se deduce direct

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin x - inx}\, dx$$

obținîndu-se astfel

Consecința 2. *Funcțiile Bessel de prima speță și de indice întreg* n *admit reprezentarea integrală*

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z \sin x - nx)}\, dz = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} \cos(z \sin x - nx)\, dx,$$

$z \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *numită formula integrală Bessel* (ultima egalitate se obține în baza formulei lui Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$ ținînd cont că funcția sinus este impară).

Înlocuind în identitatea $e^{iz\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, e^{inx}$ x prin $\frac{\pi}{2} - x$ rezultă dezvoltarea în serie Laurent a funcției $e^{iz\cos x}$:

$$e^{iz\cos x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, e^{in\frac{\pi}{2}}\, e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z)\, e^{-inx};$$

în baza teoriei seriilor Fourier — trigonometrice, rezultă o nouă formulă integrală pentru J_n :

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i^n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos x + ixn}\, dx = \frac{1}{\pi i^n}\int_{0}^{\pi} \cos(nx + z\cos x)\, dx$$

În baza relației $J_{-n} = (-1)^n J_n$, vom avea formulele

$$e^{iz\sin x} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [e^{inx} + (-1)^n e^{-inx}] J_n(x),$$

$$e^{iz\cos x} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [i^n\, e^{-inx} + (-i)^{-n} e^{inx}] J_n(x)$$

din care, presupunînd z real, prin separarea părților reale și imaginare, rezultă

$$\cos(z\sin x) = J_0(z) + 2J_2(z)\cos(2x) + 2J_4(z)\cos(4x) + \ldots$$

$$\sin(z\sin x) = 2J_1(z)\sin x + 2J_3(z)\sin(3x) + 2J_5(z)\sin(5x) + \ldots$$

$$\cos(z\cos x) = J_0(z) - 2J_2(z)\cos(2x) + 2J_4(z)\cos(4x) + \ldots$$

$$\sin(z\cos x) = 2J_1(z)\cos x - 2J_3(z)\cos(3x) + 2J_5(z)\cos(5x) + \ldots$$

identități care rămîn valabile și pentru $z \in \mathbb{C}$.

4.2. Funcții Bessel de speța a doua

În secțiunea anterioară s-a dedus soluția generală a ecuației Bessel în ipoteza $\nu \notin \mathbb{Z}$; dacă $\nu \in \mathbb{Z}$, funcțiile J_ν și $J_{-\nu}$ sînt liniar dependente și deci ED Bessel va admite o singură soluție și anume (scriind n în loc de ν) :

$$J_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}. \qquad (10)$$

Această funcție este definită pentru $n \geqslant 0$ (cazul $n < 0$ reducîndu-se, în baza observației 3, la acest caz) și este evident o funcție întreagă ;

o soluție liniar independentă de soluția (10) a ED Bessel (1) se poate obține căutînd-o sub forma

$$w = J_n u$$

ceea ce, după calcule simple, conduce la soluția

$$C_n(z) = c_1 J_n(z) + c_2 J_n(z) \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}t}{t J_n^2(t)}. \tag{11}$$

După calcule în (11) se poate arăta că a doua soluție a ED Bessel liniar independentă de J_n se scrie sub forma:

$$Y_n(z) = J_n(z) \ln z - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-j)}{\Gamma(j+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j-n} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)} [\varphi(k) - \varphi(n+k)], \tag{12}$$

unde $\varphi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$, $\varphi(0) = 0$.

În particular

$$Y_0(z) = J_0(z) \ln z + \frac{z^2}{2^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} +$$

$$+ \frac{z^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots .$$

Definiția 1. *Funcția Y_n definită prin (12), $n = 0, 1, 2, \ldots$ se numește funcție Neumann sau funcție Bessel de speța a doua și de indice întreg n.*

Prin urmare, dacă $n = 0, 1, 2 \ldots$ soluția generală a ED Bessel

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - n^2) w = 0$$

se scrie sub forma

$$C_n(z) = A J_n(z) + B Y_n(z), \tag{11'}$$

unde A și B nu depind de z (dar pot depinde de n).

Lema 4. *Singurele funcții care verifică relațiile de recurență (8) sînt funcțiile Bessel C_ν.*

Scriind identitățile (8) sub forma :

$$(z^{\nu} w_{\nu})' = z^{\nu} w_{\nu-1}, \ (z^{-\nu} w_{\nu})' = -z^{-\nu} w_{\nu+1}$$

din prima relație se deduce $(z^{\nu+1} w_{\nu+1})' = z^{\nu+1} w_{\nu}$ și înlocuind $w_{\nu+1}$ din a doua relație, rezultă pentru w chiar ecuația Beseel (1).

Consecința 3. *Funcția Bessel de speța doua* Y_n *definită prin* (12) *verifică aceleași relații de recurență ca și funcțiile Bessel de speța întîi* (5).

Lema 5. *ED de forma*

$$x^2 y'' + ax\, y' + (b + cx^{\alpha}) y = 0, \ a, \ b, \ c, \ \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),$$

cu $c \neq 0$, $\alpha \neq 0$ *admite soluție* $y = z^{\lambda} C_{\nu}(z)$, $\nu^2 = \lambda^2 - b\mu^2$, *numerele* λ *și* μ *determinîndu-se din relațiile*

$$\alpha\mu = 2, \ c\mu^2 k^{\alpha} = 1, \ 2\lambda + (a-1)\mu = 0 \tag{14}$$

iar

$$x = kz^{\mu}, \ y = z^{\lambda} w(z). \tag{15}$$

Efectuînd transformările (15) în ED (13), deoarece

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{k\mu z^{\mu-1}} \frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{1}{k\mu z^{\mu-1}} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{k\mu z^{\mu-1}} \frac{dy}{dz} \right),$$ după înlocuirea lui y prin zw, se deduce ED

$$z^2 w'' + z[2\lambda + (a-1)\mu + 1]w' + [c\mu^2 k^{\alpha} z^{\mu\alpha} + (a-1)\mu\lambda + b\mu^2 + \lambda^2]w = 0$$

care coincide cu ED Bessel dacă se verifică (14)

Exemple 1. ED

$$x^2 y'' - 2xy' + 4(x^4 - 1)y = 0$$

are soluția generală $y = x^{\frac{3}{2}} C_{\frac{5}{4}}(x^2)$, deoarece aici $a = -2$, $b = -4$, $c = 4$, $\alpha = 4$, adică $\mu = \frac{1}{2}$, $k = 1$, $\lambda = \frac{3}{4}$, $\nu^2 = \frac{25}{16}$; se efectuează deci transformările $x = z^{\frac{1}{2}}$, $y = z^{\frac{3}{4}} w(z)$, iar $z = x^2$ (aici $C_{\frac{5}{4}} = A J_{\frac{5}{4}} + B J_{-\frac{5}{4}}$

2 ED

$$xy'' + \frac{1}{2} y' + \frac{1}{4} y = 0$$

admite soluția generală $y = x^{\frac{1}{4}} C_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$; în acest caz $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{4}$, $\alpha = 1$ deci $\mu = 2$, $k = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\nu^2 = \frac{1}{2}$, iar $C_{\frac{1}{2}} = A J_{\frac{1}{2}} + B J_{-\frac{1}{2}}$.

3. ED

$$y'' + \frac{1}{3} xy = 0$$

numită *ecuația lui Airy* are soluția generală $y = \sqrt{x}\, C_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} x^{\frac{3}{2}}\right)$ deoarece aici $a = 0$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$, $\alpha = 3$ (ecuația trebuie în prealabil înmulțită cu x^2); se deduce

$$\mu = \frac{2}{3},\ k^3 = \frac{27}{4},\ \lambda = \frac{1}{3},\ \nu^2 = \frac{1}{9},\ \text{iar } C_{\frac{1}{3}}(z) = AJ_{\frac{1}{3}}(z) + BJ_{-\frac{1}{3}}(z).$$

4. ED

$$xy'' + y = 0$$

admite soluția generală $y = \sqrt{x}\, C_1(2\sqrt{x})$, $C_1 = AJ_1 + BY_1$, deoarece aici $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, $\alpha = 1$, rezultînd în baza lemei 5, $\mu = 2$, $k = \frac{1}{4}$, $\lambda = 1$, $\nu^2 = 1$. Transformarea care aduce ED dată la ED Bessel va fi $x = \frac{1}{4} z^2$, $y = zw(z)$, deci $z = 2\sqrt{x}$

5. ED

$y'' + Ay = 0$, $A \in \mathbb{R}$ este de forma ED (13) cu $a = 0$, $b = 0$, $c = A$, $\alpha = 2$ și deci se poate justifica propoziția 2 utilizînd lema 5.

Cu ajutorul lemei 5, se deduce posibilitatea determinării soluției generale a unor clase de ED, soluțiile acestor ED se vor presupune deci cunoscute din momentul în care sînt studiate soluțiile ED Bessel; deoarece ED de forma (13) apar frecvent în practică, uneori se studiază separat și alte tipuri de funcții Bessel în afara funcțiilor J_ν și Y_ν.

4.3. Funcții Bessel modificate. Funcții Hankel

Funcțiile Bessel studiate anterior au o proprietate importantă și anume: pentru $z = x > 0$ și ν real, funcțiile Bessel au valori reale, ceea ce se poate justifica ușor luînd în considerație relațiile (5) și (12) în care seriile de puteri au coeficienții reali, iar funcția $x^\nu = e^{\nu \ln x}$ este de asemenea reală.

Cu substituția $x = it$, i fiind unitatea imaginară, se deduce

$$J_\nu(it) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(t)$$

și deci funcția

$$I_\nu(t) = \mathrm{i}^{-\nu} J_\nu(\mathrm{i}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{16}$$

va avea iarăși valori reale pentru $t > 0$ și ν real

Definiția 2. *Funcția I_ν definită prin* (16) *se numește funcție Bessel de speța întîi de indice ν și de argument imaginar sau funcție Bessel modificată de speța întîi.*

Avînd în vedere modul în care s-a obținut funcția Bessel modificată I_ν, se deduce că aceasta va verifica ED

$$t^2 y'' + ty' - (t^2 + \nu^2)y = 0\,; \tag{17}$$

dacă $\nu \in \mathbb{Z}$ a doua soluție a acestei ED va fi evident funcția $I_{-\nu}$, unde

$$I_{-\nu}(t) = \mathrm{i}^{\nu}\ I_{-\nu}(\mathrm{i}t), \text{ iar} \tag{16'}$$

soluția generală a ED (17) va fi

$$y = c_1\ I_\nu(t) + c_2 I_{-\nu}(t),\ \ \nu \notin \mathbb{Z} \tag{18}$$

(soluția (18) va fi valabilă și pentru $t \in \mathbb{C}$, dar practic se utilizează numai pentru $t \in \mathbb{R}$).

Pentru $\nu \in \mathbb{Z}$ din (16') și (6) rezultă, punînd $\nu = n$:

$$I_{-n}(t) = \mathrm{i}^n J_{-n}(\mathrm{i}t) = \mathrm{i}^n (-1)^n J_n(\mathrm{i}t) = (-\mathrm{i})^n J_{-n}(\mathrm{i}t) = I_n(t),$$

și de aceea folosind rezultatele din secțiunea 4.2 se va defini funcția Bessel de speța a doua, de indice ν și de argument imaginar notată K_n prin

$$K_n(t) = (-1)^{n+1} I_n(t) \ln\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j (n-j-1)!}{j!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j-n} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k) - \psi(k+n)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}, \tag{19}$$

unde $\psi(r) = \varphi(r) - \gamma = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} [\ln \Gamma(z)]\Big|_{z=r}$, $\gamma = 0{,}5772$ (constanta lui Euler), φ fiind definită anterior ; vom avea $K_{-n} = K_n$

Definiția 3. *Prin funcțiile Bessel de speța a treia sau funcțiile lui Hankel se înțeleg funcțiile Bessel $H_\nu^{(1)}$ și $H_\nu^{(2)}$ definite prin*

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + \mathrm{i}Y_\nu,\ H_\nu^{(2)} = J_\nu - \mathrm{i}Y_\nu$$

unde Y_ν *se definește prin*

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}, \quad \nu \in \mathbb{C}.$$

Evident, $H_\nu^{(1)}$ și $H_\nu^{(2)}$ sînt funcții Bes el (fiind combinații liniare de funcții Bessel, iar $W[H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}](z) \neq 0$; se poate arăta că pentru $\nu \to n$, funcția Y_ν definită mai sus va coincide cu funcția definită în secțiunea anterioară. Nu vom insista asupra funcțiilor Hankel, ele fiind utilizate în practică datorită comportării lor simple cînd $|z| \to \infty$; deoarece funcțiile $H_\nu^{(1)}$ și $H_\nu^{(2)}$ sînt liniar independente, este posibil să se scrie funcțiile cilindrice și sub forma

$$C_\nu = \alpha H_\nu^{(1)} + \beta H_\nu^{(2)},$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ putînd depinde de ν.

4.4. Reprezentări integrale pentru funcții Bessel

Anterior, în secțiunea 4.1. s-a obținut reprezentarea integrală Bessel pentru funcția J_n, $n \neq 0, 1, 2, \ldots$ (vezi Consecința 2); alte reprezentări integrale se pot obține prin utilizarea metodei lui Laplace (vezi punctul 3) considerînd ecuația (2). În notațiile din punctul 3 avem:

$$F(p) = (2\nu + 1)p, \; G(p) = 1 + p^2, \; S(p) = A\,(1 + p^2)^{\nu - \frac{1}{2}}, \; A \in \mathbb{C}$$

și deci, cu $A = 1$, vom obține o funcție Bessel C_ν^* sub forma:

$$C_\nu^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma p^{-\nu-1}\, e^{\frac{1}{2}z\left(p - \frac{1}{p}\right)}\, dp, \quad \mathrm{Re}\, z > 0 \tag{20}$$

unde γ este conturul din Fig. V.1, integrala din (20) fiind convergentă (cînd $|p| \to \infty$, $\mathrm{Re}\, p < 0$), deoarece $\mathrm{Re}\, z > 0$. Comparînd (20) cu coeficienții dezvoltării Laurent (9) adică

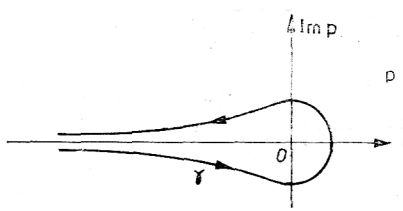

Fig. V.1

$$(20')\; J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma K(z,t)\, t^{-n-1}\, dt$$

unde $K(z, t) =$

$= \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]$ se deduce $C_\nu^*(z) = J_\nu(z)$, $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Observația 4. În (20′) γ este un contur simplu care ocolește originea din planul t, care însă este omotop cu conturul din Fig. V.1. în baza condiției $\operatorname{Re} z > 0$.
Fie acum z real și pozitiv și să efectuăm în integrala

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma p^{-\nu-1}\ e^{\frac{1}{2}z\left(p-\frac{1}{p}\right)}\ dp \tag{21}$$

schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{2}pz$, $dp = \frac{2}{z}dt$; rezultă

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{2\pi i}\int_\gamma t^{-\nu-1}\ e^{t-\frac{z^2}{4t}}\ dt, \tag{21′}$$

conturul de integrare nemodificîndu-se deoarece z este real. Se deduce utilizînd teoria integralelor cu parametru că integrala din (21′) definește o funcție întreagă (deoarece integrandul este o funcție diferențiabilă în z pe γ, iar după derivare în raport cu z se va obține o integrală improprie uniform convergentă), deci J_ν va avea o singularitate în origine (datorită factorului z^ν) și nu va mai avea alte singularități : originea va fi un punct de ramificare pentru J_ν și deci cu o tăietură de-a lungul axei reale negative (deci presupunînd $(-\pi < \arg z < \pi)$ prin (21′) se va obține o funcție definită în planul $\mathbb{C}$.

Observația 5. Deoarece $e^{t-\frac{z^2}{4t}} = e^t \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} = e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k!\,2^{2k}\,t^k}$,

din (21′) se deduce

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{k!\,2^{2k}}\int_\gamma e^t\ t^{-\nu-k-1}\ dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\ \Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu},$$

deoarece $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma t^{-z-1}\ e^t\ dt$

(vezi punctul 8, cap. III) confirmîndu-se în baza lui (5), faptul că integrala (20) definește funcția Bessel J_ν.

Observația 6. Presupunînd inițial $\operatorname{Re} z > 0$ și utilizînd apoi procedeul de prelungire a relațiilor în $\mathbb{C}$ (cu excepția eventuală a punctelor de pe axa reală negativă), prin derivare sub semnul integral în (20), se deduce :

$$J'_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) p^{-\nu-1} e^{-\frac{z}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)}\, dp =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma p^{-\nu} e^{-\frac{1}{2}z\left(p-\frac{1}{p}\right)}\, dp - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma p^{-\nu-2} e^{-\frac{z}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)}\, dp =$$

$$= \frac{1}{2}\left[J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)\right]$$

obținîndu-se o relație de recurență pentru funcțiile Bessel $J_{\nu-1}$, J_ν și $J_{\nu+1}$.

Integrînd prin părți, rezultă :

$$\nu J_\nu(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (p^{-\nu})' e^{\frac{1}{2}z\left(p-\frac{1}{p}\right)}\, dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) p^{-\nu} e^{\frac{z}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)}\,\frac{z}{2}\, dp = \frac{1}{2} z J_{\nu+1}(z) + \frac{1}{2} z J_{\nu-1}(z),$$

obținîndu-se o nouă relație de recurență pentru aceleași funcții Bessel ca și în cazul anterior.

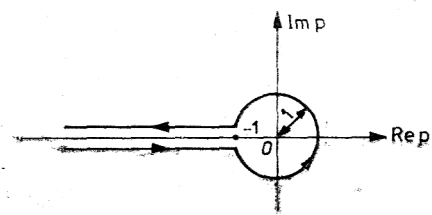

Fig. V.2

Prin eliminarea funcției $J_{\nu+1}$ sau a funcției $J_{\nu-1}$, rezultă relațiile de recurență deduse anterior (vezi (8)).

Modificînd acum conturul γ din Fig. V.1 în conturul γ_1 din Fig. V.2, integrala (20), va trebui calculată atît pe cercul unitate (deci $p = e^{i\theta}$) cît și pe cele două semidrepte (deci $p = x$, $x < -1$). Pe cercul unitate rezultă integrala

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\nu\theta + iz\sin\theta}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\nu\theta - z\sin\theta)\, d\theta$$

utilizînd formula lui Euler; pe semidreapta inferioară avem $z = x$, $\arg z = -\pi$, $x < -1$ (vom efectua schimbarea de variabilă $p = e^{s-i\pi}$ $dp = e^{s-ip}\,ds$, $s > 0$), iar pe semidreapta superioară $z = x$, $\arg z = \pi$, $x < -1$ (vom efectua schimbarea de variabilă $p = e^{s+i\pi}$, $s > 0$) rezultînd integralele

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{0} e^{-\nu s + i\pi\nu} e^{-\frac{1}{2}z(e^s - e^{-s})}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} e^{-\nu s - i\pi\nu} e^{\frac{z}{2}(e^s - e^{-s})}\,ds =$$

$$= -\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-z\,\mathrm{sh}\,s - \nu s}\,ds.$$

aşadar,

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\theta - \nu\theta)\,d\theta - \tag{22}$$

$$-\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,s - \nu s}\,ds, \quad \mathrm{Re}\,z > 0$$

obţinîndu-se o reprezentare integrală pentru funcţia Bessel J_ν; comparînd cu reprezentarea integrală pentru funcţia Bessel J_n se observă că pentru ν întreg avem $\sin(\pi\nu) = 0$ regăsind formula dedusă în consecinţa 2. Vom conveni să denumim formula (22) *reprezentarea integrală Bessel* pentru funcţia J_ν, $\nu \in \mathbb{C}$.

În afară de reprezentarea integrală Bessel pentru J_ν este utilă şi o altă reprezentare integrală a acestei funcţii datorată lui Poisson.

Lema 6. (*reprezentarea integrală Poisson pentru* J_ν). *Dacă* $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$ *atunci are loc egalitatea*

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,2^\nu\,\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1 - s^2)^{\nu - \frac{1}{2}}\cos(zs)\,ds, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{23}$$

Vom aplica transformarea Fourier ED (2); deoarece $\widehat{(xy'')}(s) = is^2\hat{y}'(s) + 2is\hat{y}(s)$, $\widehat{(\hat{y}')}(s) = -is\hat{y}(s)$, $\widehat{(xy)}(s) = -i(\hat{y}'s)$ rezultă ED simplă $(s^2 - 1)\,\hat{y}'(s) - (2\nu - 1)\,s\hat{y}(s) = 0$; prin integrare se deduce $\hat{y}(s) = c(\nu)\,(s^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}$. Deoarece funcţia $(s \in \mathbb{R})$

$$f_\nu(s) = \begin{cases} c(\nu)\,(1 - s^2)^{\nu - \frac{1}{2}} & \text{pentru } |s| < 1 \\ 0 & \text{pentru } |s| > 1 \end{cases}$$

verifică ED $(s^2-1)\,\hat{y}' - (2\nu-1)\,s\hat{y} = 0$, pentru $|s|<1$ și $|s|>1$, iar $f_\nu \in L_1(\mathbb{R})$ dacă $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, va exista transformarea Fourier inversă pentru f_ν, care va fi o soluție particulară pentru ED (2). Ținînd cont de legătura dintre ED (2) și ecuația Bessel avem

$$\tilde{C}_\nu(z) = z^\nu \int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(s)\, e^{-izs}\, ds = c(\nu)\, z^\nu \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, e^{-izs}\, ds,$$

unde $\tilde{C}_\nu$ este o funcție Bessel : deoarece $e^{-izs} = \cos(zs) - i\sin(zs)$, iar $\sin(zs)$ este o funcție impară, rezultă

$$\tilde{C}_\nu(z) = 2c(\nu)\, z^\nu \int_0^1 (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zs)\, ds.$$

Scriind dezvoltarea în serie pentru funcția cos se deduce

$$\tilde{C}_\nu(z) = 2c(\nu)\, z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 s^{2k}(1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, ds =$$

$$= \sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) 2^\nu c(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

pentru că $\int_0^1 s^{2k}(1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, ds = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{k-\frac{1}{2}}(1-t)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2} B\left(k+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(k+\nu+1)},\ \text{iar}\ \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\ ;\ \text{luînd}\ c(\nu) = \frac{1}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

se obține $\tilde{C}_\nu = J_\nu$ ceea ce coincide cu egalitatea (23).

Observația 7. Reprezentarea integrală Poisson este utilă practic deoarece funcțiile Bessel J_ν, cu $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, pot fi interpretate ca transformate Fourier, înmulțite cu z^ν ale unor funcții din L_1 sau L_2 și vor avea proprietățile acestor transformate; astfel, funcția $z^{-\nu}J_\nu(z)$ va tinde la zero cînd $|z| \to \infty$, cel puțin pentru $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$, iar $z^{-\nu}J_\nu(z) \in L_2(\mathbb{R})$.

Funcțiile Bessel J_ν posedă o proprietate importantă asemănătoare cu aceea a funcțiilor trigonometrice sin și cos; astfel, plecînd de la transformarea Fourier a funcțiilor (distribuțiilor), dacă f este definită pe semiaxa $\mathbb{R}_+$, atunci prelungind f la $\mathbb{R}$ astfel încît $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie o funcție pară ($f(-x) = f(x)$), se deduc relațiile

$$\hat{f}_c(y) = \int_0^\infty f(x) \cos(xy)\, dx,\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}_c(y) \cos(xy)\, dy$$

în care $\hat{f}_c$ este transformarea Fourier prin cosinus a funcției f. Prelungind f la $\mathbb{R}$, astfel încît f să fie funcție impară pe $\mathbb{R}$, se deduc formulele transformării Fourier prin sinus a aceleiași funcții :

$$\hat{f}_s(y) = \int_0^\infty f(x) \sin(xy)\, dx,\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{f}_s(y) \sin(xy)\, dy.$$

În cazul funcțiilor Bessel de prima speță și de indice ν considerînd funcțiile $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ pentru care integrala improprie cu parametru $\int_0^\infty f(x) J_\nu(xy) x\, dx$ este convergentă, se notează

$$F_\nu(y) = \int_0^\infty f(x) J_\nu(xy)\, x\, dx, \tag{24}$$

rezultînd formula inversă

$$f(x) = \int_0^\infty F_\nu(y)\, J_\nu(xy)\, y\, dy. \tag{24'}$$

Definiția 4. *Funcția F_ν definită prin* (24) *se numește transformarea Hankel a funcției f iar relația* (24') *constituie transformarea Hankel inversă asociată lui* (24); *funcțiile f și F_ν definite prin* (24) *și* (24') *formează o pereche de transformate Hankel.*

Rămîne de justificat relația (24'), dacă F este definit prin (24); vom realiza această în cazul particular $\nu = n \in \mathbb{Z}$, utilizînd transformarea Fourier din $\mathbb{R}^2$; astfel dacă

$$\hat{f}(y_1, y_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) e^{i(x_1 y_1 + x_2 y_2)}\, dx_1 \wedge dx_2 \tag{25}$$

avem

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}_2} f(y_1, y_2)\, e^{-i(x_1y_1 + x_2y_2)}\, dy_1 \wedge dy_2, \qquad (25')$$

în ipotezele obișnuite asupra lui f (vezi 7.1 din cap. IV). Trecînd în (25) și (25′) la sistemul polar de coordonate $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $dx_1 \wedge dx_2 = r\,dr \wedge d\theta$, $y_1 = \rho\cos\varphi$, $y_2 = \rho\sin\varphi$, $dy_1 \wedge dy_2 = \rho d\rho \wedge d\varphi$, rezultă

$$\hat{f}(\rho, \varphi) = \int_0^{\infty} r \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\, e^{i\rho r\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta \right] dr. \qquad (26)$$

$$f(r, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \rho \left[\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\rho, \varphi)\, e^{-i r\rho\cos(\theta - \varphi)}\, d\varphi \right] d\rho. \qquad (26')$$

Scriind dezvoltarea în serie Fourier — trigonometrică pentru f și $\hat{f}$ adică

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r)\, e^{in\theta}, \quad \hat{f}(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\rho)\, e^{in\varphi},$$

unde

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta, \quad b_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\rho, \varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi, \; n \in \mathbb{Z}$$

prin înlocuire în (26) rezultă

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\rho)\, e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} a_n(r)\, r \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[r\rho\cos(\theta - \varphi) + n(\theta - \varphi)]}\, d\theta \right] dr.$$

În baza formulei integrale Bessel (vezi secțiunea 4.4) rezultă

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i[r\rho\cos(\theta - \varphi) + n(\theta - \varphi)]}\, d\theta = 2\pi i^n J_n(r\rho)$$

sau egalînd coeficienții lui $e^{in\varphi}$ din ambii membri

$$b_n(\rho) = 2\pi i^n \int_0^{\infty} r a_n(r)\, J_n(r\rho)\, dr; \qquad (27)$$

aceleași calcule realizate în cazul egalității (26′) conduc la egalitatea

$$a_n(r) = \frac{\mathrm{i}^n}{2\pi}\int_0^\infty \rho b_n(\rho)\, J_n(-r\rho)\,\mathrm{d}\rho = \frac{(-\mathrm{i})^n}{2\pi}\int_0^\infty \rho b_n(\rho)\, J_n(r\rho)\,\mathrm{d}\rho. \quad (27')$$

Scriind în (27) f în loc de $2\pi \mathrm{i}^n a_n$, rezultă $b_n = F_\nu$ $(\nu = n)$ (în baza lui (24′)), iar din (27) se deduce exact egalitatea (24′).

Observația 8. Uneori transformarea Hankel directă (24) și cea inversă (24′) se scriu sub forma

$$F_\nu(y) = \int_0^\infty \sqrt{xy}\, J_\nu(xy)\, f(x)\,\mathrm{d}x \quad (28)$$

respectiv

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{xy}\, J_\nu(xy)\, F_\nu(y)\,\mathrm{d}y, \quad (28')$$

care rezultă din (24), respectiv (24′), înlocuind $f(x)$ prin $\sqrt{x} f(x)$ și $F_\nu(y)$ prin $\sqrt{y} F_\nu(y)$.

Observația 9. Formulele (24) și (24′) rămîn valabile pentru orice funcție Bessel de prima speță și de indice ν dacă se presupune f integrabilă pe $\mathbb{R}_+$ și avînd un număr finit de discontinuități de tip salt; dacă x este un punct de salt, f se presupune standardizată în acest punct, adică $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$. Acest fapt se deduce din teoria seriilor trigonometrice pentru $\nu = n$ și se poate justifica în celelalte cazuri (nu insistăm aici asupra acestei demonstrații).

Observația 10. Din formulele (24) și (24′) sau (28) și (28′) se deduce că atît transformarea Hankel directă cît și cea inversă au aceeași formă; de aceea, notînd $F_\nu = H_\nu f$, avem $f = H_\nu^{-1} F_\nu$, iar $H_\nu^{-1} = H_\nu$.

Vom prezenta cîteva proprietăți ale transformării Hankel (24) sub forma următoarei teoreme:

Teorema 2.i. *Dacă F_ν este transformarea Hankel a funcției f, iar f este derivabilă și există transformarea Hankel a derivatei f' atunci notînd cu G_ν transformarea Hankel a funcției $g = f'$, avem*

$$G_\nu(y) = -y\left[\frac{\nu+1}{2\nu} F_{\nu-1}(y) - \frac{\nu-1}{2\nu} F_{\nu+1}(y)\right];$$

ii. *Dacă* $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ *și* $g(x) = f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{\nu^2}{x^2} f(x)$ *admite transformarea Hankel* G_ν, *atunci* $G_\nu(y) = -y^2 F_\nu(y)$;

iii. (*Egalitatea lui Parseval*). *Dacă* F_ν *și* G_ν *sînt transformatele Hankel ale funcțiilor* f *respectiv* g, *atunci*

$$\int_0^\infty y F_\nu(y)\, G_\nu(y)\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty x f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Presupunem funcțiile utilizate astfel încît calculele care urmează să aibe sens. Avem :

$$G_\nu(y) = \int_0^\infty f'(x)\, J_\nu(xy)\, x\, \mathrm{d}x = x f(x)\, J_\nu(xy) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty f(x) \frac{\partial}{\partial x} [x J_\nu(xy)]\, \mathrm{d}x;$$

presupunînd f astfel încît termenul integrat să fie nul în $x = 0$ și $x = \infty$, deoarece $\frac{\partial}{\partial x}[x J_\nu(xy)] = \frac{xy}{2\nu}[(\nu + 1) J_{\nu-1}(xy) - (\nu - 1) J_{\nu+1}(xy)]$ punctul i este justificat.

Pentru ii, avem (presupunînd termenii integrați nuli)

$$G_\nu(y) = \int_0^\infty x g(x)\, J_\nu(xy)\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \right) - \frac{\nu^2}{x} f \right] J_\nu(xy)\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^\infty \left[x \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\, y J'_\nu(xy) + \frac{\nu^2}{x} f(x)\, J_\nu(xy) \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\infty \left[y^2 J''_\nu(xy) + \frac{y}{x} J'_\nu(xy) - \frac{\nu^2}{x^2} J_\nu(xy) \right] x f(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= -y^2 \int_0^\infty f(x)\, J_\nu(xy)\, x\, \mathrm{d}x;$$

ultima egalitate se obține utilizînd ED verificată de $J_\nu(xy)$.

În fine, pentru iii, putem scrie :

$$\int_0^\infty F_\nu(y)\, G_\nu(y) y\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty F_\nu(y)\, y \left[\int_0^\infty g(x)\, J_\nu(xy) x\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^\infty x g(x) \left[\int_0^\infty F_\nu(y)\, J_\nu(xy)\, y\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^\infty x g(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Punctul ii din această teoremă justifică utilitatea transformării Hankel în cazul problemelor în care apar ecuații Bessel; punctul iii (egalitatea lui Parseval pentru transformarea Hankel) poate fi utilizat în definirea transformării Hankel F_ν pentru distribuții f concentrate pe semiaxa $\mathbb{R}_+$ scriind

$$\langle F_\nu,\ \Phi_\nu\rangle = \langle f,\ \varphi\rangle\ ; \tag{29}$$

dacă f este o distribuție, iar $\Phi_\nu(y) = \int_0^\infty x\varphi(x)\,J_\nu(xy)\,dx$, cu φ o funcție test dintr-un spațiu $\mathcal{H}_\nu$ de funcții indefinit derivabile, convenabil stabilit pentru a putea fi utilizat în cazul transformării Hankel (de exemplu $\varphi \in \mathcal{H}_\nu$ dacă $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ iar $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|x^m\left(\frac{1}{x}D\right)^k[x^{-\nu-\frac{1}{2}}\varphi(x)]\right| < \infty$), construcția teoriei transformării Hankel o urmează pe cea realizată în cazul transformării Laplace, utilizînd însă egalitatea lui Parseval (29).

Exemple 6. Fie $f(x) = x^\nu(a^2 - x^2)^\mu$, pentru $0 < x < a$ și $f(x) = 0$, pentru $x > a$ deci $f(x) = x^\nu(a^2 - x^2)^\mu H(a - x)$, H fiind funcția unitate); calculînd transformarea Hankel (presupunînd $\mu, \nu \in \mathbb{R}$) a acestei funcții, utilizînd și dezvoltarea în serie pentru J_ν, găsim :

$$F_\nu(y) = \int_0^\infty xf(x)J_\nu(xy)\,dx = \int_0^\infty x^{\nu+1}(a^2 - x^2)^\mu J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2k+\nu}\int_0^a x^{2k+2\nu+1}(a^2 - x^2)^\mu\,dx.$$

Calculînd integrala cu ajutorul funcției Beta, deci cu substituția $x = a\sqrt{t}$, rezultă :

$$\int_0^a x^{2k+2\nu+1}(a^2 - x^2)^\mu dx = \frac{1}{2}\ a^{2(k+\mu+\nu+1)}\,B(k+\nu+1, \mu+1)\ ;$$

se obține

$$F_\nu(y) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k a^{2(k+\mu+\nu+1)}\,\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+\nu+\mu+2)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= 2^\mu\, a^{\mu+\nu+1}\Gamma(\mu+1)\, y^{-\mu-1}J_{\nu+\mu+1}(ay).$$

În baza formulei inverse pentru transformarea Hankel, găsim identitatea :

$$x^{\nu}(a^2-x^2)^{\mu}H(a-x)=2^{\mu}a^{\mu+\nu+1}\Gamma(\mu+1)\int_0^{\infty}y^{-\mu}J_{\nu+\mu+1}(ay)\,J_{\nu}(xy)\,\mathrm{d}x$$

valabilă pentru $\nu>-\frac{1}{2}$ $\left(\text{sau } \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2} \text{ dacă } \nu\in\mathbb{C}\right)$.

În particular, pentru $\mu=0$ se obține egalitatea

$$\int_0^{\infty}\frac{J_{\nu+1}(ay)\,J_{\nu}(xy)}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu},\quad 0<x<a.$$

7. Fie $f(x)=x^{\nu}\mathrm{e}^{-ax}$, $a>0$; rezultă transformarea Hankel

$$F_{\nu}(y)=\int_0^{\infty}x^{\nu+1}\mathrm{e}^{-ax}J_{\nu}(xy)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2k+\lambda}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\infty}x^{2(k+\nu)+1}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x\,;$$

utilizînd funcția gamma, avem

$$\int_0^{\infty}x^{2(k+\nu)+1}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^{2(k+\nu+1)}},\quad \Gamma(2k+2\nu+2)$$

sau, deoarece

$$\Gamma(2z+2)=\frac{2^{2z}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z+1)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^{\infty}x^{2k+2\nu+1}\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x=\frac{2^{2k+2\nu}}{a^{2k+2\nu+2}}\,\Gamma(k+\nu+1)\,\Gamma\left(k+\nu+\frac{1}{2}\right);$$

se deduce

$$F_{\nu}(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{\nu}(-1)^k\,\Gamma\left(k+\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)a^{\nu+2}}\left(\frac{y}{a}\right)^{2k+\nu}\cdot$$

5. Elemente din teoria stabilității

5.1. Generalități

Vom considera SD

$$\dot{x} = f(t,\ x) \tag{1}$$

în care

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\quad \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix},\quad f(t,\ x) = \begin{bmatrix} f_1(t,\ x_1\ \ldots,\ x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

cu $f_j : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, I fiind un interval din $\mathbb{R}$, $f_j \in \in C^1(I \times \mathbb{R}^n)$

În acest punct ne vor interesa, în special, următoarele trei probleme :

1. *Determinarea punctelor de echilibru (dacă există) ale sistemului* (1), *înțelegînd prin punct de echilibru pentru* SD (1) *soluțiile* $x(t) = x^0$, x^0 *fiind un vector constant.*

2. *Fie* x^0, y^0 *matrici-coloană constante cu n linii pentru care* $\|x^0 - y^0\| < \delta$ *și fie* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *soluții ale* SD (1) *astfel ca* $\varphi(0) = x^0$, $\psi(0) = y^0$, $I = [0, \infty[$; trebuie să răspundem la întrebarea „va exista $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît $\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$, dacă $\|x^0 - y^0\| < \delta(\varepsilon)$ oricare ar fi $\varepsilon > 0$ și $t \in I$?"

Dacă răspunsul este afirmativ vom spune că $x = \varphi(t)$ este o *soluție stabilă* a SD (1), iar dacă răspunsul este negativ vom spune că soluția în cauză este *instabilă*.

3. *Care este comportarea soluțiilor* $x(t)$ *ale* SD (1) *cînd* $t \to \infty$, *în sensul următor* :

i. *Dacă* $x(t) \to x^0$, *cînd* $t \to \infty$, x^0 *va fi un punct de echilibru pentru* SD (1) ?

ii. $x(t)$ *se apropie de o soluție de un anumit tip* (de exemplu periodică) *a* SD (1) *cînd* $t \to \infty$?

De remarcat că de multe ori răspunsurile la întrebările de mai sus pot fi date fără a se găsi explicit soluția generală a SD (1).

Astfel, la prima problemă răspunsul poate fi dat imediat : *punctele de echilibru* x^0 *ale* SD (1) *sînt soluțiile reale ale sistemului* $f(t, x^0) = 0$, deoarece numai în acest caz se verifică egalitatea $\dot{x}^0 = f(t, x^0)$ (x^0 fiind o matrice coloană constantă, avem $\dot{x}^0 = 0$).

Exemple 1. Să găsim toate punctele de echilibru ale SD

$$\dot{x}_1 = \mathrm{e}^t(1 - x_2),\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2.$$

Scriind $\mathrm{e}^t(1 - x_2) = 0$, $x_1^3 + x_2 = 0$ se obține o singură soluție reală $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (trebuie să avem $\mathrm{e}^t(1 - x_2) = 0$ pentru orice $t > 0$, deci $x_2 = 1$).

2. În cazul SD

$$\dot{x}_1 = (1 + x_1)(1 + x_2),\ \dot{x}_2 = l^2(x_1 - 1)(x_2 - 1),$$

punctele de echilibru vor fi soluțiile reale ale sistemului algebric $(1 + x_1)(1 + x_2) = 0$, $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0$; rezultă $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ca singurele puncte de echilibru ale SD considerat.

3. Să considerăm cazul pendulului simplu matematic (adică sistemul mecanic alcătuit dintr-un fir rigid de lungime l fixat la unul din capete în punctul A avînd masa neglijabilă și o particulă de masă m fixată la celălalt capăt al firului, acest sistem fiind obligat să oscileze în plan vertical) în care apare ca ecuație de mișcare ED (g fiind accelerația gravitațională terestră)

$$\ddot{y} + \frac{g}{l} \sin y = 0$$

unde y este unghiul pe care-l face firul cu verticala punctului A. Pentru a obține punctele de echilibru ale pendulului simplu, trebuie transformată ecuația de mișcare într-un SD; punînd $y = x_1$, $x_2 = \dot{y}$, rezultă SD

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1;$$

cum $y = x_1 \in [0, 2\pi[$, sistemul $x_2 = 0$, $-\frac{g}{l} \sin x_1 = 0$ admite numai soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ și $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$, deci punctele de echilibru vor fi $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pentru ușurință, vom considera numai SD (1) autonome deci numai acele SD (1) pentru care $f(t, x) = f(x)$ și vom presupune $f(x) = Ax$, A fiind o matrice pătrată de ordinul n cu elemente numere reale sau $f(x) = Ax + g(x)$, unde g este o matrice coloană cu anumite proprietăți care vor fi menționate ulterior, A fiind iarăși o matrice pătrată reală constantă.

Definiția 1. *Soluția* $x = \varphi(t)$, $t > 0$, *a* SD (1) *va fi stabilă dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *astfel încît*

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon \text{ dacă } \|\psi(0) - \varphi(0)\| < \delta$$

$x = \psi(t)$ *fiind soluția* SD *care verifică* $\psi(t)|_{t=0} = \psi(0)$. *In caz contrar,* $x = \varphi(t)$, $t > 0$, *va fi o soluție instabilă a* SD (1).

Cu alte cuvinte scriind $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}$, $\psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{bmatrix}$, φ și ψ verificînd SD (1), φ va fi o soluție stabilă pentru SD (1) dacă $|\psi_j(t) - \varphi_j(t)| < \varepsilon$ cînd $|\psi_j(0) - \varphi_j(0)| < \delta$, $j = 1, 2 \ldots n$, $t > 0$; φ va fi o soluție instabilă a aceluiași SD dacă există cel puțin un indice

$j_0 \in \{1, 2, \ldots n\}$ astfel încît să avem $|\psi_{j_0}(t) - \varphi_{j_0}(t)| \geqslant \varepsilon$, pentru $t > 0$, deşi $|\psi_{j_0}(0) - \varphi_{j_0}(0)|$ este oricît de mic, $\varepsilon > 0$ fiind dat.

Soluţia $x = \varphi(t)$ a SD (1) *va fi asimptotic stabilă, dacă este stabilă şi în plus $\varphi(t) \to 0$ cînd $t \to \infty$.*

5.2. Stabilitatea soluţiei nule pentru sisteme diferenţiale liniare

Luînd în discuţie SD liniar

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

unde $A = [a_{jk}]$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, $a_{jk} \in \mathbb{R}$, este evident că $x^0 = 0$ va fi un punct de echilibru pentru SD (2).

Lema 1. *Orice soluţie $x = \varphi(t)$, a* SD (2) *este stabilă (asimptotic stabilă) dacă punctul de echilibru $x^0 = 0$, este stabil (asimptotic stabil), iar orice soluţie $x = \psi(t)$ a aceluiaşi sistem va fi instabilă dacă punctul de echilibru $x^0 = 0$ este instabil.*

Dacă $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$, $t > 0$ sînt soluţii pentru (2), atunci $x = \varphi(t) - \psi(t)$ va verifica de asemeni (2). Punctul de echilibru $x = 0$ va fi stabil dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît să avem $\|\Phi(t) - 0\| < \varepsilon$ dacă $\|\Phi(0) - 0\| < \delta$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, $x = \Phi(t)$ fiind soluţia lui (2) cu datele iniţiale $\Phi(0)$; luînd $\Phi(t) = \varphi(t) - \psi(t)$, dacă $\|\Phi(0)\| = \|\varphi(0) - \psi(0)\| < \delta$ va rezulta $\|\Phi(t)\| = \|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$, adică soluţia $x = \varphi(t)$, $t > 0$ a SD (2) este stabilă. Fie acum $x = 0$, punct de echilibru instabil pentru SD (2); rezultă existenţa unei soluţii $x = h(t)$ a SD (1) astfel încît pentru $t > T > 0$ avem $\|h(t)\| \geqslant \varepsilon$ deşi $\|h(0)\| < \delta$ pentru orice $\delta > 0$. Funcţia vectorială $\psi(t) = \varphi(t) + h(t)$ verifică SD (2) şi deşi $\|\psi(0) - \varphi(0)\| = \|h(0)\| < \delta$ rezultă $\|\psi(t) - \varphi(t)\| = \|h(t)\| \geqslant \varepsilon$ dacă $t > T > 0$, adică orice soluţie $x = \varphi(t)$ a SD (2) va fi instabilă.

Observaţia 1. Dacă $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ atunci $\|x\| = \max\{\|x_1\|, \ldots \|x_n\|\}$, $\|x_j\| = \sup_{t \in I} (|x_j(t)|)$ (sau orice altă normă echivalentă).

Lema 2. *Fie matricea pătrată $A = [a_{jk}]$, $a_{jk} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ astfel încît toate valorile ei proprii sînt strict negative; atunci notînd $e^{At} = [h_{jk}(t)]$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ există $k > 0$ şi $\alpha > 0$ astfel încît $|h_{jk}(t)| \leqslant k e^{-\alpha t}$, pentru $t \geqslant 0$.*

În baza teoriei matricii e^{At} expusă la punctul 2, elementele acestei matrici vor fi cvasipolinoame, adică h_{jk} va fi o combinaţie liniară finită de funcţii de forma $p(t) e^{\lambda t}$, p fiind o funcţie polinomială, iar λ o valoare proprie a matricii A; de aceea va fi suficient să arătăm că orice funcţie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma $f(t) = t^k e^{-at}$, $a = \operatorname{Re} \lambda$ (deoarece $|p(t) e^{\lambda t}| \leqslant \sum_k |c_k| t^k e^{t \operatorname{Re} \lambda}$) verifică o inegalitate de forma $h(t) \leqslant k e^{-bt}$ cu $0 < b < a$ dacă $t \geqslant 0$.

Or, deoarece $\left|\frac{h(t)}{e^{-bt}}\right| = t^k e^{-(a-b)t}$, cum $a - b > 0$ valoarea maximă a funcției $t^k e^{-(a-b)t}$ se va atinge în punctul $t_0 = \frac{k}{a-b} > 0$; deci $|h(t)| \leqslant e^{-bt}[t^k e^{-(a-b)t}]\Big|_{t=\frac{k}{a-b}} = Ke^{-bt}$, $K = \left(\frac{k}{a-b}\right)^k e^{-k} > 0$.

Cu aceste pregătiri vom putea demonstra următorul rezultat, fundamental în teoria stabilității soluțiilor SD liniare cu coeficienți constanți.

Teorema 1. i. *Orice soluție* $x = \varphi(t)$ *a* SD (2) *este stabilă și asimptotic stabilă dacă toate valorile proprii ale matricii* A *au partea reală strict negativă.*

ii. *Orice soluție* $x = \varphi(t)$ *a* SD (2) *este instabilă dacă cel puțin o valoare proprie a matricii* A *are partea a reală strict pozitivă.*

iii. *Dacă toate valorile proprii ale matricii* A *au partea reală negativă, iar valorile proprii* $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, $1 \leqslant q \leqslant n$, *au partea reală nulă, astfel încît ordinul de multiplicitate pentru* λ_j *este* k_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, *atunci orice soluție* $x = \varphi(t)$ *a* SD (2) *este stabilă, dar nu asimptotic stabilă dacă matricea* A *admite exact* k_j *vectori proprii liniar independenți corespunzînd valorii proprii* λ_j, $j = 1, 2, \ldots, q$. *În caz contrar orice soluție a* SD (2) *este instabilă.*

i. Orice soluție $x = \varphi(t)$ a SD (1) se scrie $\varphi(t) = e^{At}\varphi(0)$, iar în baza lemei 2 $\|e^{At}\varphi(0)\| \leqslant K_1 e^{-\alpha t}\|\varphi(0)\|$, Re $\lambda_j \leqslant -\alpha$, $\alpha > 0$, $K_1 > 0$; pentru $\varepsilon > 0$ dat, fie $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{K_1}$. Atunci $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ dacă $\|\varphi(0)\| < \delta$ pentru $t \geqslant 0$, adică poziția de echilibru $x = 0$ va fi stabilă și evident asimptotic stabilă deoarece $e^{-\alpha t} \to 0$ cînd $t \to \infty$. Aplicînd lema 1, i este justificat.

ii. În acest caz vor apare termeni care conțin factori exponențiali e^{at} cu $a > 0$ care vor crește odată cu t.

iii. În acest caz, din teoria matricii e^{At} rezultă că această matrice are elementele majorate de factori de forma Ke^{-at} cu $a > 0$ (dacă Re $\lambda_j = 0$, cvasipolinoamele în cauză vor fi combinații liniare ale funcțiilor $\cos(t \operatorname{Im}\lambda_j)$ și $\sin(t \operatorname{Im}\lambda_j)$). În caz contrar vor apare cvasipolinoame de forma $t\cos(t \operatorname{Im}\lambda_j)$, $t\sin(t \operatorname{Im}\lambda_j)$, $t^2\cos(t \operatorname{Im}\lambda_j)$, $t^2\sin(t \operatorname{Im}\lambda_j)$, ... care evident nu sînt mărginite pentru $t \to \infty$ și soluția $x = 0$ va fi instabilă.

Teorema 1 poate fi justificată și direct scriind explicit matricea e^{At}, adică

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t}Z_1 + e^{\lambda_2 t}Z_2 + \ldots + e^{\lambda_n t}Z_n \tag{3}$$

dacă spectrul matricii A este simplu (dacă $\lambda_1 = \lambda_2$ atunci primii doi termeni se înlocuiesc prin $e^{\lambda_1 t}Z_{11} + te^{\lambda_1 t}Z_{12}$ etc.) unde $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ sînt matrici pătrate constante care depind numai de matricea A.

Din (3), deoarece avem $\|e^{At}\| \leqslant |e^{\lambda_1 t}| \|Z_1\| + |e^{\lambda_2 t}| \|Z_2\| + \ldots + \ldots + |e^{\lambda_n t}| \|Z_n\| = e^{t \operatorname{Re} \lambda_1} \|Z_1\| + e^{t \operatorname{Re} \lambda_2} \|Z_2\| + \ldots + e^{t \operatorname{Re} \lambda_n} \|Z_n\|$ dacă $\operatorname{Re} \lambda_j < 0, j = 1, 2, \ldots, n$, atunci $\lim_{t \to \infty} \|e^{At}\| = 0$, adică pentru orice vector constant x^0 cu n linii, $\lim_{t \to \infty} e^{At} x^0 = 0$. La fel se obțin și cazurile ii și iii ale teoremei.

Exemple 4. Pentru SD

$$\dot{x}_1 = -3x_1 - 6x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_2 - 3x_3, \quad \dot{x}_3 = -2x_1 - 6x_3$$

matricea A va fi

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad \text{deci} \det(zI - A) = \begin{vmatrix} z+3 & 6 & 0 \\ 0 & z-2 & 3 \\ 2 & 0 & z+6 \end{vmatrix} = z^2(z+7).$$

Rezultă valorile proprii $\lambda_1 = -7$ (deci $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$) și $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, iar deoarece polinomul minimal al matricii A coincide cu polinomul caracteristic, vom avea :

$$e^{At} = e^{-7t} Z_1 + Z_2 + tZ_3, \quad Z_3 = \frac{1}{7} A(7I - A) \neq 0$$

și fără a mai determina matricile Z_1, Z_2, Z_3 rezultă că soluția $x = 0$ a sistemului în cauză este instabilă (deci și orice altă soluție a acestui sistem va avea aceeași proprietate). Dacă se calculau vectorii proprii ai matricii A corespunzînd valorii proprii $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ trebuia rezolvat sistemul $Av = 0$, $v = {}^t[v_1, v_2, v_3]$ și deoarece se obține $v_1 = -3v_3$, $v_2 = \frac{3}{2} v_3$, se deduce $v = c \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; deci valorii proprii în cauză (care este dublă) îi va corespunde un singur vector propriu distinct.

5. În cazul SD

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3, \quad \dot{x}_2 = -x_2, \quad \dot{x}_3 = 2x_1 - 2x_2 - x_3$$

se deduce

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{deci} \det(zI - A) = (z+1)(z^2 + 2z + 5)$$

valorile proprii fiind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 + 2i$, $\lambda_3 = -1 - 2i$, adică $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, ceea ce înseamnă că orice soluție a SD dat va fi asimptotic stabilă.

6. În cazul SD

$$\dot{x}_1 = -3x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1$$

se deduce

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{adică} \quad \det(zI - A) = z^2 + 6$$

valorile proprii ale matricii A fiind $\lambda_1 = i\sqrt{6}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{6}$; conform teoremei 1, orice soluție a sistemului dat va fi stabilă dar nu și asimptotic stabilă. Acest fapt se confirmă calculînd matricea e^{At}; rezultă

$$e^{At} = I\cos(\sqrt{6}\,t) + \frac{1}{\sqrt{6}} A \sin(\sqrt{6}\,t) = \begin{bmatrix} \cos(t\sqrt{6}) & -\frac{\sqrt{6}}{2}\sin(t\sqrt{6}) \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\sin(t\sqrt{6}) & \cos(t\sqrt{6}) \end{bmatrix}$$

Prin urmare, orice soluție a SD considerat se va scrie $x(t) = e^{At}c$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$; luînd

$$\varphi(t) = e^{At}c,\ \psi(t) = e^{At}c^*, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

rezultă

$$\varphi_1(t) = c_1\cos(t\sqrt{6}) - c_2\frac{\sqrt{6}}{2}\sin(t\sqrt{6}),$$

$$\varphi_2(t) = c_1\frac{\sqrt{6}}{3}\sin(t\sqrt{6}) + c_2\cos(t\sqrt{6}),$$

$$\psi_1(t) = c_1^*\cos(t\sqrt{6}) - c_2^*\frac{\sqrt{6}}{2}\sin(t\sqrt{6}),$$

$$\psi_2(t) = c_1^*\frac{\sqrt{6}}{3}\sin(t\sqrt{6}) + c_2^*\cos(t\sqrt{6}).$$

Se deduce:

$$|\varphi_1(t) - \psi_1(t)| \leqslant |c_1 - c_1^*| + |c_2 - c_2^*|\frac{\sqrt{6}}{2} < |c_1 - c_1^*| + 2|c_2 - c_2^*|,$$

$$|\varphi_2(t) - \psi_2(t)| \leqslant |c_1 - c_1^*|\frac{\sqrt{6}}{3} + |c_2 - c_2^*| < |c_1 - c_1^*| + |c_2 - c_2^*|$$

și deci pentru $|c_1 - c_1^*| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|c_2 - c_2^*| < \frac{\varepsilon}{3}$, rezultă $|\varphi_1(t) - \psi_1(t)| < \varepsilon$, $|\varphi_2(t) - \psi_2(t)| < \frac{2}{3}\varepsilon$. Prin urmare, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, se poate considera $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

5.3. Stabilitatea punctelor de echilibru pentru sisteme diferențiale neliniare

În cazul sistemului autonom general

$$\dot{x} = f(x) \tag{4}$$

vom putea rezolva într-o primă formă problema stabilității punctelor de echilibru $x = x^0$, $f(x^0) = 0$ cu ajutorul teoremei 1, dacă f are o formă specială și anume :

$$f(x) = Ax + g(x) \tag{5}$$

unde A este o matrice pătrată constantă, iar g este astfel încît aplicația h definită prin $h(x) = \dfrac{g(x)}{\|x\|}$ este continuă și $h(0) = 0$ (evident $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$). Aceasta este cazul, de exemplu, al aplicațiilor $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, fiecare componentă a lui g fiind o funcție polinomială cu n variabile avînd gradul minim egal cu doi ; de exemplu, pentru aplicația

$$g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ x_1x_2^2 \end{bmatrix}$$

care provine din SD

$$\dot{x} = Ax + g(x), \text{ adică } \begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_1x_2 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_1x_2^2 ; \end{cases}$$

rezultă

$$h(x) = \frac{g(x)}{\|x\|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ x_1x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \dfrac{x_1x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{bmatrix},$$

iar $h \in C^0(\mathbb{R}^2)$, deoarece

$$\frac{|x_1x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{|x_1x_2^2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{2}|x_2|\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

și evident $h(0) = 0$.

Definiția 2. *Dacă* SD *autonom* (4) *este astfel încît* f *se scrie sub forma* (5) *în care* $\dfrac{g(x)}{\|x\|}$ *este continuă în* $\mathbb{R}^n$ *și nulă în origine iar* A *este o matrice pătrată reală de ordinul* n *atunci* SD

$$\dot{x} = Ax \tag{6}$$

dedus din SD

$$\dot{x} = Ax + g(x) \tag{7}$$

prin eliminarea vectorului coloană g *se va numi liniarizarea* SD (7) *sau* SD *liniarizat corespunzător* SD (7).

Lema 3. (*Gronwall*) *Dacă* $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [0, a]$, $a > 0$, este o funcție continuă astfel încît

$$f(t) \leqslant k + \int_0^t h(s) f(s)\ \mathrm{d}s,\ t \in I$$

cu $k \in \mathbb{R}$ și $h \in C^0(I)$, $h(t) \geqslant 0$, atunci

$$f(t) \leqslant k \exp\left[\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\right],$$

Să notăm

$$F(t) = \int_0^t h(s)\, f(s)\,\mathrm{d}s\,;$$

va rezulta $F(0) = 0$, $F \in C^1(I)$, iar $F'(t) = h(t)f(t) \leqslant h(t)[k + F(t)]$ sau $F'(t) - h(t)F(t) \leqslant kh(t)$.

Amplificînd ambii membri ai ultimei inegalități cu funcția pozitivă $e^{-\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$ rezultă inegalitatea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \cdot F(t)\right] \leqslant kh(t)\, e^{-\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[ke^{-\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\right],$$

adică $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{e^{-\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}[F(t)+k]\right\} \leqslant 0.$

Prin urmare funcția $e^{-\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\, F(t) + k$ va fi descrescătoare pe I (avînd derivata negativă), adică

$$e^{-\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}[F(t) + k] \leqslant e^{-\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}[F(t) + k]|_{t=0} = F(0) + k = k\,;$$

se obține

$$F(t) \leqslant k\left[e^{\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s} - 1\right].$$

Deoarece, prin ipoteză, avem $f(t) \leqslant k + \int_0^t h(s)f(s)\,\mathrm{d}s = k + F(t)$, prin înlocuirea lui F se obține rezultatul indicat.

Teorema 2. *Fie* SD (7) *în care matricea-coloană* $\frac{g(x)}{\|x\|}$ *este continuă în* $\mathbb{R}^n$ *și nulă în origină. Atunci*:

i. *Punctul de echilibru* $x(t) = 0$ *al* SD (7) *este asimptotic stabil dacă soluția banală* $x(t) = 0$ *a* SD *liniarizat* $\dot{x} = Ax$ *este asimtotic stabilă* (deci dacă valorile proprii ale matricii A au toate partea reală strict negativă, $x(t) = 0$ este punct de echilibru asimptotic stabil pentru SD (7)).

ii. *Poziția de echilibru* $x(t) = 0$ *a* SD (7) *este instabilă dacă cel puțin o valoare proprie a matricii* A *are partea reală pozitivă.*

iii. *Natura stabilității punctului de echilibru* $x(t) = 0$ *a* SD (7) *nu poate fi determinată din stabilitatea soluției banale a* SD *liniarizat* $\dot{x} = Ax$ *dacă toate valorile proprii ale matricii* A *au partea reală negativă, iar cel puțin o valoare proprie a matricii* A *are partea reală nulă.*

i. Soluția SD (7), dacă există, va verifica ecuația integrală

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g[x(s)]\,ds, \tag{8}$$

dedusă din modul de rezolvare a SD neliniar $\dot{x} = Ax + b$ și mai rămîne de arătat că $\|x(t)\| \to 0$, cînd $t \to \infty$, Deoarece toate valorile proprii ale matricii A au partea reală strict negativă, în baza lemei 2, vor exista $K, \alpha \in \mathbb{R}$, $K > 0$, $\alpha > 0$ astfel încît

$$\|e^{At}x(0)\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\|x(0)\|, \quad \|e^{A(t-s)}g[x(s)]\| \leqslant Ke^{-\alpha(t-s)}\|g[x(s)]\|.$$

Deoarece $\frac{g(x)}{\|x\|}$ este continuă în origine și $\left\|\frac{g(x)}{\|x\|}\right\| = 0$, pentru $x=0$, se deduce $\left\|\frac{g(x)}{\|x\|} - \frac{g(x)}{\|x\|}\Big|_{x=0}\right\| < \varepsilon$, dacă $\|x - 0\| < \delta$; prin urmare, avem $\|g(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|$, pentru $\|x\| < \delta$. În consecință, din (8) rezultă

$$\|x(t)\| \leqslant \|e^{At}x(0)\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}g[x(s)]\|\,ds \leqslant Ke^{-\alpha t}\|x(0)\| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|\,ds$$

$\left(\text{luînd } \varepsilon = \frac{\alpha}{2}\right)$, dacă $\|x(s)\| < \delta$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Prin înmulțire cu $e^{\alpha t}$ rezultă inegalitatea:

$$e^{\alpha t}\|x(t)\| \leqslant K\|x(0)\| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{\alpha s}\|x(s)\|\,ds,$$

care în baza lemei 3 $\left(f(t)=e^{\alpha t}\|x(t)\|, k=K\|x(0)\|, h(s)=\frac{\alpha}{2}>0\right)$ arată că are loc :

$$e^{\alpha t}\|x(t)\|\leqslant K\|x(0)\|e^{\frac{\alpha t}{2}} \text{ sau } \|x(t)\|\leqslant K\|x(0)\|e^{-\frac{1}{2}\alpha t}, \tag{8'}$$

cînd $\|x(s)\|<\delta$, $0\leqslant s\leqslant t$. Dacă $\|x(0)\|<\frac{\delta}{K}$, din (8′) rezultă $\|x(t)\|<\delta$, pentru orice $t>0$ și în consecință (8′) este valabilă pentru orice $t>0$ dacă $\|x(0)\|<\frac{\delta}{K}$, iar $x(t)\to 0$ cînd $t\to\infty$.

Demonstrația de la ii fiind prea complicată o lăsăm la o parte iar iii se poate justifica imediat prin exemplul următor :
Fie SD

$$\dot{x}_1=x_2+\frac{1}{2}ax_1(x_1^2+x_2^2)^{p-1},\ \dot{x}_2=-x_1+\frac{1}{2}ax_2(x_1^2+x_2^2)^{p-1} \tag{9}$$

cu $a\in\mathbb{R}$ și $p>1$ un număr întreg ; sistemul liniarizat se scrie $\dot{x}=Ax$, $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ iar matricea A are valorile proprii $\lambda_1=-i$, $\lambda_2=i$, deci $\operatorname{Re}\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda_2=0$. SD (9) are avantajul că poate fi integrat imediat ; astfel se deduce relația

$$2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=a(x_1^2+x_2^2)^p \tag{9'}$$

înmulțind prima ecuație cu x_1, a doua cu x_2 și adunîndu-le. Notînd $y(t)=x_1^2(t)+x_2^2(t)$ avem $\dot{y}=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2$, deci din (9′) rezultă ED

$$\frac{dy}{dt}=ay^p,$$

care se integrează ușor ; rezultă

$$x_1^2(t)+x_2^2(t)=\frac{1}{\sqrt[p-1]{(1-p)at+[x_1^2(0)+x_2^2(0)]^{1-p}}}.$$

Pentru $a<0$ avem $x_1^2(t)+x_2^2(t)\to 0$ cînd $t\to\infty$ (deoarece $(1-p)a>0$), dar dacă $a>0$ acest lucru nu se mai întîmplă, deoarece pentru o anumită valoare a lui t numitorul se va anula. Deci $x(t)=0$ este soluție stabilă (chiar asimptotic stabilă) pentru anumite valori ale lui a și este instabilă pentru alte valori ale aceluiași parametru.

Exemplul 7. Să determinăm natura punctului de echilibru $x_1=x_2=x_3=0$ în cazul SD

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2^2+x_3^2,\ \dot{x}_2=-2x_2+x_3+3x_1+9x_3^3,$$

$$\dot{x}_3=-5x_1-6x_3+7x_1^5.$$

Matricial acest SD se scrie $x = Ax + g(x)$ unde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 \\ 9x_3^2 \\ 7x_1^5 \end{bmatrix},$$

iar matricea A are valorile proprii $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ $\lambda_3 = -6$; deoarece $\frac{g(x)}{\|x\|}$ este continuă în $\mathbb{R}^3$ și $\left.\frac{g(x)}{\|x\|}\right|_{x=0} = 0$, se poate aplica teorema 2.

În concluzie, punctul de echilibru considerat este asimptotic stabil pentru SD în cauză.

Rezultatele din teorema 2 pot fi extinse și la alte puncte de echilibru pentru SD autonome. Fie astfel x° un punct de echilibru pentru SD

$$\dot{x} = f(x) \tag{10}$$

(deci $f(x^0) = 0$) și fie $y(t) = x(t) - x^0$; rezultă SD

$$\dot{y} = f(x^0 + y) \tag{10'}$$

care admite $y = 0$ ca punct de echilibru: $f(x^0 + y)|_{y=0} = f(x^\circ) = 0$ și deci stabilitatea soluției $x(t) = x^0$ pentru SD (10) va fi o problemă echivalentă cu stabilitatea soluției $y(t) = 0$ pentru SD (10'). Să arătăm acum că în ipoteze suficient de generale relative la f, $f(y + x^0)$ se poate scrie sub forma $f(y + x^0) = Ay + g(y)$ unde $\frac{g(y)}{\|y\|}$ este aplicație continuă, nulă pentru $y = 0$.

Lema 4. *Fie f de clasă C^2 în vecinătatea lui x^0; atunci $f(x^0 + y)$ se poate scrie sub forma $f(x^0 + y) = f(x^0) + Ay + g(y)$, unde A este o matrice pătrată constantă, iar $\frac{g(y)}{\|y\|}$ este continuă în vecinătatea lui $y = 0$ și este nulă în $y = 0$.*

Demonstrația decurge direct din dezvoltarea Taylor:

$$f_j(x^0 + y) = f_j(x^0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^\circ) y_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_l}(x) y_k y_l$$

$$j = 1, 2, \ldots, n \text{ iar } f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}.$$

se deduce

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^0) & \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

și deoarece suma dublă definește un polinom de gradul al doilea în variabilele $y_1, \ldots, y_n$ se vor verifica condițiile din lemă, g fiind un vector coloană format cu acești termeni de gradul al doilea.

Teorema 2 și lema 4 conduc la următorul algoritm pentru analiza stabilității punctelor de echilibru ale SD $\dot{x} = f(x)$:

i. *Se determină punctele de echilibru, rezolvînd sistemul* $f(x) = 0$,

ii. *Dacă* $f(x^0) = 0$, *se scrie* $y = x - x^0$,

iii. *Se descompune* $f(x) = f(x^0 + y)$ *în forma* $Ay + g(y)$, *unde* A *este derivata întîia a lui* f *în punctul* x^0 ($f(x^0) = 0$, x^0 fiind punct de echilibru),

iv. *Se aplică teorema* 2.

Exemplul 8. Fie SD

$$x_1 = \sin(x_1 + x_2), \quad \dot{x}_2 = e^{x_1} - 1.$$

Aici $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ e^{x_1} - 1 \end{bmatrix}$ și deci $f(x_1, x_2) = 0$ înseamnă $e^{x_1} = 1$, deci $x_1 = 0$ (se iau în considerație numai soluțiile reale) și $\sin(x_1 + x_2) = 0$, adică $x_2 = n\pi - x_1 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ punctele de echilibru ale acestui SD vor fi $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ n\pi \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$. Punînd $y = x - x_0$, adică $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - n\pi$, rezultă SD

$$\dot{y}_1 = \sin(y_1 + y_2 + n\pi), \quad \dot{y}_2 = e^{y_1} - 1 \text{ sau}$$

$$\dot{y}_1 = (-1)^n \sin(y_1 + y_2), \quad \dot{y}_2 = e^{y_1} - 1 \text{ ; deoarece}$$

$$\sin(y_1 + y_2) = \frac{y_1 + y_2}{1!} - \frac{(y_1 + y_2)^3}{3!} + \ldots,$$

$$e^{y_1} = 1 + \frac{y_1}{1!} + \frac{y_1^2}{2!} + \ldots \text{ rezultă}$$

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad A = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g(y) = \begin{bmatrix} -\dfrac{(y_1 + y_2)^3}{3!} + \ldots \\ \dfrac{y_1^2}{2!} + \dfrac{y_1^3}{3!} + \ldots \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricii A sînt :

$$\lambda_1 = \frac{(-1)^n - \sqrt{1 + 4(-1)^n}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{(-1)^n + \sqrt{1 + 4(-1)^n}}{2},$$

rezultînd imediat că pentru n par, x^0 este punct de echilibru instabil, iar pentru n impar $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ (2k+1)\pi \end{bmatrix}$ punct de echilibru asimptotic stabil.

Observația 2. *Teorema 2 poate fi extinsă și la sisteme neautonome de forma*

$$\dot{x} = Ax + g(t, x),$$

dacă matricea coloană g este definită pentru $t \geqslant 0$ *și* $\|x\| < \alpha$, $\alpha > 0$ *iar* $\lim\limits_{\|x\| \to 0} \dfrac{\|g(t, x)\|}{\|x\|} = 0$, *uniform pentru* $t \geqslant 0$.

5.4. Spațiul fazelor. Orbite

Fie $x = x(t)$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $t \in I$, o soluție a SD autonom

$$\dot{x} = f(x), \; f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$I \subset \mathbb{R}$ fiind un interval, $I = [t_0, t_1]$.

Definiția 3. *Dacă t parcurge în sens crescător intervalul I, mulțimea de puncte* $(x_1(t) \ldots, x_n(t))$ *descrie un drum* γ *din spațiul n — dimensional al variabilelor* $x_1, \ldots x_n$ *denumit orbită sau traiectoria soluției* $x = x(t) = (x_1(t), \ldots x_n(t))$, *pentru* $t \in I$, *iar spațiul n-dimensional* $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$ *poartă numele de spațiul fazelor soluțiilor* SD (11).

De remarcat că în spațiul $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, soluția $x = x(t)$, $t \in I$ va defini de asemenea un drum, care însă nu constituie o orbită a SD considerat.

De exemplu, SD

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1$$

admite soluția $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, $t \in I$, care în spațiul $\mathbb{R}^3 = \{t, x_1, x_2\}$ definește o elice pe cilindrul $x_1^2 + x_2^2 = 1$, care are axa Ot ca axă de simetrie ; orbitele acestui SD vor fi drumurile din planul $x_1 0 x_2$, deci vor fi definite prin ecuația carteziană $x_1^2 + x_2^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$ (înmulțind prima ecuație cu x_1, a doua ecuație cu x_2, prin adunare se deduce $x_1 x_1 + x_2 x_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dt} (x_1^2 + x_2^2) = 0$). Așadar, orbitele acestui SD vor fi toate arcele de cerc, ale cercurilor centrate în origine (dacă $I = [t_0, t_1]$ și $t_1 - t_0 < 2\pi$ se obțin arce de cerc, dacă $t_1 - t_0 = 2\pi$ se obține cercul întreg, iar dacă $I = \mathbb{R}$ se obține cercul $x_1^2 + x_2^2 = c$ parcurs de o infinitate de ori).

Avantajul considerării orbitelor din spațiul fazelor în locul drumurilor definite de soluțiile SD (11) în spațiul $\mathbb{R}^{n+1}$, constă în faptul că uneori orbitele pot fi obținute mai ușor decît soluția însăși.

Astfel, pentru exemplificare, fie $n = 2$ și SD

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \tag{12}$$

care admite soluția $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $t \in I$; dacă $\dot{x}_1 \neq 0$, $t \in I$ egalitatea $x_1 = x_1(t)$ permite extragerea variabilei $t (t = \varphi(x_1)$, iar $x_1[\varphi(x_1)] = x_1)$ în vecinătatea punctului $x_1^0 = x_1(t_0)$, $t_0 \in I$. Atunci pentru $t \in V_{t_0}$, $V_{t_0} \subset I$ fiind o vecinătate a punctului t_0, orbita soluției $x_1(t)$, $x_2(t)$ va fi drumul din planul x_1Ox_2 definit prin $x_2 = x_2[\varphi(x_1)]$, $x_1 \in V_{x_1^0}$ ($V_{x_1^0}$ fiind o vecinătate a punctului $x_1^0 = x_1(t_0)$). Să observăm că avem, utilizînd (12)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dt} \cdot \frac{dt}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \tag{13}$$

și rezultă că orbitele SD (12) sînt de fapt soluțiile ED (13)

Exemplul 9. Fie SD

$$\dot{x}_1 = x_2 f(x_1, x_2), \ x_2 = -x_1 f(x_1, x_2), \ f(x_1, x_2) \neq 0, \ f \in C^1.$$

Soluțiile $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ ale acestui sistem nu pot fi determinate efectiv decît dacă f are o formă convenabilă; utilizînd însă ED (13), care în acest caz se scrie

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2},$$

orbitele sistemului se deduc imediat ca fiind mulțimea cercurilor (sau a arcelor acestora) $x_1^2 + x_2^2 = c$.

Observația 3. *O soluție a* ED (13) *este o orbită pentru* SD (12) *dacă și numai dacă derivatele* $\dot{x}_1$ *și* $\dot{x}_2$ *nu sînt simultan nule de-a lungul soluției.*

Dacă o soluție a ED (13) trece printr-un punct de echilibru al SD (13), atunci această soluție nu este o orbită (deoarece punctele de echilibru în cauză anulează funcțiile f_1 și f_2); mai mult chiar această soluție poate fi compusă dintr-un număr de orbite distincte. Pentru a lămuri această circumstanță, să considerăm un exemplu.

Exemplul 10. Fie SD din exemplul 9, în care $f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$, adică

$$\dot{x}_1 = x_2(1 - x_1^2 - x_2^2), \ \dot{x}_2 = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2),$$

pentru care orbitele au ecuația $x_1^2 + x_2^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$; se observă că orice punct al cercului unitate $x_1 + x_2 = 1$ este un punct de echilibru pentru acest SD. Rezultă că orbitele acestui SD sînt drumurile din $\mathbb{R}^2$ definite de $x_1^2 + x_2^2 = c$, $c > 0$, $c \neq 1$, la care trebuie adăugate toate punctele de pe cercul unitate $x_1^2 + x_2^2 = 1$; deci pentru $c = 1$ nu se obține o orbită ci o reuniune de soluții (punctele de echilibru ale sistemului dat).

Este cunoscut faptul că ED (13) nu poate fi integrată decît în cazuri foarte particulare, deci determinarea efectivă a orbitelor nu este, în general, posibilă; dar din (12) și (13) se obțin informații, uneori suficiente pentru a obține o imagine asupra acestor orbite. Astfel, din (13) se deduce panta tangentei orbitei într-un punct oarecare al ei, iar din (13) se deduce viteza de deplasare a punctului $(x_1(t), x_2(t))$ pe orbită, în direcția axelor Ox_1 și Ox_2; valoarea absolută a vitezei de deplasare a soluției pe orbită va fi egală cu $\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \sqrt{f_1^2(x_1, x_2) + f_2^2(x_1, x_2)}$.

În continuare, vom deduce cîteva proprietăți simple ale orbitelor SD autonome.

Propoziția 1. SD $\dot{x} = f(x)$ *admite soluția* $\varphi(t + c)$ *pentru orice* $c \in \mathbb{R}$, *dacă* $x = \varphi(t)$, *este o soluție a* SD *dat.*

Propoziția se verifică imediat în cazul SD liniare, deci dacă $f(x) = Ax$; într-adevăr aici avem $\varphi(t) = e^{At}x^0$, iar $\varphi(t + c) = e^{A(t+c)}x^0 = e^{At} \cdot e^{Ac}x^0 = e^{At}\hat{x}^0$ cu $\hat{x}^0 = e^{Ac}x^0$.

În cazul general, dacă $\varphi(t)$, $t \in I$ este o soluție a SD $\dot{x} = f(x)$ vom avea $\dot{\varphi}(t) = (f \circ \varphi)(t) = [f[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)]$; considerînd funcția $s(t) = t + c$, $c \in \mathbb{R}$, deci $\dot{s}(t) = 1$, vom nota $\Phi(t) = (\varphi \circ s)(t)$; rezultă $\dot{\Phi}(t) = (\dot{\varphi} \circ s)(t) \cdot \dot{s}(t) = (\dot{\varphi} \circ s)(t)$ și deoarece $(\dot{\varphi} \circ s)(t) = (f \circ \varphi)(s(t)) = f[\varphi_1(t + c), \ldots, \varphi_n(t + c)] = (f \circ \Phi)(t)$, se obține $\dot{\Phi} = f \circ \Phi$ și deci $\Phi = \varphi \circ s$ va verifica SD considerat.

Observația 4. Pentru SD $\dot{x} = f(t, x)$ propoziția 1 nu este adevărată deoarece din calculul precedent se deduce $\dot{\varphi}(t + c) = f(t + c)$, $\varphi(t + c) \neq f[t, \varphi(t + c)]$.

Propoziția 2. *Dacă orbitele a două soluții* $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$, $t \in I$ *ale* SD $\dot{x} = f(x)$ *au un punct comun, atunci aceste orbite coincid.*

Justificarea se bazează pe teorema de existență și unicitate a soluțiilor SD, care are loc, de exemplu, pentru $f \in C^1$ (ceea ce se presupune).

Definiția 4. *O soluție* $x = \varphi(t)$, $t \in I$ *a* SD $\dot{x} = f(x)$ *va fi periodică, cu perioada* $T > 0$ *dacă* $\varphi(t + T) = \varphi(t)$, $t \in I$.

Propoziția 3. *Dacă* $x = \varphi(t)$, $t \in I$ *este astfel încît pentru un* $t_0 \in I$ *avem* $\varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$, *atunci această soluție este periodică cu perioada* T.

Notînd $\Phi(t) = \varphi(t + T)$, în baza propoziției 1 Φ va fi o soluție a SD $\dot{x} = f(x)$ și cum $\Phi(t_0) = \varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0)$, soluțiile $x = \varphi(t)$ și $x = \Phi(t)$ au un punct comun; propoziția 2 arată că aceste soluții vor coincide: $\varphi(t) = \Phi(t) = \varphi(t + T)$.

Propoziția 3 este utilă în practică, mai ales dacă $n = 2$; astfel dacă $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $t \in I$ este o soluție periodică pentru SD

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \tag{14}$$

deci dacă $x_1(t+T)=x_1(t)$, $x_2(t+T)=x_2(t)$, atunci orbita acestei soluții va fi un drum închis din $\mathbb{R}^2$; într-un interval de lungime T această orbită este parcursă o dată.

Propoziția 4. *Dacă orbita unei soluții* $x_1=\varphi(t)$, $x_2=\psi(t)$ *a* SD (14) *este un drum închis din* $\mathbb{R}^2$ *care nu conține nici un punct de echilibru al* SD (14), *atunci această soluție este periodică.*

Într-adevăr, am văzut că orbita SD (14) este parcursă de soluția $x_1=\varphi(t)$, $x_2=\psi(t)$ cu viteza $\sqrt{f_1^2(x_1,x_2)+f_2^2(x_1,x_2)}=F(x_1,x_2)$; dacă orbita este închisă, funcția F va fi continuă pe mulțimea C compactă definită în $\mathbb{R}^2$, de punctele acestei orbite, și deci va atinge pe C valorile extreme (care vor fi pozitive, deoarece C nu conține punctele de echilibru). În particular F va admite un minim pozitiv într-un punct $x_1^0=\varphi_1(t_0)$, $x_2^0=\varphi_2(t_0)$, $(x_1^0,x_2^0)\in C$, din care orbita soluției trebuie să se reîntoarcă la punctul de plecare (x_1^0,x_2^0), fiind un drum închis, iar aceasta împiică $x_1(t+T)=x_1(t)$, $x_2(t+T)=x_2(t)$ pentru orice t.

f **Exemplul 10.** Orice soluție a SD din exemplul 9 este periodică, pentru orice $(x,y)\in C^1$, $f\neq 0$; într-adevăr orbitele acestor soluții vor fi curbe închise (cercurile $x_1^2+x_2^2=c$, $c>0$), iar pe aceste cercuri nu se vor afla puncte de echilibru ale SD dat punctul de echilibru este $(0,0)$).

Observația 5. Din faptul că orbitele soluțiilor SD din $\mathbb{R}^2$ $\dot{x}=f(x)$ sînt închise rezultă că aceste soluții sînt funcții periodice, dar nu există posibilitatea calculării perioadei T a unei soluții particulare.

Exemplul 11. Să arătăm că orice soluție a ED $\ddot{y}+y+y^3=0$ este periodică Scriind $y=x_1$, $\dot{y}=x_2$ SD corespunzător va fi $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-x_1-x_1^3$ sau $\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{x_1(x_1+x_1^2)}{x_2}$; se deduc orbitele $2x_1^2+2x_2^2+x_1^4=c$, $c>0$, care sînt evident curbe închise din $\mathbb{R}^2$. Punctul de echilibru al SD va fi $x_1=0$, $x_2=0$ care nu este pe orbită dacă $c>0$; de aceea funcția $x_1=y$ va fi periodică iar funcția $x_2=\dot{y}$ va fi de asemenea periodică.

5.5. Reprezentarea orbitelor în $\mathbb{R}^2$. Clasificarea Poincaré

În această secțiune se va prezenta o reprezentare grafică în spațiul fazelor a tuturor orbitelor SD de forma:

$$\dot{x}=Ax,\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{R}; \tag{15}$$

explicit, este vorba de SD

$$\begin{cases}\dot{x}_1=ax_1+bx_2\\ \dot{x}_2=cx_1+dx_2\end{cases} \tag{15'}$$

care poate fi integrat și prin utilizarea ED

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{cx_1 + dx_2}{ax_1 + bx_2} \tag{15''}$$

(care este o ED de primul ordin, omogenă). Spațiul fazelor $\mathbb{R}^2$ va fi raportat fie la reperul cartezian x_1Ox_2 fie la reperul v^1Ov^2, unde v^1 și v^2 sînt vectorii proprii liniar independenți ai matricii A, în, ipoteza că acești vectori există (aceasta se întîmplă, dacă, de exemplu valorile proprii ale matricii A sînt distincte); legătura dintre soluțiile SD (15) și vectorii proprii ai matricii A a fost stabilită la secțiunea 2.2 a acestui capitol.

Fie λ_1 și λ_2 valorile proprii ale matricii A; utilizînd teoria expusă la secțiunea 5.2 va trebui să considerăm separat următoarele cazuri:

i. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ cînd orice soluție a SD (15) este asimptotic stabilă; orice soluție a acestui SD se va scrie sub forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v^2 \tag{16}$$

unde c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ sînt constantele de integrare.

În spațiul fazelor x_1Ox_2, vom considera alături de reperul cartezian Ox_1, Ox_2 reperul definit de vectorii proprii v^1 și v^2 care vor determina patru semidrepte l_1, l_2 și l_1', l_2' unde l_1 și l_2 sînt paralele cu v^1 și v^2, iar l_1' și l_2' sînt paralele cu $-v^1$ respectiv $-v^2$ (vezi fig. V.3.a).

Din (16) se deduce că funcția $c_1 e^{\lambda_1 t} v^1$ va fi o soluție a SD (15) pentru orice $c_1 \in \mathbb{R}$ și $t \in \mathbb{R}$; această soluție este coliniară (liniar dependentă) cu v^1 (avînd constanta de proporționalitate egală cu $c_1 e^{\lambda_1 t}$) și ia valori de la 0 la ∞ (dacă $c_1 > 0$) sau de la $-\infty$ la 0 (dacă $c_1 < 0$) deoarece $\lambda_1 < 0$, iar t crește pînă la ∞. În concluzie orbita soluției $x_1(t)$ va fi semidreapta l_1 pentru $c_1 > 0$ și semidreapta l_1' pentru $c_1 < 0$. Analog, orbita soluției $x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} v^2$ va fi semidreapta l_1' (pentru $c_1 > 0$) sau semidreapta l_2' (pentru $c_2 < 0$). Pentru $t \to 0$ avem $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ceea ce înseamnă că orice orbită a SD (15) se apropie de origine cînd $t \to \infty$, astfel încît $e^{\lambda_2 t} v^2$ este mai mic decît $e^{\lambda_1 t} v^1$, cînd t este mare (deoarece $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$) și deci orbita soluției $x(t)$ este apropiată de orbita lui $c_1 e^{\lambda_1 t} v^1$ cînd $t \to \infty$; din aceste motive, tangenta la orbita soluției $x(t)$ va tinde la l_1 pentru $c_1 > 0$ și către l_1' pentru $c_1 < 0$, iar orbitele vor avea reprezentarea din fig. V.3.b. Caracteristic pentru aceste orbite este faptul că ele se apropie de origine numai după una din direcțiile determinate de vectorii proprii v^1 sau v^2.

Definiția 5. *În cazul* i *punctul de echilibru* $x = 0$ *al* SD (15) *se va numi nod stabil* (*bidirecțional*).

Observația 6. *Orbita fiecărei soluții a* SD (15) *tinde către* $x(t) = 0$ *cînd* $t \to \infty$, *dar* $x = 0$ *nu este punct al orbitei pentru nici o soluție.*

Observația 7. Justificarea graficelor din fig. V.3.b se poate realiza și în modul următor :

Fie T o matrice pătrată nesingulară astfel încît să avem $T^{-1}AT = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$; scriind $x(t) = Ty(t)$, din SD (15) se va obține SD $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$, $\dot{y}_2 = \lambda_2 \dot{y}_2$ (avem $T\dot{y} = A(Ty)$ sau $\dot{y} = (T^{-1}AT)y$

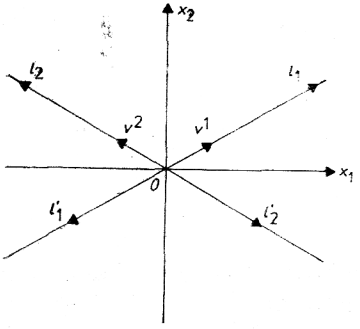

Fig. V.3a

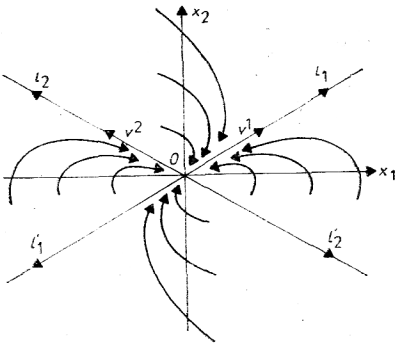

Fig. V.3b

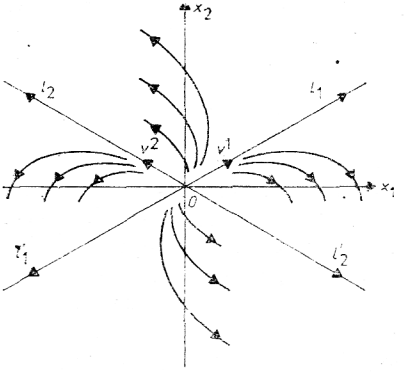

Fig. V.3c

ale cărui orbite se obțin imediat integrînd ED $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\lambda_1 y_1}{\lambda_2 y_2}$, adică $y_1 = C|y_2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$. Deoarece $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$, în planul fazelor $y_1 O y_2$ se obțin orbite asemănătoare celor din fig. V.3.b.

i'. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. În acest caz, în care orice soluție a SD (15) este instabilă, orbitele SD (15) sînt identice cu cele din situația i, cu singura diferență că ele sînt parcurse în sens invers decît în i (fig. V.3.c).

Definiția 5'. *În cazul* i' *punctul de echilibru* $x = 0$ *al* SD (15) *se va numi nod instabil* (*bidirecțional*).

ii. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$; această situație determină ca orice soluție a SD (15) să fie instabilă. Forma orbitelor SD (15) și modul de parcurgere al lor se deduce într-un mod asemănător cazurilor i și i' obținîndu-se situația din fig. V. 4, adică niște orbite asemănătoare hiperbolelor (dacă se utilizează observația 7, se deduce $y_1 = C|y_2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ dar $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$).

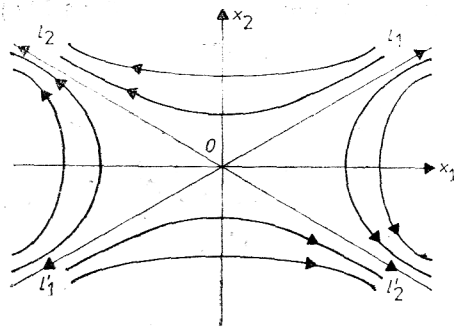

Fig. V.4

Definiția 6. *In cazul* ii, *punctul de echilibru* $x=0$ *se va numi punct de șa.*

iii. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$; în acest caz, orice soluție a SD (15) va fi asimptotic stabilă iar reprezentarea grafică a orbitelor diferă în funcție de numărul vectorilor proprii liniar independenți ai matricii A.

a. Să presupunem că A are doi vectori proprii v^1 și v^2 liniar independenți, ceea ce face ca soluția generală a SD (15) să se scrie

$$x(t) = e^{\lambda t}(c_1 v^1 + c_2 v^2). \tag{16}$$

Notînd $x_1(t) = e^{\lambda t}v^1$, $x_2(t) = e^{\lambda t}v^2$, se deduce $x_1(t) \to 0$, $x_2(t) \to 0$ cînd $t \to \infty$ și deci orbitele acestor soluții vor fi semidreptele l_1 și l_2; așadar, orbitele soluțiilor (16) vor fi semidreptele din $\mathbb{R}^2$ care au o extremitate în origine (fig. V.5.a). Acest fapt se confirmă dacă se va utiliza observația 7, cînd $y_1 = cy_2$, obținîndu-se dreptele din planul y_1Oy_2, iar transformările liniare generate de matricea T invariază mulțimea dreptelor din $\mathbb{R}^2$.

b. Dacă matricea A admite un singur vector propriu v^1, matricea e^{At} va avea forma

$$e^{At} = e^{\lambda t}(Z_1 + tZ_2)$$

și deci soluția generală $x(t)$ a SD (15) se scrie

$$x(t) = e^{At}c,\ c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{16'}$$

ceea ce are drept consecință existența unor soluții particulare de forma $x_1(t) = e^{\lambda t}$, $x_2(t) = te^{\lambda t}$. În spațiul fazelor, aceste soluții conduc la orbite de forma $x_2 = \frac{1}{\lambda}\, x_1 \ln |x_1|$ a căror reprezentare grafică este trasată în fig. V.5.b.

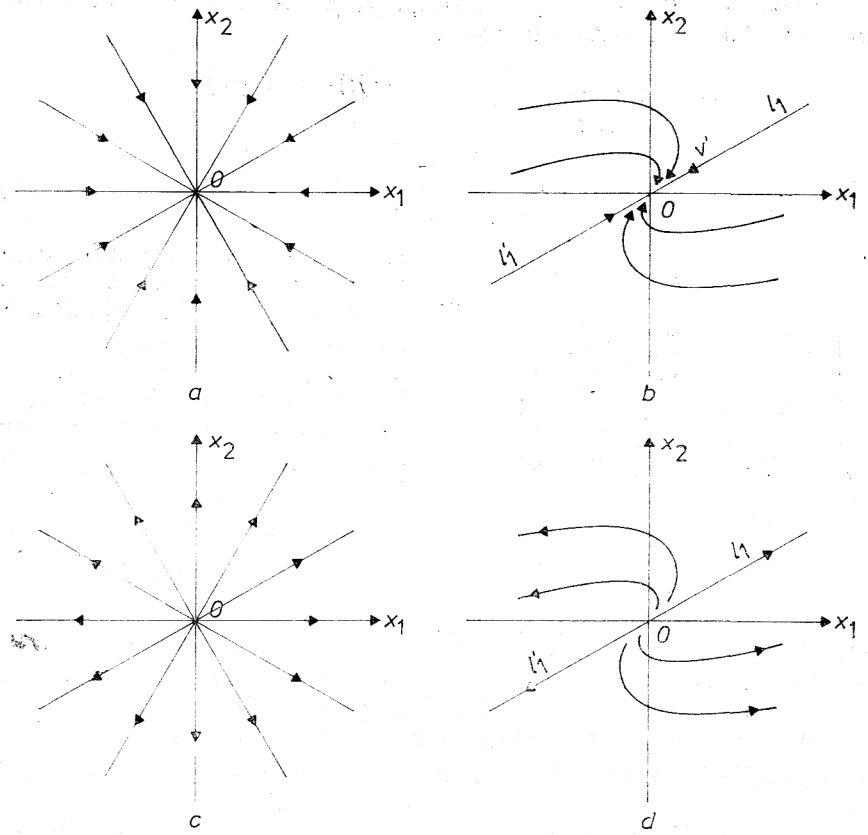

Fig. V.5

Observația 8. Utilizînd procedeul din observația 7 situația *a* apare dacă $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, iar situația *b*, dacă $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Dacă matricea A este simetrică (cu $\lambda_1 = \lambda_2$) atunci are loc cazul *a*.

Definiția 7. *In cazul* iii *punctul de echilibru* $x = 0$ *se va numi nod stabil* (*unidirecțional*).

iii'. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$. În acest caz discuția de la iii se repetă, singura diferență care apare constă în inversarea sensului de parcurs pe orbita (fig. V.5.c și d).

Definiția 7'. *In cazul* iii' *punctul de echilibru* $x = 0$ *se va numi nod instabil* (unidirecțional).

iv. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. În acest caz matricea $e^{At}x$ se va scrie sub forma

$$e^{At}c = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} u\cos(\beta t) - v\sin(\beta t) \\ u\sin(\beta t) + v\cos(\beta t) \end{bmatrix} =$$

$$= e^{\alpha t} \begin{bmatrix} w_1 \cos(\beta t - \varphi_1) \\ w_2 \cos(\beta t - \varphi_2) \end{bmatrix} \qquad (17)$$

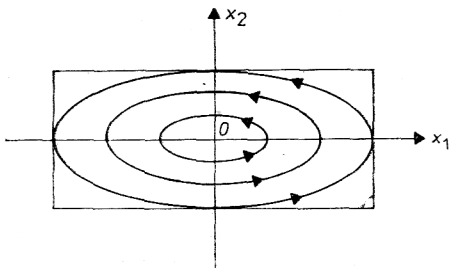

Fig. V.6

cu $u, v, w_1, w_2, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$ (w_1, w_2, φ_1 și φ_2 se determină din egalitățile $w_1 \cos\varphi_1 = u$, $w_1 \sin\varphi_1 = -v$, $w_2 \cos\varphi_2 = v$, $w_2 \sin\varphi_2 = u$).

a. $\alpha = 0$ (deci $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$). În acest caz avem soluții periodice $\left(\text{cu perioada } \frac{2\pi}{\beta}\right)$

$$x_1(t) = w_1 \cos(\beta t - \varphi_1),$$
$$x_2(t) = w_2 \cos(\beta t - \varphi_2)$$

și evident x_1 ia valori în intervalul $[-w_1, w_1]$, iar x_2 ia valori în intervalul $[-w_2, w_2]$; în consecință orbitele SD (15) vor fi curbe închise din spațiul fazelor aflate în intervalul bidimensional $[-w_1, w_1] \times [-w_2, w_2]$ și care conțin la interior punctul de echilibru $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Graficele acestor orbite sînt trasate în fig. V.6.

Definiția 8. *În cazul* iv, a, *punctul de echilibru* $x = 0$ *se numește centru.*

Observația 9. Determinarea sensului în care sînt parcurse orbitele în cazul unui punct de echilibru de tip centru se poate realiza în modul următor, utilizînd SD (15).

Se consideră $x_2 = 0$ și $x_1 > 0$, iar dacă $\dot{x}_2 > 0$, atunci toate orbitele în cauză vor fi parcurse în sens direct trigonometric (deoarece proiecția lui $x(t)$ pe axa Ox_2 va crește pentru $x_1 > 0$), iar dacă $\dot{x}_2 < 0$ pentru $x_2 = 0$ și $x_1 > 0$, atunci aceste orbite vor fi parcurse în sensul acelor unui ceasornic.

b. $\alpha < 0$, cînd punctul de echilibru $x = 0$ este asimptotic stabil. Apariția factorului $e^{\alpha t}$ în (17) face ca orbitele din cazul a să devină spirale deoarece punctul $x\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = e^{\frac{2\alpha\pi}{\beta}} x(0)$ este mai apropiat de origine decît punctul $x(0)$, determinarea sensului de parcurs al orbitei se poate realiza ca în cazul a și va fi cel determinat pe fig. V.7a (pentru a avea stabilitate).

Definiția 9. *In cazul* iv, b, *punctul de echilibru* $x = 0$ *se va numi focar stabil.*

c. $\alpha > 0$, cînd punctul de echilibru $x = 0$ este instabil; orbitele vor fi similare celor din fig. V.7.b cu sensul indicat de parcurgere a acestora.

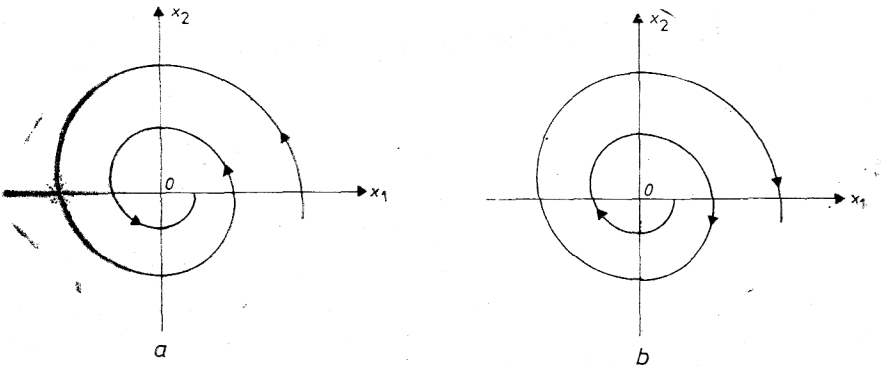

Fig. V.7

Definiția 9'. *In cazul* iv, c, *punctul de echilibru* $x = 0$ *se va numi focar instabil.*

Denumirile orbitelor din definițiile 5—9' *au fost introduse de H. Poincaré.*

Exemple. 12. În cazul SD $\dot{x} = Ax$ cu $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ avem $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -3$, deci punctul de echilibru $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ va fi un nod (bidimensional) stabil.

13. În cazul SD $\dot{x} = Ax$, cu $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ avem $\lambda_1 = -2$ și $\lambda_2 = 4$, deci punctul de echilibru $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ este un punct de șa.

14. În cazul SD $\dot{x} = Ax$, cu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ avem $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = 1 + i$, deci punctul de echilibru $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ va fi un focar instabil; scriind matricea $-A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ în locul matricii A, avem $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = -1 + i$ și deci punctul de echilibru $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ va fi un focar stabil.

Dacă se consideră SD neliniare

$$\dot{x} = Ax + g(x) \tag{18}$$

cu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ și $\dfrac{g(x)}{\|x\|} = \dfrac{g(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ funcție continuă în vecinătatea lui $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, nulă în acest punct, se poate demonstra următorul rezultat:

Teorema 3. *Dacă punctul de echilibru* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ *este un nod, punct de șa sau focar pentru* SD *liniarizat* $\dot{x} = Ax$, *atunci soluțiile* SD (18) *au în vecinătatea acestui punct de echilibru reprezentările grafice din* Fig. V.3.b, V.4 *și* V.7 (a, b) *respectiv.*

6. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi

6.1. Integrale prime

Teoria SD autonome este strîns legată de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de forma:

$$X_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1}(x, u)$$

Vom considera o scurtă prezentare a acestei teorii și pentru început vom lua în considerație un caz special, legat de liniile de cîmp ale unui cîmp vectorial din $\mathbb{R}^3$.

Definiția 1. *Dacă* $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *este un cîmp vectorial continuu din* $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ *liniile de cîmp ale lui* $\vec{f}$ *sînt curbele* γ *netede din* D_3 *care au în fiecare punct tangenta dirijată după direcția cîmpului în acel punct.*

Cu alte cuvinte, din definiția 1 rezultă $\vec{\tau} = \lambda\vec{f}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ și deci scriind o parametrizare $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I$, ($I \subset \mathbb{R}$ fiind un interval) pentru γ (adică $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ vom avea $\vec{\tau} = \dot{\gamma} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$; egalitatea vectorială $\vec{\tau} = \lambda\vec{f}$ conduce la egalitățile

$$\dot{x} = f_1(x, y, z),\ \dot{y} = f_2(x, y, z),\ \dot{z} = f_3(x, y, z), \tag{1}$$

care definesc un SD autonom în $\mathbb{R}^3$.
Sistemul (1) se mai poate scrie și sub forma echivalentă:

$$\frac{\mathrm{d}x}{f_1(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}y}{f_2(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}z}{f_3(x, y, z)} \left(= \mathrm{d}t\right) \tag{1'}$$

numită *forma simetrică* a SD autonom (1), care este un sistem diferențial scris sub forma normală.

Exemplul 1. Liniile de cîmp ale cîmpului vectorial (yz, xz, xy) se obțin prin integrarea SD:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = yz,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = xz,\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy$$

format din trei ecuații; pentru integrarea sistemului se observă că vor fi valabile egalitățile:

$$x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y,\ x\mathrm{d}x = z\mathrm{d}z$$

(deoarece $x\mathrm{d}x = xyz\,\mathrm{d}t$, $y\mathrm{d}y = xyz\,\mathrm{d}t$, $z\mathrm{d}z = xyz\,\mathrm{d}t$) care pot fi integrate imediat, fiind ecuații exacte și se obține

$$x^2 - y^2 = c_1.\quad x^2 - z^2 = c_2.$$

Rezultă că aceste linii de cîmp se prezintă ca intersecție a suprafețelor $x^2 - y^2 = c_1$, $x^2 - z^2 = c_2$, scrierea lor sub formă parametrică realizîndu-se prin introducerea variabilei t, punînd $x = t$; se găsește

$$x = t, y = t^2 - c_1, z = t^2 - c_2, t \in \mathbb{R}.$$

Fie

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n),\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n) \ldots, \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots x_n) \quad (2)$$

cu $\dot{x}_1 = \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$, $\dot{x}_2 = \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$, $\ldots$, $\dot{x}_n = \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$, un SD format din n ecuații de ordinul întîi scris sub formă normală, în ipoteza că funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt definite și de clasă C^1 într-un domeniu D_n (= mulțime deschisă și conexă) din $\mathbb{R}^n$.

Sistemul (2) se poate scrie vectorial sub forma

$$\dot{x} = f(x). \quad (2')$$

În baza teoremei de existență și unicitate pentru sisteme diferențiale, dacă $x^0 \in D_n$ (deci $x^0 = (x_1^0, x_0^2, \ldots, x_n^0)$) există o singură soluție a SD (2')

$$x = \varphi(t), \text{ adică } x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$$

astfel încît

$$x^0 = \varphi(t_0), \text{ adică } x_1^0 = \varphi_1(t_0), x_2^0 = \varphi_2(t_0), \ldots, x_n^0 = \varphi_n(t_0). \quad (2'')$$

Definiția 2. *O funcție*

$$u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$$

de clasă C^1 în domeniul $G_n \subset D_n$ se numește integrală primă pentru sistemul diferențial (2), *dacă aplicația compusă $u \circ \varphi$ este constantă, φ fiind o soluție oarecare a* SD (2).

Cu alte cuvinte, funcția u este o integrală primă pentru sistemul (2) dacă funcția

$$(u \circ \varphi)(t) = u[\varphi(t)] = u[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]$$

depinde doar de alegerea soluției $x = \varphi(t)$ a sistemului (2), nedepinzînd de t.

Teorema 1 : *Orice integrală primă a sistemului* (2) *verifică* EDP

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

și invers, orice funcție $u \in C^1(G_n)$ care verifică ecuația (3) va fi o integrală primă pentru sistemul diferențial (2).

Fie $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct oarecare din G_n și fie $x = \varphi(t, a)$, soluția sistemului (2), corespunzătoare problemei Cauchy $x(0) = a$ (adică $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2, \ldots, x_n(0) = a_n$). Dacă $u \circ \varphi$ este constantă, avem $\frac{d}{dt}(u \circ \varphi) = 0$, adică

$$0 = \frac{d}{dt} u[\varphi(t, a)]\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{d\varphi_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{d\varphi_n}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} f_j(x),$$

deoarece $\frac{d\varphi_j}{dt} = f_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (scriind în final x în loc de a, posibil deoarece a este arbitrar din G_n).

Reciproc, dacă $u = u(x) \in C^1(G_n)$ verifică (3) iar $x = \varphi(t)$ este o soluție oarecare a sistemului (2), notînd

$$v(t) = (u \circ \varphi)(t) = u[\varphi(t)] \; [= u[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)],$$

prin derivare se obține

$$\frac{dv(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(u \circ \varphi)}{\partial x_j} \cdot \frac{d\varphi_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} f_j = 0$$

ceea ce înseamnă că v nu depinde de t, deci u este o integrală primă pentru sistemul (2).

Studiul integralelor prime ale sistemului (2) este suficient să fie efectuat doar într-o vecinătate V_a a punctului $a \in G_n$ (G_n fiind un domeniu, va fi o reuniune de astfel de vecinătăți).

Definiția 3. *Fie*

$$u_1 = u_1(x), \; u_2 = u_2(x), \; \ldots, \; u_k = u_k(x), \; k \geqslant 2$$

un sistem de integrale prime ale SD (2), *definite în V_a; acest sistem de integrale prime se spune că este independent în punctul a* (pe scurt — independent), *dacă matricea jacobiană*

$$\left[\frac{\partial u_j(a)}{\partial x_k}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_1} & \frac{\partial u_j}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_j}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \frac{\partial u_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

are rangul k.

Teorema 2. S.D. (2) *admite* $(n-1)$ *integrale prime independente, iar orice altă integrală primă se poate scrie sub forma*

$$u(x) = U[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_{n-1}(x)], \tag{4}$$

unde $U(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *este o funcție oarecare de clasă* C^1 *în* $(n-1)$ *variabile.*

Să presupunem că $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sînt n integrale prime ale sistemului (2); conform teoremei 1, vor fi verificate ecuațiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} f_n = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} f_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} f_n = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Sistemul (5) poate fi interpretat ca un sistem algebric liniar, necunoscutele fiind $f_1, f_2 \ldots, f_n$. Cum funcțiile $f_1, \ldots, f_n$ nu pot fi nule simultan, rezultă că acest sistem algebric nu admite soluția banală ca singură soluție, ceea ce este posibil numai dacă determinantul coeficienților este nul, ceea ce înseamnă că matricea $\left[\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}\right]$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ este singulară. În ipoteza că există $(n-1)$ integrale prime independente, se poate presupune că aceste integrale prime sînt $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ (altfel se schimbă notația) și atunci, din faptul că determinantul funcțional $\dfrac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ este nul, se deduce că u_n depinde funcțional de $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$, adică are loc (4) pentru orice $x \in V_a$. Se arată că există întotdeauna $(n-1)$ integrale prime pentru sistemul diferențial (2).

Dacă se cunoaște un număr de integrale prime ale SD (1), atunci determinarea soluțiilor acestui sistem se ușurează întrucîtva; mai precis, este valabil rezultatul următor:

Teorema 3. *Dacă*

$$u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n \tag{6}$$

sînt $(n-k)$ *integrale prime ale* SD *autonom* (2) *independente în punctul* a, *atunci este posibil să se înlocuiască acest* SD *printr-un* SD *echivalent format însă numai din* k, *ecuații diferențiale autonome.*

Deoarece sistemul de integrale prime (6) este independent, matricea $\left[\dfrac{\partial u_j}{\partial x_{k'}}(a)\right]$, $j = k+1, \ldots, n, k' = 1, \ldots, n$ are rangul $(n-k)$ și să presupunem (modificînd eventual notațiile variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$) că matricea pătrată $\left[\dfrac{\partial u_j}{\partial x_{k'}}(a)\right]$ $j, k' =$

$= k+1, \ldots, n$ este nesingulară. Fie un nou sistem de variabile independente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ definit prin

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \ldots, y_k = x_k, y_{k+1} = u_{k+1}(x), \ldots, y_n = u_n(x). \tag{7}$$

Schimbarea de variabile $(x_1, \ldots, x_n) \to (y_1 \ldots y_n)$ este bijectivă în vecinătatea punctului a deoarece determinantul funcțional al transformării (7) este nenul (fiind egal cu $\det \left[\frac{\partial u^j}{\partial x_{k'}} (a) \right]$, $j, k' = k+1, \ldots, n$ în punctul a) în vecinătatea lui a fiind o funcție continuă (care dacă este diferită de zero într-un punct, va fi nenulă într-o vecinătate a acelui punct). În sistemul de variabile $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sistemul diferențial (2) se va scrie

$$\frac{dy_j}{dt} = g_j(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad j = 1, 2, \ldots n \tag{7'}$$

și deoarece fiecare din funcțiile (6) verifică egalitatea (3), din (7) se deduce

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} f_j = 0, \quad s = k+1, \ldots n.$$

Rezultă $g_{k+1}(y) = 0, \ldots, g_n(y) = 0$ deci practic, sistemul (7)′ este un sistem autonom de ordin k.

Acest rezultat este important din punct de vedere practic; în particular, dacă se cunosc $(n-1)$ integrale prime ale sistemului autonom (2) atunci prin transformarea (7) (în care $k = n-1$) SD (7′) se va reduce la o singură ecuație diferențială de ordinul întîi care este posibil să se integreze prin cuadraturi; în acest mod, problema integrării sistemului autonom (2) este practic rezolvată.

Sistemele autonome (2) se pot scrie și sub forma următoare

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} \tag{8}$$

numită *forma simetrică* a SD (2); într-adevăr deoarece ecuația $\frac{dx_j}{dt} = f_j$ se poate scrie și sub forma echivalentă $\frac{dx_j}{f_j} = dt$, $j = 1, 2, \ldots, n$, este clară legătura SD (2) și (8).

Este evident că SD (2) sau (8) sînt strîns legate de cîmpul vectorial f definit cu ajutorul funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ care intră în definiția acestor sisteme; vom scrie ca de obicei cîmpul vectorial f fie sub forma:

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \tag{9}$$

fie sub forma

$$\vec{f} = f_1\vec{i}_1 + f_2\vec{i}_2 + \ldots + f_n\vec{i}_n. \tag{10}$$

O caracteristică geometrică esențială a oricărui cîmp vectorial (evident definit în domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$) sînt *liniile* (*curbele*) *vectoriale*, care se definesc ca și în $\mathbb{R}^3$ cu ajutorul proprietății următoare:

Definiția 1'. *Curbele vectoriale ale cîmpului vectorial* (9) *sînt drumurile definite în D_n a căror tangentă în fiecare punct coincide cu direcția cîmpului vectorial în cauză în acel punct.*

Deoarece parametrii directori ai tangentei la curba $x = x(t)$ (adică $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$) sînt $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ sau ceea ce este același lucru, $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n)$ (deoarece x_j și $\mathrm{d}x_j$ sînt legați prin $\mathrm{d}x_j = \dot{x}_j\,\mathrm{d}t$, iar parametrii directori sînt unic determinați, abstracție făcînd de un factor multiplicativ), din definiția liniilor vectoriale se deduce egalitatea vectorială

$$\dot{x} = \lambda f \text{ sau } \mathrm{d}x = \lambda f$$

ceea ce este echivalent cu (8): din $\mathrm{d}x_1 = \lambda f_1$, $\mathrm{d}x_2 = \lambda f_2$, $\ldots$ $\mathrm{d}x_n = \lambda f_n$ se deduce $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}x_1}{f_1}$, $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}x_2}{f_2}$, $\ldots$, $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}x_n}{f_n}$.

Așadar, soluțiile SD (2) sau (8) determină familia de linii vectoriale ale cîmpului vectorial f definit prin (9). Pentru a putea afirma că există aceste linii vectoriale, trebuie să avem siguranța posibilității integrării sistemului (2), ceea ce se poate deduce din teorema de existență și unicitate pentru aceste sisteme, care este valabilă în ipoteza $f \in C^1(D_n)$ (evident se presupune $f(a) \neq 0$ pentru orice $a \in D_n$); dacă $f(a) = 0$ punctul $a \in D_n$ va fi un punct singular al sistemului diferențial (2) iar pentru cîmpul vectorial f, punctul a va reprezenta o *poziție de echilibru* a acestuia; cîmpul vectorial în punctul a în care $f(a) = 0$ nu determină liniile vectoriale în acest punct: prin a pot să treacă fie o infinitate de linii vectoriale fie să nu existe linii vectoriale care trec prin a. Liniile vectoriale ale unui cîmp vectorial dat sînt importante prin faptul că dau o imagine a structurii acestui cîmp.

De exemplu, dacă se presupune că în cazul mișcării unui fluid se cunosc vitezele de deplasare (deci aici $f' = \vec{v}$ dacă $\vec{v} = \vec{v}(x)$) atunci liniile vectoriale nu sînt altceva decît traiectoriile de deplasare a particulelor acelui fluid.

Dacă f este un cîmp potențial, deci dacă $f = \nabla_n u = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\vec{i}_1 + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\vec{i}_n$, liniile vectoriale fiind tangente la f în fiecare punct, cum $f = \nabla_n u$ reprezintă vectorul normal la suprafața $u(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ (care se numește *suprafață de nivel constant* a cîmpului scalar u) rezultă că aceste linii vectoriale sînt ortogonale în fiecare punct la suprafețele de nivel constant atașate cîmpului scalar u, deci automat vor fi curbele

de-a lungul cărora funcția u are variația cea mai rapidă (variația lui u de-a lungul direcției l este dată de derivata după această direcție; cum $\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla_n u, l) = \|\nabla_n u\| \cos(\nabla_n u, l)$ valoarea maximă se atinge cînd $\cos(\nabla_n u, l) = 1$, deci cînd unghiul $(\nabla_n u, l)$ are măsura $\frac{\pi}{2}$, deci l este ortogonal la pînza $u = \text{constant}$).

Să dăm cîteva procedee practice de determinare a soluțiilor sistemelor diferențiale (autonome sau nu).

i. Dacă SD are forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1), \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_2), \ldots, \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_n)$$

deci dacă se compune din n ecuații diferențiale de ordinul întîi, fiecare ecuație avînd o singură funcție necunoscută, atunci integrarea acestui sistem se realizează integrînd fiecare ecuație separat.

Exemplul 2. Dacă $f_j(t, x) = tx_j^m$, $m \in \mathbb{N}$, deci dacă se consideră SD $\dot{x}_1 = tx_1^m$, $\dot{x}_2 = tx_2^m, \ldots, \dot{x}_n = tx_n^m$, scriind $\frac{dx_j}{x_j^m} = t$, $j = 1, 2, \ldots n$, se obține $\frac{x_j^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{2}t^2 = C_j$, $j = 1, 2, \ldots n$. Cele n soluții ale acestui sistem vor fi

$$u_1(x) = \frac{x_1^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{2}t^2, u_2(x) = \frac{x_2^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{2}t^2, \ldots, u_n(x) =$$

$$= \frac{x_n^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{2}t^2 \ (m > 1).$$

ii. Dacă SD (1) are forma

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1), \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2), \ldots, \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

integrarea lui se poate realiza succesiv astfel: prima ecuație conținînd o singură funcție necunoscută x_1 se poate integra utilizînd metodele cunoscute din teoria ED de ordinul întîi; înlocuind apoi x_1 astfel găsit în ecuațiile următoare, se va obține un nou SD dar cu $(n-1)$ ecuații. Acest SD are ca funcții necunoscute pe $x_2, x_3, \ldots, x_n$, iar o ecuație nu va conține decît pe x_2 ca necunoscută; presupunînd că această ED se poate integra, se determină x_2 care va fi înlocuit în ecuațiile rămase. Se continuă apoi acest procedeu.

Exemplul 3. Fie SD

$$\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = tx_1 + x_2, \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3;$$

integrînd prima ecuație se găsește $x_1 = C_1 e^t$, iar înlocuind în celelalte două ecuații x_1, astfel determinat, se obține sistemul

$$\dot{x}_2 = c_1 te^t + x_2, \dot{x}_3 = C_1 e^t + x_2 + x_3$$

a cărui primă ecuație se integrează imediat, fiind vorba de o ecuație liniară : $\dot{x}_2 - x_2 = C_1 t e^t$. Se deduce $x_2(t) = \frac{1}{2} C_1 t^2 e^t + C_2 e^t$, ceea ce face ca ultima ecuație a sistemului să devină $\dot{x}_3 - x_3 = C_1 e^t + \frac{1}{2} C_1 t^2 e^t + C_2 e^t$; deci $x_3(t) = C_1 e^t + \frac{1}{6} C_1 t^3 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^t$. Soluțiile acestui SD vor fi :

$$x_1(t) = C_1 e^t, \quad x_2(t) = \frac{1}{2} C_1 t^2 e^t + C_2 e^t,$$

$$x_3(t) = C_1 e^t + \frac{1}{6} C_1 t^3 + C_2 t e^t + C_3 e^t$$

cele trei constante de integrare determinîndu-se cu ajutorul condițiilor inițiale : $x_1(0) = \alpha, x_2(0) = \beta, x_3(0) = \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

iii. **Metoda eliminării** care recurge la integrarea unor ED de ordin superior, obținute din ecuațiile sistemului diferențial considerat, prin eliminarea convenabilă a unor funcții necunoscute, presupunînd funcțiile de o clasă convenabilă.

Exemplul 4. Fie SD

$$\dot{x}_1 = 1 - \frac{1}{x_2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{x_1 - x_2};$$

prin derivarea ecuației a doua a sistemului se deduce $\ddot{x}_2 = \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{(x_1 - x_2)^2}$ și ținînd cont că $x_1 - x_2 = \frac{1}{\dot{x}_2}$, $\dot{x}_1 = 1 - \frac{1}{x_2}$ se obține ED $\ddot{x}_2 \frac{1}{\dot{x}_2^2} = \dot{x}_2 - \left(1 - \frac{1}{x_2}\right)$ de ordinul al doilea, care conține o singură funcție necunoscută x_2 și care are particularitatea că nu conține explicit variabila independentă t; astfel, cu substituția $x_2 = p(x_2)$, $\dot{x}_2 = p\dot{p}$ se obține o ED de ordinul întîi relativă la funcția $p = p(x_2)$: $\dot{p} = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) p + p^2$.

A apărut astfel o ecuație Bernoulli, iar cu substituția $\frac{1}{p} = q$ se va deduce $q = C \frac{e^{x_2}}{x_2}$, adică $p = C_1 x_2 e^{-x_2}$.

Prin urmare avem ED $\dot{x}_2 = p(x_2) = C_1 x_2 e^{-x_2}$, care fiind cu variabile separabile, prin integrare rezultă $C_1 t + C_2 = \varphi(x_2) = \int \frac{e^{x_2}}{x_2} dx_2$ (primitiva nu se poate calcula cu ajutorul funcțiilor elementare). Rezolvînd ecuația transcedentă $C_1 t + C_2 = \varphi(x_2)$ se obține $x_2 = \varphi^{-1}(C_1 t + C_2)$, iar acum x_1 se deduce din egalitatea $x_1 = x_2 - \frac{1}{\dot{x}_2}$ (dedusă din a doua ecuație), deci $x_1 = x_2 - \frac{1}{\dot{x}_2} = \varphi^{-1}(C_1 t + C_2) - \frac{1}{\dot{\varphi}^{-1}(C_1 t + C_2)}$.

Metoda combinațiilor integrabile: este o metodă bazată pe teorema 3; practic, acest procedeu impune găsirea prin mijloace directe a *unor integrale prime pentru sistemul* în cauză. Vom ilustra acest procedeu prin două exemple.

Exemple 5. Fie SD

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1;$$

prin înmulțirea primei ecuații cu x_1 și a celei de a doua cu x_2, prin adunare se găsește combinația $x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = 0$ care este imediat integrabilă; se deduce $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$, deci $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$. Așadar, o integrabilă primă a sistemului dat va fi $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Conform cu teorema 3, efectuînd schimbarea de variabile $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$, punînd $y_1 = x_1, y_2 = x_1^2 + x_2^2$ (adică $x_1 = y_1$, $x_2 = \sqrt{y_2 - y_1^2}$ este transformarea inversă) avem $\dot{y}_2 = 0$ căci $y_2 = C_1^2$, iar cum $\dot{y}_1 = \dot{x}_1$ și $\dot{x}_1 = x_2 = \sqrt{y_2 - y_1^2}$, ecuația care trebuie integrată va fi $\dot{y}_1 = \sqrt{y_2 - y_1^2} = \sqrt{C_1^2 - y_1^2}$ adică $\arcsin\left(\frac{y_1}{C_1}\right) = t + C_2$ sau $\arcsin\left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) - t = C_2$.

Cele două integrale prime ale sistemului considerat vor fi deci

$$u_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2; \; u_2(x_1, x_2, t) = \arcsin \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - t.$$

6. În cazul SD autonom simetric

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1}$$

se pot obține două integrale prime prin combinații integrabile. Astfel adunînd numitorii și numărătorii, rezultă că șirul de egalități anterioare se mai poate completa cu un raport de forma $\frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{0}$, ceea ce înseamnă că $dx_1 + dx_2 + dx_3$ este *proporțional* cu zero, deci $dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$ va fi o combinație integrabilă pentru sistemul în cauză. Se deduce $d(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, adică $x_1 + x_2 + x_3 = C_1$.

Înmulțind acum fiecare raport din șirul inițial de egalități cu $2x_1, 2x_2, 2x_3$ respectiv, deoarece $2x_1(x_3 - x_2) + 2x_2(x_1 - x_3) + 2x_3(x_2 - x_1) = 0$, *o altă combinație integrabilă* a sistemului dat va fi $2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 + 2x_3 dx_3 = 0$; deci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C_2^2$. Așadar, cele două integrale prime independente ale SD considerat vor fi

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \; u_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

6.2. Ecuații liniare cu derivate parțiale de ordinul întîi

Relația (3) poate fi interpretată ca o EDP în raport cu funcția u; este cazul unei EDP liniară și omogenă de ordinul întîi. Teoremele 1 și 2 arată că dacă $a \in D_n$ nu este un punct de echilibru pentru sis-

temul diferențial (1), deci dacă $f(a) \neq 0$, în vecinătatea punctului a, există $n-1$ integrale prime independente ale sistemului diferențial autonom (1), deci există $n-1$ soluții independente ale acestei ecuații; cu ajutorul acestora se pot obține toate celelalte soluții ale EDP

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \tag{11}$$

folosind egalitatea

$$u(x) = U[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_{n-1}(x)], \tag{12}$$

U fiind o funcție de clasă C^1 în $\mathbb{R}^{n-1}$, iar $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ fiind cele $n-1$ soluții particulare definite mai sus.

În baza acestor fapte, se poate afirma că problema determinării tuturor soluțiilor ecuației (11) este rezolvată; prin particularizarea funcției U din (12) se va obține orice altă soluție a ecuației (11).

Definiția 4. *Egalitatea* (12) *definește integrala generală a* EDP (11), *iar* SD *simetric*

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x_1, \ldots, x_n)} \tag{13}$$

se numește sistemul caracteristic al ecuației (11), *orice soluție a acestui sistem purtînd numele de caracteristică* (sau *curbă caracteristică*) a EDP (11).

Ecuația generală cu derivate parțiale de ordinul întîi are forma:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{14}$$

în care $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ este funcția necunoscută (care va fi evident o funcție de clasă $C^1(G_n)$, iar cel puțin o derivată parțială $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots$ $\ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ apare efectiv; funcția $F: D_n \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ $(G_n \subset D_n)$ este presupusă cunoscută și este cel puțin continuă în domeniul ei de definiție.

Definiția 5. *Prin soluție în* G_n (*sau suprafață integrală*) *a* EDP (14) *se înțelege orice funcție* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^1(G_n)$ *cu proprietatea*

$$F\left[x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1 \ldots x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)\right] = 0,$$

oricare ar fi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G_n$ (notînd $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ în spațiul $\{(x, u)\} = \mathbb{R}^{n+1}$ mulțimea punctelor care verifică această

egalitate determină o hipersuprafață numită *suprafață integrală a* ecuației (14)).

Definiția 6. *Dacă F este liniară în derivatele parțiale* $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$, *adică se prezintă în forma*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f_{n+1}(x) \tag{15}$$

(coeficienții derivatelor parțiale depinzînd doar de x), *sau sub forma*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f_{n+1}(x, u), \tag{15'}$$

atunci ea se numește liniară, dacă se prezintă sub forma (15) *sau cvasiliniară, dacă se prezintă sub forma* (15').

Această distincție este pur formală, deoarece în realitate cele două forme (15) și (15') pot fi considerate echivalente într-un anumit sens, fiind valabil rezultatul următor (numit *artificiul lui Jacobi*):

Teorema 4: *Dacă* $V : D_n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(x, u) = 0$ (sau=const.), $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *atunci funcția* V (*ca funcție de* $n + 1$ *variabile*) *va verifica ecuația liniară,*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x, u) \frac{\partial V}{\partial x_k} + f_{n+1}(x, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{16}$$

(care este o ecuație de forma (15) deci liniară și omogenă cu $n + 1$ variabile independente).

Într-adevăr, dacă $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ verifică ecuația (15'), scriind

$$V(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \quad \left(\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0\right)$$

derivatele parțiale ale lui u se vor obține cu ajutorul teoremei funcțiilor implicite, deci

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_j}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

înlocuind în (15') se obține (16).

Prin urmare, artificiul lui Jacobi arată că odată cu studiul EDP de ordinul întîi de forma (11) (numite liniare și omogene) s-a realizat și studiul ecuațiilor (15) sau (15'). Ca și în cazul ED, de regulă, nu

interesează soluția generală a acestor ecuații, ci soluții care verifică anumite condiții suplimentare. Astfel, în cazul EDP de ordinul întîi un loc important îl ocupă problema Cauchy, care se formulează astfel :

Definiția 7. *A rezolva o problemă Cauchy restrînsă pentru* EDP (11) *înseamnă a găsi soluția acestei ecuații care verifică condiția inițială*

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \text{ pentru } x_n = x_n^0. \tag{17}$$

Dacă se cunosc cele $(n-1)$ integrale prime ale sistemului caracteristic (13) al ecuației (11), rezolvarea acestei probleme se realizează formal astfel :

Fie $u_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1} = u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$ integralele prime în cauză și să notăm prin $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_{n-1}$ rezultatul înlocuirii lui x_n cu x_n^0; deci

$$u_1(x_1, \ldots x_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_1, \; u_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_2, \ldots$$

$$\ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_{n-1}.$$

Cum $\dfrac{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0$, se pot explicita $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ și deci $x_1 = g_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-1}), \; x_2 = g_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-1}), \ldots, x_{n-1} = g_{n-1}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-1})$; prin înlocuirea lui $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ în $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, definit prin condiția Cauchy (17), se găsește

$$u = \varphi[g_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \; g_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \ldots \tag{17'}$$

$$\ldots, g_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})]$$

dacă în loc de $\bar{u}_j$ se scrie chiar u_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Este evident că dacă φ este de clasă C^1, u definit prin (17') este soluție atît a ecuației (11) (fiind de fapt o funcție de soluții particulare ale acestei ecuații, deci o soluție), cît și a problemei Cauchy (17) (deoarece înlocuind în $u_1, \ldots, u_{n-1}$ din (17') x_n prin x_n^0 se obține $u = \varphi[g_1(\bar{u}_1, \ldots \ldots, \bar{u}_{n-1}), \ldots, g_{n-1}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1})] = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, căci $g_j(\bar{u}_1, \ldots \ldots, \bar{u}_{n-1}) = x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$).

Exemple. 7. Să găsim soluția generală a EDP

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{1}{2} x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

și apoi să se determine soluția care pentru $x_1 = 1$ devine $u = x_2 + x_3^2$.

Sistemul caracteristic va fi

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{\frac{1}{2} x_3}.$$

Egalînd întîi primele două rapoarte și apoi primul cu al treilea se obține prin integrare (apar două ED cu variabile separate)

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad \frac{x_3^2}{x_1} = C_2,$$

și deci cele două integrale prime vor fi

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{x_1}, \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3^2}{x_1},$$

iar soluția generală se va scrie

$$u = U(u_1, u_2) = U\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3^2}{x_1}\right),$$

unde U este o funcție oarecare de clasă $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Pentru a rezolva problema Cauchy $u = x_2 + x_3^2$ pentru $x_1 = 1$, conform teoriei expuse mai sus, se deduce

$$x_2 = \vec{u}_1, \; x_3^2 = \vec{u}_2, \; x_1 = 1, \; x_2 = \vec{u}_1, \; x_3 = \pm\sqrt{\vec{u}_2},$$

adică $u = x_2 = x_3^2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ și soluția căutată va fi $u = u_1 + u_2 = \dfrac{x_2 + x_3^2}{x_1}$ (care se va obține din soluția generală pentru $U(u_1, u_2) = u_1 + u_2$).

8. Să găsim soluția generală a EDP neomogenă

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_1^2 + x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} = u$$

și apoi să se găsească soluția care pentru $x_1 = 2$ devine $u = x_2 - 4$. Sistemul caracteristic fiind

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_1^2 + x_2} = \frac{du}{u}$$

se obțin ecuațiile diferențiale

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{du}{u}, \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_1^2 + x_2}$$

(ultima scrisă sub forma $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{1}{x_1} \cdot x_2 + x_1$ devine o ecuație liniară neomogenă de ordinul întîi) și deci prin integrare se găsesc soluțiile

$$\frac{u}{x_1} = C_1, \quad \frac{x_2 - x_1^2}{x_1} = C_2.$$

Deci integralele prime vor fi $V_1(x_1, x_2, u) = \dfrac{u}{x_1}$, $V_2(x_1, x_2, u) = \dfrac{x_2 - x_1^2}{x_1}$, care conduc la soluția generală $U(V_1, V_2) = 0$, adică $U\left(\dfrac{u}{x_1}, \dfrac{x_2 - x_1^2}{x_1}\right) = 0$, U fiind o funcție arbi-

trară, de clasă $C^1(\mathbb{R}^2)$; explicitînd primul factor se mai poate scrie $\frac{u}{x_1} = F\left(\frac{x_2 - x_1^2}{x_1}\right)$, F fiind o funcție arbitrară de o variabilă; se deduce $u = x_1 F\left(\frac{x_2 - x_1^2}{x_1}\right)$. Soluția problemei Cauchy va fi $u = x_2 - x_1^2$ (deoarece $\overline{V}_1 = \frac{1}{2} u$, $\overline{V}_2 = \frac{1}{2}(x_2 - 4)$, deci $x_1 = 2$, $x_2 = 2\overline{V}_2 + 4$, $u = 2\overline{V}_1$, se obține relația $2\overline{V}_1 = 2\overline{V}_2 + 4 - 4$, deci avem $V_1 = V_2$).

6.3. Interpretări geometrice

Dacă se ia în considerație cazul $n = 2$, presupunînd ecuația cvasiliniară cu derivate parțiale de ordinul întîi, adică

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \tag{18}$$

o soluție $u = u(x, y)$ definește în $\mathbb{R}^3$ (sau într-o porțiune a sa) raportat la sistemul de axe (x, y, u) o suprafață integrală; planul tangent la această suprafață are parametrii directori $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\right)$ în fiecare punct $(x_0, y_0, u_0 = u(x_0, y_0))$ al acestei suprafețe, ceea ce face ca ecuația (18) să poată fi interpretată ca o condiție de ortogonalitate între vectorul normal la suprafața integrală și vectorul avînd componentele $(a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y)))$ sau, ceea ce este echivalent, ca vectorul (a, b, c) să fie tangent la suprafața integrală în fiecare punct. Or, vectorul (a, b, c) definește în fiecare punct al domeniului de existență un cîmp vectorial, ale cărui linii vectoriale fiind tangente în fiecare punct la acest cîmp vectorial, va rezulta că orice suprafață integrală este formată cu liniile vectoriale ale cîmpului (a, b, c) sau ceea ce este totuna (deoarece liniile vectoriale în cauză sînt de fapt curbele caracteristice ale ecuației (18)) orice suprafață integrală se obține ca un loc geometric de curbe caracteristice ale ecuației în cauză. De aici se deduce imediat modul geometric de construcție a soluției problemei Cauchy atașată ecuației (18), adică modul de construcție a soluției cu proprietatea că $u = \varphi(y)$ dacă $x = x_0$: În $\mathbb{R}^3$ mulțimea punctelor care verifică $(u = \varphi(y), x = x_0)$ este drumul γ, $u = \varphi(y)$ din planul $x = x_0$ paralel cu planul yOz și deci a rezolva această problemă Cauchy înseamnă a determina acea suprafață integrală care trece prin această curbă. Or în baza interpretării geometrice anterioare, nu avem decît să ducem toate caracteristicile ecuației (18) care au un punct comun cu curba inițială γ și mulțimea acestor caracteristici va determina o suprafață în $\mathbb{R}^3$ care în mod obligatoriu

este o suprafață integrală (prin fiecare punct al acestei suprafețe trece o curbă caracteristică, planul tangent la suprafață conținînd tangenta la această caracteristică, deci se verifică relația de ortogonalitate $pl + qm + (-1)n = 0$, dacă $(p, q, -1)$ sînt parametrii directori ai planului tangent la suprafața $u = u(x, y)$, deci $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$, iar (l, m, n) sînt parametrii directori ai tangentei la curba caracteristică în cauză, deci $l = a(x, y, u(x, y))$, $m = b(x, y, u(x, y))$ și $n = c(x, y, u(x, y))$, iar condiția de ortogonalitate conduce exact la ecuația (18)).

Din această interpretare geometrică rezultă două consecințe importante :

— *Nu este obligatoriu ca* γ, *curba inițială, să fie plană* : construcția geometrică anterioară rămîne valabilă pentru orice curbă strîmbă din $\mathbb{R}^3$ (care bineînțeles trece prin domeniul în care coeficienții a, b și c sînt definiți).

— *Pentru ca problema Cauchy să admită o soluție este obligatoriu ca* γ *să nu fie o curbă caracteristică a ecuației* (18), deoarece în cazul în care γ este o curbă caracteristică, aceasta este unic determinată (în baza teoremei de existență și unicitate pentru soluțiile sistemelor diferențiale) și deci dacă am lua un punct de pe această curbă, orice caracteristică a ecuației (18) va coincide cu γ și deci nu se poate defini o suprafață în $\mathbb{R}^3$ (ci o curbă).

De asemenea, se mai poate trage concluzia că dacă S_1 și S_2 sînt două suprafețe integrale, notînd $\Gamma = S_1 \cap S_2$, dacă $\Gamma \neq 0$ neapărat Γ este o curbă caracteristică a ecuației (18), deoarece tangenta la Γ se află în planul tangent la S_1 și în planul tangent la S_2, deci

$$\frac{l_\Gamma}{a} = \frac{m_\Gamma}{b} = \frac{n_\Gamma}{c} \text{ unde}$$

l_Γ, m_Γ și n_Γ sînt parametrii directori ai tangentei la Γ.

6.4. Aplicații

i. *Cîmpuri solenoidale.* Dacă $\vec{f}$ este un cîmp solenoidal din $\mathbb{R}^3$, deci $\operatorname{div} \vec{f} = 0$, atunci $\vec{f} = \operatorname{rot} \vec{g}$, unde $\vec{g}$ este potențialul vector al cîmpului vectorial $\vec{f}$.

Fie $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ domeniul în care $\vec{f}$ este un cîmp de clasă C^1, $\vec{f} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ (cazul $n = 2$ sau $n > 3$ se tratează exact la fel), fie γ o curbă închisă din D_3 cu ipoteza că γ nu este o linie de cîmp pentru cîmpul vectorial $\vec{f}$. Atunci mulțimea liniilor de cîmp care au un punct comun cu γ va fi o suprafață din D_3 care se numește *supra-*

față de cîmp (evident, relativă la cîmpul $\vec{f}$ în discuție). În baza celor expuse anterior, rezultă că această suprafață de cîmp va verifica EDP

$$a(x,\ y,\ z)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,\ y,\ z)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,\ y,\ z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

(dacă ecuația suprafeței este $u(x,\ y,\ z) = 0$).

În cazul de față, această suprafață de cîmp are o formă tubulară deoarece se sprijină pe curba închisă γ și să considerăm $G_3 \subset D_3$, unde G_3 este domeniul aflat în interiorul acestei suprafețe de cîmp limitat de două suprafețe paralele care intersectează suprafața de cîmp.

Rezultă $\partial G_3 = S_1 \cup S_2 \cup S_l$ $(S_1 \parallel S_2)$, și aplicînd teorema Gauss-Ostrogradski (= teorema flux-divergență) lui G_3, avem

$$\int_{G_3} \operatorname{div} \vec{f}\ \mathrm{d}x = \int_{\partial G_3} (\vec{f},\ \vec{\nu})\,\mathrm{d}\sigma = \int_{S_1} (\vec{f},\ \vec{\nu})\,\mathrm{d}\sigma + \int_{S_2} (\vec{f},\ \vec{\nu})\,\mathrm{d}\sigma + \int_{S_l} (\vec{f},\ \vec{\nu})\,\mathrm{d}\sigma.$$

Deoarece prin ipoteză $\operatorname{div} \vec{f} = 0$, iar S_1 și S_2 sînt paralele, deci $\vec{\nu}_1 = -\vec{\nu}_2$, iar $\nu_l \perp f$ (normala la S_l este perpendiculară pe planul tangent, care conține tangenta la linia vectorială) ceea ce înseamnă $(\vec{f},\ \vec{\nu}_l) = 0$, se deduce $0 = \int_{S_1} (\vec{f},\ \vec{\nu})\,\mathrm{d}\sigma - \int_{S_2} (\vec{f},\ \vec{\nu})\,\mathrm{d}\sigma$, adică pentru orice $S_1 \parallel S_2$, $S_1,\ S_2 \subset D_3$ avem $\int_{S_1} (\vec{f},\ \vec{\nu})\,\mathrm{d}\sigma = \int_{S_2} (\vec{f},\ \vec{\nu})\,\mathrm{d}\sigma$, egalitate care arată că fluxul vectorului $\vec{f}$ (adică produsul scalar $(\vec{f},\ \vec{\nu})$) este același prin orice două suprafețe paralele care intersectează un tub vectorial (= suprafață vectorială care trece printr-o curbă închisă).

ii. *Ecuația cu derivate parțiale a suprafețelor cilindrice*

Prin definiție, un cilindru (= suprafață cilindrică) în $\mathbb{R}^3$ este suprafața generată de o dreaptă care se deplasează în $\mathbb{R}^3$ rămînînd paralelă cu o direcție fixă și trecînd printr-o curbă dată numită curbă directoare (dreapta care se deplasează determină mulțimea generatoarelor acestei suprafețe).

Din această definiție rezultă că normala la o suprafață cilindrică într-un punct oarecare este perpendiculară pe generatoarea care trece prin acest punct. Dacă $(m,\ n,\ p)$ sînt parametrii directori ai generatoarei, cum vectorul normal la orice suprafață scrisă sub forma $u(x,\ y,\ z) = 0$ are parametrii directori $\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ din condiția de ortogonalitate se deduce egalitatea

$$m\frac{\partial u}{\partial x} + n\frac{\partial u}{\partial y} + p\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{19}$$

care constituie EDP a suprafețelor cilindrice din $\mathbb{R}^3$. Dacă ecuația carteziană a acestei suprafețe cilindrice se scrie sub forma $z = z(x, y)$, se obține EDP

$$m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} = p, \tag{19'}$$

deoarece parametrii directori ai normalei vor fi în acest caz

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1.$$

La EDP (19) sau (19') trebuie adăugată și condiția ca soluția să treacă pri curba directoare ceea ce înseamnă că mai trebuie rezolvată o problemă Cauchy pentru EDP găsită. Sistemul caracteristic al EDP (19), fiind $\frac{dx}{m} = \frac{dy}{n} = \frac{dz}{p}$, el se integrează ușor, obținîndu-se integralele prime

$$nx - my = c_1,\ px - mz = c_2,$$

iar soluția generală a EDP (19') se va scrie $c_2 = F(c_1)$ și presupunînd $m \neq 0$, rezultă $px - mz = F(nx - my)$ sau $z = \frac{p}{m}x - \frac{1}{m}F(nx - my)$, F fiind o funcție arbitrară.

Exemplul 9. Să găsim ecuația carteziană a suprafeței cilindrice pentru care generatoarele au parametrii directori proporționali cu 1, 3, 1, iar curba directoare este cercu-$x^2 + y^2 = 25$, $z = -4$. EDP va fi

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

și deci sistemul caracteristic este $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{1}$; integralele prime distincte corespunzătoare sînt $u_1(x, y, z) = 3x - y$, $u_2(x, y, z) = x - z$. Trecînd la rezolvarea problemei Cauchy date, avem $3x - y = \bar{u}_1$, $x + 4 = \bar{u}_2$ deci $x = \bar{u}_2 - 4$, $y = -\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 - 12$, $z = -4$, care înlocuiți în $x^2 + y^2 = 25$ dau egalitatea

$$10\bar{u}_2^2 + \bar{u}_1^2 - 6\bar{u}_1\bar{u}_2 - 80\bar{u}_2 + 24\bar{u}_1 + 135 = 0,$$

în care în loc de u_1 și u_2 se înlocuiesc $3x - y$ și $x - z$, obținîndu-se în final ecuația cilindrului: $x^2 + y^2 + 14z^2 - 4xz - 6yz + 16x + 24y - 88z + 183 = 0$

iii. *Ecuația cu derivate parțiale a suprafețelor conice*

Prin *suprafață conică* sau *con* se înțelege suprafața care se obține prin deplasarea unei drepte numită generatoare astfel încît ea să treacă printr-un punct fix A numit vîrful conului și să se sprijine pe o curbă dată, numită curbă directoare a conului.

Dacă vîrful conului are coordonate (a, b, c) deci generatoarea are parametrii directori (m, n, p) cu $m = x - a$, $n = y - b$, $p = z - x$, din condiția de ortogonalitate cu normala la con se deduce EDP a acestor suprafețe

$$(x - a)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial u}{\partial y} + (z - c)\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \tag{20}$$

dacă suprafața se scrie $u(x, y, z) = 0$ și

$$(x - a)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial u}{\partial y} = z - c \tag{20'}$$

dacă suprafața se scrie $z = u(x, y)$.

Deoarece sistemul caracteristic al EDP (20) este

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - a} = \frac{\mathrm{d}y}{y - b} = \frac{\mathrm{d}z}{z - c}$$

se obțin integralele prime $\dfrac{x - a}{z - c} = c_1$, $\dfrac{y - b}{z - c} = c_2$, iar găsirea efectivă a conului presupune rezolvarea unei probleme Cauchy pentru ecuația (20) (la fel ca la punctul ii).

Exemplul 10. Se cere ecuația carteziană a conului cu vîrful în origine și curba directoare $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c$. EDP va fi

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

pentru care sistemul caracteristic $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{z}$, va conduce la integralele prime $u_1(x, y, z) = \dfrac{x}{z}$, $u_2(x, y, z) = \dfrac{y}{z}$. Utilizînd ecuațiile curbei directoare, avem $x = c\vec{u}_1$, $y = c\vec{u}_2$, iar relația dintre $\vec{u}_1$ și $\vec{u}_2$ va fi $\dfrac{c^2}{a^2}\vec{u}_1^2 + \dfrac{c^2}{b^2}\vec{u}_2^2 = 1$; scriind u_1 și u_2 în loc de $\vec{u}_1$ și $\vec{u}_2$, înlocuind u_1 și u_2 cu $\dfrac{x}{z}$ și $\dfrac{y}{z}$ se obține ecuația carteziană a conului căutat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

iv. *Ecuația cu derivate parțiale a funcțiilor pozitiv omogene de grad m.* Prin definiție, $f : D_n \to \mathbb{R}$ este *pozitiv omogenă de grad* m dacă, pentru orice $t > 0$ și $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D_n$, avem $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(t^m = e^{m \ln t})$.

Dacă $f \in C^1(D_n)$, derivînd în raport cu t această egalitate și făcînd apoi $t = 1$ se obține egalitatea

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

numită *identitatea lui Euler* pentru funcții pozitiv omogene de grad m, și care de fapt poate fi interpretată ca o EDP liniară și neomogenă pentru funcția f.

Integrînd această ecuație se obține imediat soluția generală

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^m \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

și este evident că $x_1^m \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$ este o funcție pozitiv-omogenă de grad m. Așadar, dacă $f \in C^1$, identitatea lui Euler poate fi interpretată ca fiind condiția necesară și suficientă pentru ca o funcție să fie pozitiv omogenă de grad m.

CAPITOLUL VI

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE

1. Introducere

Fie D_n o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$ și $x=(x_1,\ldots,x_n)\in D_n$; $n>1$; fie $F: D_n\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{N}$ și $\varphi\in C^m(D)$ având proprietatea

$$F[x,\ \varphi(x),\ \mathrm{D}\varphi(x),\ \mathrm{D}^2\varphi(x),\ \ldots,\ \mathrm{D}^m\varphi(x)]=0,\ x\in D_n, \tag{1}$$

unde $\mathrm{D}^k=\{\mathrm{D}_1^{k_1}\mathrm{D}_2^{k_2}\ldots\mathrm{D}_n^{k_n}\}$, $k_1+k_2+\ldots+k_n=k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$,

$$\mathrm{D}_j=\frac{\partial}{\partial x_j},\quad \mathrm{D}_j^{k_j}=\frac{\partial^{k_j}}{\partial x_j^{k_j}},\quad k_j=0,\ 1,\ \ldots$$

Definiția 1. *Funcția φ care verifică (1) în D_n se va numi soluție de clasă C^m (sau soluție clasică) în D_n a ecuației cu derivate parțiale* (pe scurt EDP)

$$F(x,\ u,\ \mathrm{D}u,\ \mathrm{D}^2u,\ \ldots,\ \mathrm{D}^mu)=0. \tag{2}$$

Dacă în EDP (2) *apare efectiv cel puțin o derivată de ordinul m* (după efectuarea reducerilor de termeni asemenea) *atunci* EDP (2) *va avea ordinul m și nu vom lua în considerație decît cazul $m=2$* (fiind posibil ca F să fie o funcție vectorială), *iar determinarea lui φ poartă numele de integrare* a EDP (2).

Vom evidenția acum ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea care intervin frecvent în practică și care vor fi luate în considerație în acest capitol.

i. *Ecuația Laplace din $\mathbb{R}^n$*

$$\Delta_n u=(\mathrm{D}_1^2+\ldots+\mathrm{D}_n^2)u=0, \tag{3}$$

sau

$$\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2u}{\partial x_n^2}=0$$

care pentru $n=2$ a fost întîlnită în cap. III; dacă f este o funcție olomorfă în mulțimea deschisă $D\subset\mathbb{C}$, atunci scriind $f(x+iy)=$

$= u(x, y) + iv(x, y)$ și identificînd D cu o mulțime deschisă $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ (dacă $z = x + iy \in D$, atunci $(x, y) \in D_2$) s-a dedus că $\Delta_2 u(x, y) = 0$, $\Delta_2 v(x, y) = 0$, $(x, y) \in D_2$.

Odată cu ecuația Laplace (3) se ia în considerație și ecuația Poisson

$$\Delta_n u = F, \tag{3'}$$

unde $F : D_n \to \mathbb{R}$ este o funcție cunoscută.

ii. *Ecuația căldurii din* $\mathbb{R}^n$

$$D_t u = a^2 \Delta_n u,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0 \tag{4}$$

sau

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(t, x), \tag{4'}$$

în care u este definit pe mulțimi de forma $I \times D_n$, $I \subset \mathbb{R}$ fiind un interval. Ecuația căldurii (4) este legată atît de ecuația lui Laplace (3) (soluțiile staționare, adică independente de t ale EDP (4) vor verifica EDP (3)), cît și de ecuația lui Helmholtz

$$\Delta_n u + \lambda u = 0,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{5}$$

(dacă pentru EDP (4) se caută soluții particulare de forma $e^{-\lambda t} u(x)$ sau dacă se separă variabilele $u(t, x) = T(t)\, v(x)$; înlocuind în (4') se deduce

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{D_n v(t)}{v(x)} = -\lambda \in \mathbb{R},$$

deoarece variabilele t și x sînt independente și deci v va verifica EDP $D_n v + \lambda v = 0$).

iii. Dacă în (4) $a^2 = i$ (deci $a \notin \mathbb{R}$) se obține ecuația lui Schrödinger.

iv. *Ecuația undelor* din $\mathbb{R}^n$

$$a^2 D_t^2 u = \Delta_n u,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0 \tag{6}$$

care se va mai scrie și sub forma

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(t, x),\ t \in I,\ x \in D_n.$$

v. Ecuațiile lui Maxwell, care sub forma vectorială se scriu

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0,\quad \operatorname{rot} \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \sigma \vec{E} = 0,\ \vec{E} = \vec{E}(t, x), \tag{7}$$

$$\vec{H} = \vec{H}(t, x),\ x = (x_1, x_2, x_3),$$

unde $\operatorname{div} \vec{E}_0 = 0$, $\vec{E}_0 = \vec{E}(0, x)$, $\operatorname{div} \vec{H}_0 = 0$, $\vec{H}_0 = \vec{H}(0, x)$.

În (7) $\mu > 0$, $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ sînt constantele de permeabilitate, de dielectricitate şi de conductibilitate electrică respectiv, ale mediului; notînd $\operatorname{div} \vec{E} = f(t, x)$, avem $f(0, x) = \operatorname{div} \vec{E}_0 = 0$, iar din a doua ecuaţie (7) se obţine

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{E}) - \sigma \operatorname{div} \vec{E} = 0,$$

adică, deoarece $\operatorname{div}(\operatorname{rot} H) = 0$ pentru orice cîmp vectorial $\vec{H}$, se deduce EDP

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial t} + \sigma t = 0,$$

care poate fi integrată imediat; $f(t,x) = f(o,x) \exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon} t\right) = 0$, deci

$\operatorname{div} \vec{E}(t, x) = 0$ pentru orice $t > 0$. Analog se arată că $\operatorname{div} \vec{H}(t, x) = 0$ pentru orice $t > 0$. Utilizînd identitatea vectorială $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta_3 \vec{E}$, din ecuaţiile lui Maxwell se deduc şi ecuaţiile vectoriale cu derivate parţiale

$$\Delta_3 \vec{E} - \mu\left(\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0, \quad \Delta_3 \vec{H} - \mu\left(\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = 0.$$

Pentru $\sigma = 0$ se obţine ecuaţia undelor din $\mathbb{R}^3$, iar pentru $\sigma \neq 0$ se obţine o nouă ecuaţie numită *a telegrafiştilor* (ambele sînt ecuaţii vectoriale). Toate ecuaţiile amintite mai sus sînt EDP liniare (adică funcţia F din (2) este liniară în u şi în toate derivatele ei parţiale) ceea ce limitează generalitatea de studiu, dar avînd în vedere complexitatea teoriei integrării EDP această particularitate se impune cu necesitate. În unele ecuaţii apare variabila t (cu interpretare de timp), în alte ecuaţii această variabilă nu apare; prima categorie de ecuaţii mai poartă numele de *ecuaţii de evoluţie*.

Înainte de a realiza cîteva referiri generale legate de teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale, vom utiliza consideraţiile din capitolele I, III şi IV pentru a deduce unele rezultate pentru ecuaţiile amintite mai sus.

2. Utilizarea teoriei distribuţiilor periodice în integrarea EDP

Vom folosi acum teoria expusă în cap. I pentru a găsi soluţii pentru ecuaţia căldurii, ecuaţia undelor şi ecuaţia lui Laplace în cîteva situaţii simple dar importante în aplicaţii.

2.1. Soluții distribuții periodice pentru ecuația căldurii

Ecuația căldurii din $\mathbb{R}$ (sau ecuația difuziei din $\mathbb{R}$)

$$(D_t u)(t, x) = a^2 (D_x^2 u)(t, x), \quad a > 0 \tag{1}$$

este una din cele mai simple EDP și descrie aproximativ propagarea căldurii într-o bară omogenă izolată termic pe suprafața ei laterală, $u(t, x)$ fiind temperatura în bară la momentul t în punctul de abscisă x; din această interpretare fizică rezultă că integrarea EDP (1) trebuie efectuată în anumite condiții specifice, rezultînd din existența unei temperaturi inițiale, adică

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = f(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

dacă bara are lungimea l și extremitățile în punctele $x = 0$ și $x = l$ din $\mathbb{R}$; la aceasta trebuie adăugate și condițiile la extremitățile barei, care constituie așa-numitele *condiții la limită* (sau *condiții la capete*). Astfel, dacă extremitățile barei sînt menținute la temperatura nulă, avem condițiile la limită

$$u(t, x)\Big|_{x=0} = 0, \; u(t, x)\Big|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

iar dacă la extremități nu are loc un schimb de căldură cu exteriorul vor trebui considerate condițiile la limită

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\Big|_{x=l} = 0, \tag{3'}$$

care indică faptul că variația temperaturii la extremitățile barei este nulă. Constanta a din EDP (1) este proporțională cu conductibilitatea termică a materialului din bară și prin alegerea convenabilă a unităților de măsură se poate presupune $a = 1$ (de exemplu, dacă $a \neq 1$, nu avem decît să schimbăm variabila t, în $a^2 t$ și în noua ecuație vom avea $a = 1$); de asemenea, se poate presupune $l = \pi$ (pentru $l \neq \pi$, se efectuează schimbarea $x \to \frac{\pi}{l} x$).

Observația 1. *Problema* (1), (2), (3) *poate fi transformată într-o singură problemă pentru funcții continue și periodice* (cu perioada 2π) în raport cu variabila x, dacă $f(0) = 0, f(\pi) = 0$ (aceste două ipoteze se numesc *condiții de racordare* și provin din faptul că dacă $u \in C^0(A_2)$, $A_2 = [0, T] \times [0, l]$, atunci $u(0, 0) = u(t, 0)\Big|_{t=0} = u(0, x)\Big|_{x=0}$ deci

$f(0) = 0$, iar $u(0, l) = u(t, l)\Big|_{t=0} = u(0, x)\Big|_{x=l}$, adică $f(l) = 0$). Cum f este definită pe intervalul $[0, \pi]$ și $f(0) = 0$, prelungind prin periodicitate, punînd $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-\pi, 0]$, se va obține o funcție continuă $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(-\pi) = -\tilde{f}(\pi) = 0$, impară, periodică, cu perioada egală cu 2π. Trecînd la funcția u, soluție a problemei (1), (2), (3), se poate presupune u definit pentru $t \geqslant 0$ și $x \in \mathbb{R}$, periodică cu perioada 2π în raport cu x, iar $u(t, x)\Big|_{t=0} = \tilde{f}(x)$; vom presupune $u = u(t, x)$ funcție impară în raport cu x dacă u este soluție clasică a EDP (1) pentru orice $t \geqslant 0$ și din (1) se deduce

$$(\mathrm{D}_x^2 u)(t, x)\Big|_{t=0} = \mathrm{D}_x^2 u(0, x) = \mathrm{D}^2 \tilde{f}(x),$$

rezultînd imparitatea și continuitatea lui $\tilde{f}$, iar de aici se deduce $\tilde{f}(0) = 0$ (o funcție impară, continuă în origină este nulă în origine și cum $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in [0, \pi]$ avem $\tilde{f}(\pi) = 0$).

Observația 2. În cazul problemei (1), (2), (3′) reluînd considerațiile de la observația 1, dar prelungind prin paritate pe f, $f(-x) = f(x)$, $x \in [-\pi, 0]$, va exista o singură prelungire la $\mathbb{R}$ a lui f, care să fie periodică, cu perioada 2π și pară; dacă $f \in C^1([0, \pi])$ prelungirea în cauză va fi de asemenea de clasă $C^1(\mathbb{R})$. Presupunînd u o soluție pentru (1) și (2) periodică (cu perioada 2π) în x pentru orice $t \geqslant 0$, dacă u este pară pentru orice $t \geqslant 0$, condițiile (3′) vor fi verificate în mod obligatoriu (avem $\mathrm{D}_x u(t, x)\Big|_{t=0} = \mathrm{D}f(x)$, iar $(\mathrm{D}f)(0) = 0$, f fiind pară).

În baza observațiilor 1 și 2, problemele (1), (2), (3) și (1), (2), (3′) pot fi înlocuite prin una singură și anume:

Problema 1. *Să se determine u definit pentru $t \geqslant 0$ și $x \in \mathbb{R}$, u periodică (cu perioada 2π) în raport cu x, pentru orice $t \geqslant 0$, astfel încît să fie verificată* EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{4}$$

și condiția inițială

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = f(x), \quad f \in \mathcal{C} \tag{5}$$

f fiind dată.

Problema 1 este formulată în termeni obișnuiți, folosind proprietăți legate de ipoteza de continuitate a funcțiilor și derivatelor acestora; este posibilă însă și o formulare în sensul teoriei distribuțiilor

a acestei probleme. Pentru aceasta, fie $f_t \in \mathcal{D}'$ pentru $t \in]a, b[\subset \mathbb{R}$ și să presupunem că există limita raportului $\frac{f_t - f_{t_0}}{t - t_0}$ în sensul convergenței din $\mathcal{D}'$, cînd $t \to t_0, t, t_0 \in]a, b[$, iar limita este un element din $\mathcal{D}'$; cu alte cuvinte, există $g \in \mathcal{D}'$ astfel încît

$$\frac{1}{t - t_0}(f_t - f_{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{D}'} g \quad (t \to t_0) \text{ sau } \frac{1}{h}(f_{t_0+h} - f_{t_0}) \xrightarrow{\mathcal{D}'} g \quad (h \to 0) \qquad (6)$$

și în acest caz vom scrie

$$g = \frac{\mathrm{d}f_t}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=t_0} = \dot{f}_t\bigg|_{t=t_0} \qquad (6')$$

(Reamintim că relația (6) înseamnă $\frac{1}{t - t_0}[f_t(v) - f_{t_0}(v)] \to g(v)$ $(t \to t_0)$ convergența fiind în $\mathbb{C}$ iar $v \in \mathcal{D}$ este arbitrar).

Problema 2. *Să se determine familia de distribuții periodice (cu) perioada* 2π), $u_t \in \mathcal{D}'$ *pentru* $t > 0$, *astfel încît să avem*

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}^2 u_t \text{ pentru orice } t > 0, \qquad (7)$$

iar

$$u_t \xrightarrow{\mathcal{D}'} f \text{ cînd } t \to 0, \ f \in \mathcal{D}' \qquad (8)$$

f fiind dat
(în (7) prin $\mathrm{D}^2 u$ se înțelege derivata în sensul teoriei distribuțiilor periodice, adică $(\mathrm{D}^2 u_t)(v) = u_t(\mathrm{D}^2 v)$, $v \in \mathcal{D}$, $t > 0$).

În legătură cu problema 2, vom putea justifica următorul rezultat:

Teorema 1. *Pentru orice* $f \in \mathcal{D}'$ *va exista o singură familie* $(u_t)_{t \geqslant 0}$ *din* $\mathcal{D}'$, *care să fie soluție a problemei* 2; *în plus, pentru orice* $t > 0$ u_t *va fi o funcție* $u(t, x) \in C^\infty(]0, T[\times]0, \pi[)$, *care este o soluție a problemei* 1 dacă $f \in \mathcal{C}$.

Demonstrația utilizează rezultatele din punctul 6, cap. IV, mai precis faptul că un element $f \in \mathcal{D}'$ se poate dezvolta în serie Fourier-trigonometrică $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \operatorname{cis}(nx)$, cis $(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ fiind un șir bilateral din $\mathbb{C}$ dacă și numai dacă $|f_n| \leqslant c|n|^r$, $c > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ și în acest caz avem $f_n = f(e_{in})$, cu $e_z = \mathrm{e}^{-zx}$, $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ iar șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ este unic determinat. Fie u_t soluția problemei 2 și să facem ipoteza că soluția se poate dezvolta în serie Fourier-trigonometrică, deci

$$u_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \ u_n(t) = u_t(e_{\mathrm{i}n}) = u_t(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) \qquad (9)$$

cu $t > 0$; din (7) se deduce

$$\frac{1}{h}(u_{t+h} - u_t) \xrightarrow{\mathfrak{D}'} D^2 u_t \quad (h \to 0),$$

adică

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}[u_n(t+h) - u_n(t)]e^{inx} \xrightarrow{\mathfrak{D}'} D^2 u_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)(in)^2 e^{inx} \quad (h \to 0),$$

de unde rezultă

$$\frac{1}{h}[u_n(t+h) - u_n(t)] \xrightarrow{\mathfrak{D}'} -n^2 u_n(t) \quad (h \to 0);$$

avem $D^2 u_t(x) = D_x^2\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)e^{inx}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)(in)^2 e^{inx}$, adică

$$\ddot{u}_n(t) = -n^2 u_n(t), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t > 0.$$

Soluția trebuind să verifice (8), din (9) rezultă $u_n(t) \to f(e_{in})$ $t \to 0$); se deduce

$$u_n(t) = f(e_{in})e^{-n^2 t} = f_n e^{-n^2 t} \tag{10}$$

șirul $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ al coeficienților Fourier trigonometrici fiind astfel unic determinat pentru orice $f \in \mathfrak{D}'$; deoarece $f \in \mathfrak{D}'$ avem $|f(e_{in})| \leqslant c|n|^2$, iar cum

$$e^{-n^2 t} < \frac{k!}{(n^2 t)^k} \quad \text{pentru orice} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

se deduce din (10)

$$|u_n(t)| < |f(e_{in})|\,|e^{-n^2 t}| \leqslant ck!\,|n|^{r-2k} t^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, t > 0. \tag{10'}$$

Deci șirul $(u_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ verifică cerința ca el să fie un șir al coeficienților Fourier-trigonometrici pentru u_t. Așadar, soluția problemei 2, u_t există, este unic determinată și poate fi scrisă sub forma

$$u_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(e_{in})\, e^{-n^2 t + inx}.$$

Avînd în vedere că în (10') k este arbitrar, iar r este fixat, vom avea pentru $|u_n(t)|$, evaluări de forma $c_1|n|^m$ cu m negativ (este suficient să se presupună k astfel ales încît $n - 2k < 0$), ceea ce arată că pentru fiecare $t > 0$ șirul $(u_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ este șirul coeficienților Fourier-trigonometrici pentru o funcție $u_t \in \mathfrak{D}$; într-adevăr scriind

$$u_t(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n(t)e^{inx} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(e_{in})\, e^{inx - n^2 t},$$

limita este uniformă în $]0, T[\times \mathbb{R}$, $T > 0$ (deoarece $|f(e_{in})e^{inx-n^2t}| = |f(e_{in})|\,e^{-n^2t} \leqslant$ $\leqslant ek!\,|n|^{r-2k}t^{-k}e^{-n^2t}$) ca și limita derivatelor parțiale de orice ordin

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u_t(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(e_{in})(in)^m(-n^2)^j e^{inx - n^2 t}.$$

Deci $u_t(x)=u(t,x)\in C^\infty(]0,T,[\times\mathbb{R})$, $T>0$ și cum u_N verifică ecuația căldurii, $u_N(t,x)=\sum_{n=-N}^{N} f(e_{in})e^{inx-n^2t}$, pentru orice N, va rezulta că și $u(t,x)=\lim_{N\to\infty} u_N(t,x)$ va verifica aceeași ecuație. Rămîne de văzut ce se întîmplă cînd $t\to 0$; calculînd $\langle u_t, v\rangle = \langle \Sigma u_n(t)e^{inx}, v(x)\rangle$ se deduce $u_t(v)=\Sigma u_n(t)v(e^{inx}) = \Sigma\, u_n(t)v_{-n}$ adică $u_t(v)$ este o serie uniform convergentă în raport cu t, $t\geqslant 0$, pentru că $|u_n(t)v_{-n}| = |f_n||v_n|e^{-n^2t}\leqslant k|n|^p e^{-n^2t}$, $k>0$, $p\leqslant -2$ (deoarece $v\in\mathcal{Z}$). Trecînd la limită, pentru $t\to 0$ se obține $u_t(v)\to \sum_n [\lim_{t\to 0} u_n(t)v_{-n}] = \sum_n f_n v_{-n} = \sum_n f_n\langle e^{inx}, v(x)\rangle = \langle \sum_n f_n e^{inx}, v(x)\rangle = \langle f, v\rangle$.

adică $u_t \xrightarrow{\mathcal{Z}'} f$ $(t\to 0)$.

Observația 3. Dacă f este distribuție periodică impară, deci dacă $f=-\check{f}$, unde $\check{f}(v)=f(\check{v})$, $v(\check{x})=v(-x)$, $v\in\mathcal{Z}$ rezultă

$$f_n = f(e_{in}) = f(e^{-inx}) = -f(e^{-inx}) = -f(e^{inx}) = -f_{-n}, \quad n\in\mathbb{Z}$$

și deci soluția problemei 2 se transcrie

$$u_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n e^{inx-n^2t} + f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{inx-n^2t} =$$

$$= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n e^{inx} + f_{-n} e^{-inx}) e^{-n^2t} = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n (e^{inx} - e^{-inx}) e^{-n^2t} =$$

$$= 2i \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx) e^{-n^2t}.$$

rezultînd o soluție impară în raport cu x ($f_0=0$ pentru că avem $f_0=-f_0$, deci $f_0=0$). Dacă f este distribuție periodică pară (deci $f=\check{f}$), se deduce că soluția corespunzătoare este de asemenea pară (în raport cu x), scriindu-se

$$u_t(x) = f_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(nx) e^{-n^2t}, \quad f_n = f(e^{-inx}) = f_{-n}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

În particular, dacă f este funcție impară pe $[-\pi,\pi]$ rezultă soluția

$$u(t,x) = 2i\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx) e^{-n^2t} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\, e^{-n^2t},$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx,$$

deoarece

$$f_n = f(e^{-inx}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos(nx) - i\sin(nx)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx;$$

dacă f este funcția pară pe $[-\pi, \pi]$ se deduce soluția

$$u(t, x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\, e^{-n^2 t}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx.$$

Observația 4. Dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sînt coeficienții Fourier ai distribuției periodice f, iar $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sînt coeficienții Fourier ai distribuției $g \in \mathcal{D}'$, atunci convoluția $f * g$ este un element din $\mathcal{D}'$ avînd coeficienții Fourier $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Fie $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin

$$g_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t + inx}; \tag{11}$$

evident, g_t este indefinit derivabilă în raport cu $x \in \mathbb{R}$ și $t > 0$; este periodică (cu perioada 2π) în raport cu x, pentru $t \geqslant 0$, deci $g_t \in \mathcal{D}'$ pentru orice $t \geqslant 0$; dezvoltarea în serie Fourier-trigonometrică a funcției (11) are evident coeficienții $c_n(t) = e^{-n^2 t}$, iar dacă $f \in \mathcal{D}'$ și este dezvoltabilă în serie Fourier-trigonometrică cu coeficienții $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, rezultă că are sens convoluția $g_t * f$, pentru orice $t > 0$ și se obține (deoarece $e_n(t) f_n = f_n e^{-n^2 t}$) dezvoltarea

$$(g_t * f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, f_n\, e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, e^{-n^2 t + inx}.$$

Comparînd cu rezultatele din teorema 1, se deduce

$$u_t(x) = (g_t * f)(x), \tag{12}$$

iar funcția g_t definită prin (11) se va numi *funcția Green* pentru problema 2 (se observă că această funcție Green nu depinde decît de ecuația căldurii, nedepinzînd de distribuția inițială f).

Observația 5. Funcția Green (11) a problemei 2 ca funcție de t are proprietatea de semigrup în raport cu operația de convoluție, adică

$$g_t * g_s = g_{t+s}, \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

(deoarece seria Fourier-trigonometrică pentru $g_t * g_s$ are coeficienții $e^{-n^2t} \cdot e^{-n^2s} = e^{-n^2(t+s)}$, $n \in \mathbb{Z}$), iar $\lim_{t \to 0} g_t(x) = \delta(x)$; în baza teoremei 1 : $u_t \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$, deci $g_t * f \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ pentru orice $f \in \mathcal{D}'$, iar pentru $f = \delta$ se deduce $g_t * \delta = g_t \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$.

2.2. Soluții distribuții periodice pentru ecuația coardei vibrante

Vom considera EDP (6) de la punctul 1 cu $a^2 = 1$ și $n = 1$ care apare în practică în probleme legate de vibrațiile mici ale unui mediu elastic omogen unidimensional (vibrațiile producîndu-se în planul xOu) : dacă poziția de echilibru a coardei este axa Ox, atunci $u(t, x)$ care verifică EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \tag{13}$$

definește deplasarea pe verticală a coardei în punctul x, la momentul t, în absența unor forțe perturbatoare exterioare.

Dacă se presupune lungimea coardei, în poziția inițială, egală cu π, iar aceasta este fixată la capete, vom avea

$$u(t, 0) = 0, \; u(t, \pi) = 0, \; t \geqslant 0, \tag{14}$$

iar pentru determinarea completă a lui u mai trebuie cunoscute condițiile inițiale

$$u(0, x) = f(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), \quad x \in [0, \pi] \tag{15}$$

(prima condiție definește poziția inițială a coardei, iar a doua condiție determină vitezele inițiale în fiecare punct $x \in]0, \pi[$).

Aplicînd procedeul din 2.1 în baza condițiilor la capete, vom formula următoarea problemă :

Problema 3. *Să se determine familia* $(u_t)_{t>0}$ *de distribuții periodice (cu perioada* 2π*), astfel încît să existe* u_t *pentru orice* $t > 0$, *iar în plus*

$$\ddot{u}_t = D^2 u_t, \text{ pentru orice } t > 0 \tag{16}$$

$$u_t \xrightarrow{\mathcal{D}'} f, \; \dot{u}_t \xrightarrow{\mathcal{D}'} g \text{ cînd } t \to 0 \tag{17}$$

pentru orice distribuții periodice impare f *și* g.

În acest enunț, s-a notat prin $\ddot{u}_t$ derivata $\frac{1}{h}(u_{t+h} - u_t) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \dot{u}_t$ $(h \to 0)$, și prin $\dot{u}_t$ derivata $\frac{1}{h}(\dot{u}_{t+h} - \dot{u}_t) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \ddot{u}_t$ $(h \to 0)$, iar ipoteza

de imparitate a distribuțiilor periodice f și g se datorește condițiilor (14).

Teorema 2. *Problema 3 admite o singură soluție.*

Deoarece f și g sînt distribuții periodice vor exista șirurile bilaterale $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ care definesc coeficienții Fourier trigonometrici pentru aceste distribuții, deci $f_n = f_n(e_{in}) = f(e^{-inx})$, $g_n = g(e_{in}) = g(e^{-inx})$, $n\in\mathbb{Z}$; presupunînd familia $(u_t)_{t\geqslant 0}$ din $\mathcal{D}'$ determinată, vom nota $u_n(t) = u_t(e_{in}) = u_t(e^{-inx})$, $n\in\mathbb{Z}$ și deci avem

$$u_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)e^{inx}. \tag{18}$$

Condițiile (16) și (17) implică existența derivatelor $\dot{u}_n(t)$, $\ddot{u}_n(t)$ pentru $t > 0$, iar în plus

$$\ddot{u}_n(t) = -n^2u_n(t),\ t > 0,\quad u_n(0) = f_n,\ \dot{u}_n(0) = g_n,\quad n\in\mathbb{Z};$$

rezultă

$$u_n(t) = f_n\cos(nt) + \frac{1}{n}\,g_n\sin(nt),\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$u_0(t) = f_0 + g_0t = f_0,\ (g_0 = 0)$$

Cum $u_n(t)$, $n\in\mathbb{Z}$ este astfel unic determinat, se deduce unicitatea lui u_t.
Deoarece

$$|u_n(t)| \leqslant |f_n|\cos(nt)| + \frac{1}{|n|}\,|g_n|\sin(nt)| \leqslant |f_n| + \frac{1}{|n|}\,|g|,\quad n\in\mathbb{Z},\quad n\neq 0$$

$$|u_0(t)| \leqslant |f_0|,$$

iar $u_n(t) \to f_n$ $(t \to 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ și

$|\dot{u}_n(t)| \leqslant |n|\,|f_n| + |g_n|$, $\dot{u}_n(t) = -n f_n\sin(nt) + g_n\cos(nt) \to g_n$ $(t\to 0)$, $n\in\mathbb{Z}$ se deduce că $(u_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ este șirul coeficienților Fourier-trigonometrici ai unei distribuții periodice pentru orice $t > 0$, care este derivabilă în raport cu t și verifică toate condițiile din problema 3.

2.3. Soluții distribuții periodice pentru ecuația lui Schrödinger

La iii, punctul 1, s-a definit ecuația lui Scrödinger, pentru care forma cea mai simplă este

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = i\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \tag{19}$$

și este asemănătoare cu ecuația căldurii analizată la 2.1; de aceea atașînd EDP (9) condițiile la limită

$$u(t, 0) = 0,\ u(t, \pi) = 0,\ t \geqslant 0 \text{ sau } \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0,\ t > 0 \tag{20}$$

și condiția inițială

$$u(0, x) = f(x),\ x\in[0, \pi] \tag{21}$$

se vor putea relua punct cu punct toate considerațiile din 2.1.

Vom formula direct următoarea problemă :

Problema 4. *Dîndu-se distribuția periodică* $f \in \mathcal{D}'$, *să se determine o familie* $(u_t)_{t>0}$ *de distribuții periodice astfel încît*

$$\dot{u}_t = \mathrm{i}D^2 u_t \quad t > 0$$

$$u_t \xrightarrow{\mathcal{D}'} f \text{ cînd } t \to 0$$

Teorema 3. *Problema 4 admite o singură soluție.*

Repetînd calculele de la demonstrația teoremelor 1 și 2, dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ este șirul coeficienților Fourier-trigonometrici pentru f, deci $f_n = f(e_{1n}) = f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})$ și $(u_t(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ se definește prin $u_n(t) = u_t(e_{1n}) = u_t(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})$; vom avea

$$\dot{u}_n(t) = -in^2 u_n(t), \quad u_n(0) = f_n,$$

rezultînd

$$u_n(t) = f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n^2 t} \quad t \geqslant 0,$$

ar șirul $(u_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ este unic determinat, ceea ce demonstrează unicitatea familiei $(u_t)_{t>0}$ cu $u_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n^2 t - nx)}$, iar cum $|u_n(t)| = |f_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n^2 t}| = f_n$, $n \in \mathbb{Z}$, se deduce și existența acestei familii de distribuții periodice.

Observația 6. *Spre deosebire de situația tratată în* 2.1, *aici nu se mai poate afirma că* u_t *este indefinit derivabilă în raport cu* t *și* x; *în baza egalității* $|u_n(t)| = |f_n|$, $n \in \mathbb{Z}$, u *va fi de o clasă dată dacă* f *este astfel încît să verifice inegalități adecvate* $\left(\text{de forma } |f_n| \leqslant \frac{A}{|n|^m}, \right.$ $\left. n \neq 0, m = 2, 3, \ldots\right)$.

2.4. Soluții distribuții periodice pentru ecuația Laplace în $\mathbb{R}^2$

În această secțiune vom avea în vedere rezolvarea următoarei probleme, numită *problema Dirichlet* (*interioară*) pentru discul unitate :

Problema 5. *Să se găsească o soluție a ecuației Laplace*

$$\Delta_2 u(x, y) = (D_x^2 + D_y^2)u(x, y) = 0$$

în discul unitate $x^2 + y^2 < 1$, *știind că* u *este continuă pentru* $x^2 + y^2 \leqslant 1$, *iar restricția lui* u *pentru* $x^2 + y^2 = 1$ *este o funcție continuă* f *dată*.

Din punct de vedere practic, această problemă poate apărea în următoarea circumstanță ; fie $u = u(t, x, y)$ temperatura la momentul t în punctul de coordonate (x, y) al unui disc material avînd raza egală cu unitatea, presupunînd marginea discului supusă la o temperatură constantă în timp (dar variind de la punct la punct), iar suprafața discului izolată termic față de exterior. Dacă se solicită existența în disc a unei eventuale stări de echilibru termic, va rezulta că practic u nu va depinde de t, iar temperatura în disc, este, în primă aproximație, soluție a problemei 5 (deoarece fenomenul de propagare a căldurii în disc este aproximativ modelat prin EDP $D_t u = a^2(D_x^2 + D_y^2)u$).

Rezolvarea problemei 5 devine mult mai comodă dacă în locul coordonatelor carteziene x și y se utilizează coordonatele polare r și θ, cînd u va deveni o funcție de r și θ, iar f $\left(f = u\Big|_{x^2+y^2=1}\right)$ va fi o funcție de θ (periodică, cu perioada 2π), unde

$u = u(r, \theta)$, $f = f(\theta)$, $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, iar problema 5 se va formula astfel:

Problema 5'. *Să se determine o soluție a ecuației Laplace* $\Delta_2 u(r, \theta) = 0$, *pentru* $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, *periodică, cu perioada* 2π, *în raport cu* θ, *continuă pentru* $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, *astfel încît*

$$u(r, \theta)\Big|_{r=1} = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Observația 7. Deoarece $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$, $|x| + |y| > 0$, avem

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta};$$

rezultă

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

deci

$$\Delta_2 u(r, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)u(r, \theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[ru(r, \theta)] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}(r, \theta).$$

În rezolvarea problemei 5′ este importantă funcția definită prin

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \operatorname{cis}(n\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}. \tag{22}$$

Definiția 1. *Funcția definită prin* (22) *pentru* $0 \leqslant r < 1$ *și* $-\infty < \theta < \infty$ *se numește nucleul lui Poisson pentru cerc.*

Să considerăm acum funcția $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$; presupunînd $|z| < 1$, avem

$$f(z) = (1+z)\frac{1}{1-z} = (1+z)(1+z+z^2+\ldots) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Cu $z = re^{i\theta}$, $\theta \leqslant r < 1$, rezultă

$$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta},$$

deci

$$\operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = P_r(\theta);$$

pe de altă parte

$$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = \frac{(1+re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-r^2+2r\,i\sin\theta}{|1-re^{i\theta}|^2} =$$

$$= \frac{1-r^2+2ri\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta},$$

așa încît avem

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = \operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}. \tag{23}$$

În cap. I punctul 1 s-a precizat că un șir $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathcal{C}$, cu proprietățile

i. $\varphi_n(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots,$

ii. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\,dx = 1$, $n = 1, 2, \ldots,$

iii. Pentru orice $\delta \in]0, \pi[$, $\displaystyle\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \varphi_n(x)\,dx \to 0$ $(n \to \infty)$,

se numește *șir care aproximează unitatea.*

Această definiție se poate generaliza considerînd în locul șirului $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ o familie de funcții în care indicele natural n se înlocuiește printr-o variabilă $t \in [a, b]$; astfel putem considera definiția următoare:

Definiția 2. *Familia* $(\varphi_t(x))$ *de funcții din* $\mathcal{C}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ *aproximează unitatea pentru* $t \to t_0 \in I$ *dacă*

i. $\varphi_t(x) \geq 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *și orice* $t \in I$,

ii. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_t(x)\, dx = 1$, *pentru orice* $t \in I$,

iii. $\displaystyle\int_\delta^{2\pi-\delta} \varphi_t(x)\, dx \to 0$, *cînd* $t \to t_0 \in I^-$, *pentru orice* $\delta \in]0, \pi[$.

Notînd $t = r$, $I = [0, 1[$, $x = \theta$, $P_r(\theta) = \varphi_r(\theta)$, are loc

Propoziția 1. *Nucleul lui Poisson pentru cerc aproximează unitatea dacă* $r \to 1$.

Pentru $r \in [0, 1[$ fixat, seria din (22) este uniform convergentă pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$, deci poate fi integrată termen cu termen; se deduce:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)\, d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\theta = 1$$

și ii este verificat. Condiția i din definiția 2 se verifică în baza lui (23) deoarece atît numitorul cît și numărătorul sînt strict pozitivi pentru $r \in [0, 1[$: $P_r(\theta) = (1 - r^2)\,|1 - e^{i\theta}|^{-1} > 0$. Avem $P_r(\theta) \in \mathcal{C}$ pentru $0 \leq r < 1$, deoarece nucleul lui Poisson este suma unei serii uniform convergente de funcții continue; în plus, din (23) se deduce că $P_r(\theta)$ este o funcție pară în raport cu θ, pentru orice $r \in [0, 1[$,

Fie $0 < \delta < \theta \leq \pi$ și să definim f: $[\delta, \theta] \to \mathbb{R}$, unde $f(t) = P_r(t) = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t}$;

calculînd $f'(t) = \dfrac{-2(1 - r^2) r \sin t}{(1 + r^2 - 2r\cos t)^2}$ rezultă $f'(t) < 0$ și deci f fiind strict descrescătoare pe intervalul $[\delta, 0]$, $0 < \delta < \theta \leq \pi$, neapărat $f(\delta) > f(\theta)$; așadar avem

$$P_r(\theta) < P_r(\delta) \quad \text{dacă} \quad 0 \leq r < 1 \quad \text{și} \quad 0 < \delta < |\theta| \leq \pi \tag{24}$$

Cum pentru δ fixat în intervalul $]0, \pi[$ avem

$$\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = \lim_{r\to 1} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\delta} = 0,$$

inegalitatea (24) arată că avem

$$\lim_{r\to 1} \int_\delta^{2\pi-\delta} P_r(\theta)\, d\theta = 2 \lim_{r\to 1} \int_\delta^{\pi} P(\theta) d\theta \leq 2 \lim_{r\to 1} \int_\delta^{\pi} P_r(\delta) d\theta = 2(\pi - \delta) \lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0$$

dacă ținem seama de faptul că $P_r(\theta)$ este funcție pară în raport cu θ.

Cu aceste pregătiri, se poate enunța rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teorema 4. *Pentru orice distribuție periodică (cu perioada 2π) $f \in \mathcal{D}'$, există o singură funcție $u(r, \theta)$ definită și indefinit derivabilă în discul unitate deschis, care verifică în acest disc ecuația Laplace $\Delta_2 u(r, \theta)$ și astfel încît $u(r, \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}'} f(\theta)$, cînd $r \to 1$.*

În plus, dacă $f \in \mathcal{C}$, atunci $u(r, \theta) \to f(\theta)$ cînd $r \to 1$, uniform.

Funcția u se poate scrie sub forma convoluției

$$u(r, \theta) = P_r(\theta) * f(\theta). \tag{25}$$

Dacă $\Delta_2 u(r, \theta) = 0$, în baza calculelor de la observația 7 vom avea

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

iar în plus condiția $u(1, \theta) = f(\theta)$ va trebui să fie verificată și u împreună cu f vor fi periodice (cu perioada 2π). Presupunînd că f are coeficienții Fourier-trigonometrici $f_n = f(e_{1n}) = f(e^{-inx})$, iar $u(r, \theta) = u_r(\theta)$ are coeficienții Fourier $(u_n(r))_{n \in \mathbb{Z}}$ ecuația (26) se va verifica dacă u_n este soluție a ED

$$r^2 u_n'' + r u_n' - n^2 u_n = 0, \quad 0 < r < 1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

iar $u_n(1) = f_n$; singura soluție (pentru n fixat) va fi

$$u_n(r) = f_n r^{|n|}$$

care conduce la soluția-distribuție

$$u_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n r^{|n|} e^{in\theta} = f * P_r.$$

(ultima egalitate fiind o consecință a faptului că nucleul lui Poisson pentru cerc are coeficienții Fourier-trigonometrici $(r^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$). Deoarece P_r aproximează unitatea, avem $P_r \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ $(r \to 1)$ și deci

$$u_r(\theta) = f(\theta) * P_r(\theta) \xrightarrow{\mathcal{D}'} f(\theta) * \delta(\theta) = f(\theta) \quad (r \to 1).$$

Dacă $f \in \mathcal{C}$, atunci conform definiției convoluției din $\mathcal{C}$, avem

$$u_r(\theta) = f(\theta) * P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2) f(\varphi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi,$$

rezultînd $u_r(\theta) \in C^\infty$ în discul unitate deschis (conform teoriei integralelor cu parametru, avînd în vedere că funcția $\dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)}$ este indefinit derivabilă în toate variabilele ei dacă $0 \leqslant r < 1$). Cum $P_r(\theta)$ verifică ecuația Laplace, aceeași proprietate o avea și $u_r(\theta)$. Pentru a încheia demonstrația teoremei mai trebuie arătat că $u_r(\theta)$ este indefinit derivabilă în r și θ și în cazul în care $f \in \mathcal{D}'$; pentru aceasta, se poate utiliza egalitatea

$$P_r * P_s = P_{rs}, \quad 0 \leqslant r, s < 1,$$

care rezultă direct din definiția lui P_r și din faptul că șirul coeficienților Fourier-trigonometrici pentru P_r fiind $(r^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$, pentru convoluția $P_r * P_s$ același șir va fi $(r^{|n|}s^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$, adică coincide cu șirul $((rs)^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ care definește pe P_{rs}. Fie $s=\frac{r}{R}$ cu $r<R<1$; avem

$$u_r(\theta) = P_r(\theta)*f(\theta) = P_{Rs}(\theta)*f(\theta) = (P_{Rr} * P_s)(\theta)*f(\theta) =$$
$$= P_s(\theta)*[P_R(\theta)*f(\theta)] = P_s(\theta)*u_R(\theta).$$

Cum $u_R(\theta)$ este funcție continuă pentru orice $R<1$, va rezulta $P_s*u_R\in C^\infty$ în raport cu θ; deoarece în acest caz, se poate scrie

$$u_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_s(\theta-\varphi)u_R(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\frac{r}{R}}(\theta-\varphi)u_R(\varphi)\,d\varphi,$$

rezultînd și posibilitatea derivării, de un număr arbitrar de ori, în raport cu $r\in[0,1]$.

Consecința 1. *Fie* $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ *și* $f:\partial D\to\mathbb{R}$ *continuă; dacă* u *este soluția problemei Dirichlet 5, atunci* u *este partea reală a funcției olomorfe în* D *definită prin*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}f(\varphi)\,d\varphi. \tag{27}$$

În baza teoremei 4, avem

$$u(r,\theta) = P_r(\theta)*f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi)f(\varphi)\,d\varphi,$$

iar prin utilizarea egalității (23), va rezulta

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\mathrm{Re}\,\frac{1+re^{i(\theta-\varphi)}}{1-re^{i(\theta-\varphi)}}\right]f(\varphi)\,d\varphi,$$

adică

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}\right)f(\varphi)\,d\varphi;$$

notînd $z=re^{i\theta}$, rezultă (27) și deoarece $|z|=r<1$, avem $z\in D$.

Toate considerațiile anterioare au fost realizate în ipoteza că u este funcție armonică în discul unitate deschis; înlocuind însă în formulele anterioare r prin $\frac{r}{R}$ se vor obține rezultate valabile pentru

discul centrat în origine și având raza R. Astfel, funcția u armonică pentru $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ cu proprietatea $u(R, \theta) = f(\theta)$, va putea fi scrisă sub forma

$$u(r, \theta) = P_{\frac{r}{R}}(\theta) * f(\theta)$$

dacă $f \in \mathfrak{L}'$, care conduce la egalitatea

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(\varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} \, d\varphi, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{28}$$

dacă $f \in \mathfrak{C}$; egalitatea (28) poartă numele de *formula lui Poisson pentru cerc*.

În fine, dacă notăm prin $D_R \subset \mathbb{C}$ mulțimea $\{z \mid |z| < R\}$, funcția olomorfă în D_R definită pe ∂D_R prin valorile părții ei reale ($\operatorname{Re} g = f$ pe ∂D_R) va putea fi scrisă sub forma

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R\, e^{i\varphi} + z}{R\, e^{i\varphi} - z} f(\varphi) \, d\varphi;$$

scriind $\zeta = Re^{i\varphi}$, avem $\zeta \in \partial D_R$ (deoarece $|\zeta| = R$), $f(\varphi) = f_1(\zeta)$, avem $d\zeta = i\, Re^{i\varphi}\, d\varphi = i\zeta\, d\varphi$ și ultima egalitate se transcrie sub forma

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = R} \frac{\zeta + z}{\zeta(\zeta - z)} f_1(\zeta) \, d\zeta \tag{27'}$$

numită *formula lui Schwartz*. Această formulă are avantajul că uneori g poate fi obținut prin aplicarea teoremei reziduurilor în membrul drept al egalității (27').

3. Clasificări și forme canonice pentru ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi

La punctul 2 s-au discutat și rezolvat unele probleme privind determinarea soluțiilor unor EDP simple; s-a putut constata că pentru ecuații diferite se rezolvă probleme diferite, iar una și aceeași problemă conduce la soluții care au proprietăți distincte de la o ecuație la alta. De exemplu, pentru EDP a căldurii sau a coardei vibrante s-a rezolvat o problemă mixtă (formată din condiții inițiale și condiții la limită) pe cînd, pentru EDP Laplace s-a rezolvat o problemă la limită; pentru ecuația căldurii și ecuația Laplace soluțiile sînt funcții

indefinit derivabile, dar pentru EDP a coardei vibrante sau pentru EDP a lui Schrödinger soluțiile nu mai au această proprietate. De aceea trebuiesc definite condițiile în care o EDP admite soluții pentru o problemă sau pentru o altă problemă, iar o primă condiție este legată de tipul ecuației considerate. De aceea, vom face cîteva considerații elementare privind clasificarea și formele canonice posibile pentru EDP liniare și de ordinul al doilea.

3.1. Cazul ecuațiilor cu derivate parțiale cu două variabile independente

Fie

$$Lu = Au_{xx} + 2B\,u_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \qquad (1)$$

o EDP, în care $u_x = p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = r = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = s = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $u_{yy} = t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $A, \ldots, G$ sînt funcții reale definite pentru $(x, y) \in D_2 \subset \mathbb{R}_2$ astfel încît $|A| + |B| + |C| > 0$, iar $u \in C^2(D_2)$ verifică (1) în D_2 sau într-o submulțime G_2 a lui D_2 (de regulă D_2 și G_2 se presupun domenii); în acest caz (1) va defini o EDP liniară cu două variabile independente, iar u va fi o soluție a EDP (1).

Definiția 1. *Dacă $\gamma \subset D_2$ este un drum neted, prin problemă Cauchy clasică pentru* EDP (1) *relativă la γ se va înțelege determinarea soluției sau a soluțiilor de clasă C^2 în vecinătatea lui γ ale acestei ecuații care verifică pe γ condițiile*

$$u\Big|_\gamma = f; \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\gamma = g, \qquad (2)$$

unde $f, g : \gamma \to \mathbb{R}$ sînt funcții date, iar l este o direcție din $\mathbb{R}^2$. Reamintim că dacă u este diferențiabilă în $D_2 \subset \mathbb{R}^2$, iar $l = (l_1, l_2)$, $l_1^2 + l_2^2 = 1$, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\,l_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\,l_2, \qquad (3)$$

unde atît derivata lui u după direcția l cît și derivatele parțiale ale aceleiași funcții se calculează în punctul $(x_0, y_0) \in D_2$.

Observația 1. *Dacă γ se definește prin $\gamma = \{(x, y)\ y = \varphi(x), x \in I, I \subset \mathbb{R}\}$ atunci prin $u\Big|_\gamma$ și $\dfrac{\partial u}{\partial l}\Big|_\gamma$ calculată în punctul $(x_0, y_0) \in \gamma$ se înțelege*

$$u(x_0, y_0)\Big|_\gamma = u[x_0, \varphi(x_0)], \quad \frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0)\Big|_\gamma = \frac{\partial u}{\partial x}[x_0, \varphi(x_0)]\,l_1 + \frac{\partial u}{\partial y}[x_0, \varphi(x_0)]\,l_2, \quad x_0 \in I,$$

iar condițiile Cauchy (2) *se transcriu*

$$u\Big|_\gamma = f(x_0), \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\gamma = g(x_0), \quad x_0 \in I.$$

Dacă $\gamma = \{(x, y) | x = \psi(y), y \in J, J \subset \mathbb{R}\}$, *atunci avem*

$$u(x_0, y_0)\Big|_\gamma = u[\psi(y_0), y_0], \frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0)\Big|_\gamma = \frac{\partial u}{\partial x}[\psi(y_0), y_0]\, l_1 +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}[\psi(y_0), y_0]\, l_2, \; y_0 \in J,$$

iar (2) *se scriu*

$$u\Big|_\gamma = f(y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\gamma = g(y_0), \quad y_0 \in J,$$

iar dacă $\gamma = \{(x, y) | x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t), t \in I, I \subset \mathbb{R}\}$, *vom avea* (dacă $x_0 = \varphi_1(t_0)$, $y_0 = \varphi_2(t_0)$, $t_0 \in I$)

$$u(x_0, y_0)\Big|_\gamma = u[\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)], \frac{\partial u}{\partial l}(x_0, y_0)\Big|_\gamma =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}[\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)]\, l_1 + \frac{\partial u}{\partial y}[\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)] l_2, \; t_0 \in I$$

și deci (2) *devin*

$$u\Big|_\gamma = f(t_0), \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\gamma = g(t_0), \quad t_0 \in I.$$

Observația 2. Direcția l din definiția 1 poate depinde de punctul ales pe γ, deci $l = l(x, y) = (l_1(x, y), l_2(x, y))$, $(x, y) \in \gamma$; în acest caz cînd se calculează $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ în l_1 și l_2 se vor înlocui x și y prin valorile corespunzătoare.

Observația 3. În definiția 1 funcțiile f și g trebuie presupuse arbitrare (de o clasă dată) ceea ce implică o restricție asupra lui l: direcția l nu trebuie să fie tangentă la γ în nici un punct al lui γ; într-adevăr, dacă în punctul $(x_0, y_0) \in \gamma$ am avea $l = \lambda\tau$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τ fiind versorul tangentei la γ în (x_0, y_0) (deci dacă $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, avem $\tau_1(x_0, y_0) = \dot{\varphi}_1(t_0)$, $\tau_2(x_0, y_0) = \dot{\varphi}_2(t_0)$); în ipoteza $\gamma = \{(x, y) | x = \varphi_1(t), y = \varphi_2(t), t \in I\}$ ar rezulta

$$\frac{l_1}{\tau_1} = \frac{l_2}{\tau_2} \text{ sau } \frac{l_1}{\dot{\varphi}_1} = \frac{l_2}{\dot{\varphi}_2}.$$

Cum $\left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_\gamma$ în punctul $(x_0, y_0) \in \gamma$ înseamnă

$$\lim_{t \to t_0} \frac{u[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] - u[\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)]}{|t - t_0|} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{|t - t_0|} = \pm f'(t_0),$$

ar rezulta $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\gamma l_1 + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_\gamma l_2 = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x}\tau_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\tau_2\right) = \lambda \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_\gamma$, adică $g(t_0) = \pm \lambda f'(t_0)$, deci f și g n-ar fi oarecari (se ia în considerație fie semnul $+$, fie semnul $-$ în funcție de sensul ales pe τ). În baza calculelor de la observația 3 se deduce că în ipoteza $l \neq \tau$ sistemul în $\left.p\right|_\gamma$, $\left.q\right|_\gamma$

$$\begin{cases} \left.p\right|_\gamma \dot{\varphi}_1 + \left.q\right|_\gamma \dot{\varphi}_2 = f' \\ \left.p\right|_\gamma l_1 + \left.q\right|_\gamma l_2 = g \end{cases}$$

va avea determinantul nenul și deci pe γ vor fi unic determinate, în fiecare punct, valorile derivatelor parțiale p și q. Calculînd $\left.\dot{p}\right|_\gamma$ și $\left.\dot{q}\right|_\gamma$ avem

$$\left.\dot{p}\right|_\gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\gamma\right) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_\gamma \dot{\varphi}_1 + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right|_\gamma \dot{\varphi}_2 = \left.r\right|_\gamma \dot{\varphi}_1 + \left.s\right|_\gamma \dot{\varphi}_2$$

$$\left.\dot{q}\right|_\gamma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_\gamma\right) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right|_\gamma \dot{\varphi}_1 + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_\gamma \varphi_2 = \left.s\right|_\gamma \dot{\varphi}_1 + \left.t\right|_\gamma \dot{\varphi}_2;$$

deoarece u verifică EDP (1) în D_2, vom putea scrie următorul sistem :

$$\begin{cases} Ar + 2Bs + Ct = \alpha \\ \dot{\varphi}_1 r + \dot{\varphi}_2 s = \dot{p} \\ \dot{\varphi}_1 s + \dot{\varphi}_2 t = \dot{q} \end{cases} \qquad (3')$$

cu $\alpha = -(Dp + Eq + Fu + G)$, unde toate valorile sînt calculate într-un punct oarecare al lui γ ; sistemul (3′) are determinantul egal cu $A\dot{\varphi}_2^2 - 2B\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + C\dot{\varphi}_2^2$ și deci dacă acest determinant nu este nul, atunci pe γ vor fi unic determinate și valorile derivatelor parțiale de ordinul al doilea r, s și t. În această situație, în vecinătatea lui γ, utilizînd dezvoltarea Taylor, se poate scrie

$$u(x, y) \approx u(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}[(x - x_0)p(x_0, y_0) + (y - y_0)q(x_0, y_0)] + \qquad (4)$$

$$+ \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 r(x_0, y_0) + 2s(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + t(x_0 y_0)(y - y_0)^2].$$

Dacă A, B, C și α admit derivate parțiale de un ordin oarecare, atunci calculînd în continuare derivatele parțiale de ordinul al treilea, al patrulea etc., utilizînd EDP (1) și derivatele parțiale obținute anterior, în (4) pot apărea și derivatele de ordin superior (ceea ce mărește precizia în aproximarea considerată); calcule elementare arată că pentru determinarea derivatelor funcțiilor r, s, t se obțin sisteme liniare al căror determinant va fi nenul dacă determinantul sistemului (3′) este nenul.

Definiția 2. *Dacă* $\gamma \subset D_2$, $\gamma = \{(x, y) | \; x = \varphi_1(t), \; y = \varphi_2(t), \; t \in I, \; \varphi_1, \; \varphi_2 \in C^1(I)\}$ *este astfel încît se verifică egalitatea*

$$A\dot{\varphi}_2^2 - 2B\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + C\dot{\varphi}_1^2 = 0 \tag{5}$$

unde A, B, C *sînt definiți prin* EDP (1), *atunci* γ *se numește curbă caracteristică a acestei ecuații, iar* (5) *poartă numele de ecuația caracteristicilor atașată* EDP 1 (în (5) avem $A = A[\varphi_1(t), \; \varphi_2(t)]$, $B = B = [\varphi_1(t), \; \varphi_2(t)]$, $C = C\,[\varphi_1(t), \; \varphi_2(t)]$).

Observația 4. *Dacă* γ *se scrie* $y = \varphi(x)$, $x \in I$, *ecuația caracteristicilor* (5) *se transcrie* (deoarece $x = t$, $y = \varphi(t)$),

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0, \; y' = \dot{\varphi}, \tag{5'}$$

iar dacă γ *este definit prin* $x = \psi(y)$, $y \in J$, *aceeași ecuație se va scrie sub forma* (deoarece $x = \psi(t)$, $y = t$, $t \in J$)

$$Cx'^2 - 2Bx' + A = 0, \; x' = \dot{\psi}. \tag{5''}$$

Observația 5. *Din rezultatele anterioare se deduce că dacă în definiția 1* γ *este o curbă caracteristică a* EDP (1), *atunci problema Cauchy* (2) *nu admite soluții dacă* f *și* g *sînt funcții oarecare sau admite o infinitate de soluții dacă între* f *și* g *se stabilește o anumită legătură* (vezi observația 3). Vom presupune acum $(x, y) \in D_2$ și vom scrie ecuația caracteristicilor (5′) sub forma

$$A(x, \; y)\, y'^2(x) - 2B(x, \; y)\, y'(x) + C(x, \; y) = 0; \tag{6}$$

rezultă deci că ecuația caracteristicilor EDP (1) poate fi interpretată ca o ED de ordinul întîi, iar soluțiile acesteia (sau caracteristicile EDP (1)) vor trebui discutate în funcție de discriminantul $AC - B^2$ al formei pătratice (5).

Definiția 3. a. *Dacă în vecinătatea* V_{x_0, y_0} *a unui punct* $(x_0, y_0) \in D_2$ *avem*

$$(AC - B^2)(x, y) > 0 \;\; (x, \; y) \in V_{x_0, y_0} \subset D_2$$

se spune că EDP (1) *este de tip hiperbolic în această vecinătate.*

b. *Dacă în vecinătatea* V_{x_1, y_1} *a unui punct* $(x_1, y_1) \in D_2$ *avem*

$$(AC - B^2)(x, y) = 0, \; (x, y) \in V_{x_1, y_1} \subset D_2$$

atunci EDP (1) *este de tip parabolic în* V_{x_1, y_1}.

c. *Dacă în vecinătatea* V_{x_2, y_2} *a unui punct* $(x_2, y_2) \in D_2$ *avem*

$$(AC - B^2)(x, y) < 0, \quad (x, y) \in V_{x_2, y_2} \subset D_2,$$

atunci EDP (1) *va aparține tipului eliptic în această vecinătate.*

Așadar EDP (1) va aparține în mod obligatoriu unuia din tipurile din definiția 3, fiind posibil ca în diverse submulțimi deschise ale lui D_2, această ecuație să fie de tipuri diferite.

Exemplul 1. În cazul ecuației căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avem (cu t în loc de y) $A = a^2$, $B = C = 0$ și deoarece $AC - B^2 = 0$ în $\mathbb{R}^2$, rezultă că această ecuație este de tip parabolic în $\mathbb{R}^2$, caracteristicile ei fiind soluțiile ED $a^2 y'^2 = 0$ adică $y = y_0 \in \mathbb{R}$.

2. Pentru ecuația coardei vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avem (cu t în loc de y) $A = a^2$, $B = 0$, $C = -1$, deci cum $B^2 - AC = a^2 > 0$ această ecuație va fi de tip hiperbolic în $\mathbb{R}^2$; ecuația caracteristicilor scriindu-se $a^2 t'^2 = 1$, $t' = \frac{dt}{dx}$ rezultă ED

$$dx + a\,dt = 0, \quad dx - a\,dt = 0$$

și deci caracteristicile ecuației coardei vibrante vor fi două familii de drepte din $\mathbb{R}^2$:

$$x + at = c_1, \quad x - at = c_2$$

3. În cazul ecuației lui Laplace

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

deoarece $A = C = 1$, $B = 0$, rezultă $B^2 - AC = -1$ și ecuația în cauză va fi de tip eliptic în $\mathbb{R}^2$; ecuația caracteristicilor va fi $y'^2 + 1 = 0$ și nu va admite soluții reale (caracteristicile sînt curbe imaginare din $\mathbb{R}^2$).

De remarcat că prin schimbarea reperului din $\mathbb{R}^2$, adică prin trecerea de la variabilele carteziene (x, y) la variabilele (ξ, η) (avem $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ cu $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$, $\xi(x, y) = c_1$, $\eta(x, y) = c_2$ vor defini liniile de nivel constant ale transformării, care, în general, nu sînt linii drepte) EDP (1) nu-și modifică

nici forma, nici tipul. Într-adevăr, în baza formulelor de derivare a funcțiilor compuse, vom avea:

$$
\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

(în ipoteza că transformarea în cauză este un difeomorfism de clasă C^2, adică $\xi(x, y),\ \eta(x, y) \in C^2(D_2)$ și $\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$ în D_2). Înlocuind în EDP (1) rezultă ecuația transformată

$$Lu = au_{\xi\xi} + 2bu_{\xi\eta} + cu_{\eta\eta} + du_\xi + eu_\eta + fu + g, \tag{1'}$$

în care

$$
\begin{aligned}
a &= A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\
b &= A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\,\xi_y\eta_y \\
c &= A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\
d &= A\xi_{xx} + 2B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y = L\xi - F\xi - G \\
e &= A\eta_{xx} + 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y = L\eta - F\eta - G \\
f &= F,\ g = G
\end{aligned}
\tag{7'}
$$

(evident $a, b, c, \ldots, g$ vor depinde de variabilele ξ și η, iar $A = A[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)], \ldots, G = G[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$, $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ fiind transformarea inversă corespunzătoare transformării $\xi = \xi(x, y),\ \eta = \eta(x, y)$. Calculînd $b^2 - ac^2$ se deduce

$$b^2 - ac = \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right]^2 (B^2 - AC) \tag{7''}$$

deci EDP (1′) are același tip ca EDP (1).

Între ED (5) a caracteristicilor și coeficienții a și c din (7′) se poate stabili o legătură; dacă $\xi \in C^1$ este astfel încît avem

$$
\begin{aligned}
A(x, y)\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y)\right]^2 + 2B(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y) + \\
+ C(x, y)\left[\frac{\partial \xi}{\partial y}(x, y)\right]^2 = 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

atunci scriind $\xi(x, y) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se va obține (pentru un α dat) un drum neted γ din R^2 care parametrizat sub forma $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ conduce la relația

$$\xi[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] = \alpha, \quad t \in I.$$

Prin derivare, în raport cu t, pe γ vom avea $\left(\text{în ipoteza } \xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0\right)$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \circ \gamma\right) \varphi_1'(t) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \circ \gamma\right) \varphi_2'(t) = 0 \text{ sau } -\left(\frac{\varphi_2'}{\varphi_1}\right)(t) = \left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) \circ \gamma;$$

deoarece (5) se transcrie

$$A\left(\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'}\right)^2 + 2B\left(-\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'}\right) + C = 0,$$

prin înlocuirea lui $-\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'}$ prin $\frac{\xi_x}{\xi_y}$ se obține (8), adică de-a lungul lui γ avem $a = 0$. Prin urmare, dacă ED (5) a caracteristicilor admite două soluții distincte ξ și η (funcțiile ξ și η fiind astfel încît $\xi(x, y) = \alpha_1$, $\eta(x, y) = \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ să fie soluții ale ED (5)) trecînd de la reperul cartezian xOy la reperul curbiliniu $\xi O \eta$ EDP (1') se transcrie sub forma simplificată

$$2b(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + d(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + e(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + f(\xi, \eta)u + g(\xi, \eta) = 0, \tag{1''}$$

în care $b \neq 0$ (deoarece dacă $b = 0$, cum $a = c = 0$ din (7'') rezultă $B^2 - AC = 0$ și ecuația (1) ar fi de tip parabolic, ceea ce ar antrena identificarea funcțiilor ξ și η deci $\xi O \eta$ n-ar fi un reper). Împărțind cu b, din (1'') se deduce EDP simplă $\left(a_1 = \frac{d}{2b},\ b_1 = \frac{e}{2b},\ c_1 = \frac{f}{2b},\ d_1 = \frac{g}{2b}\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c_1(\xi, \eta)u + d_1(\xi, \eta) = 0, \tag{9}$$

care poate înlocui EDP (1) în cazul $B^2 - AC \neq 0$.

Observația 6. Dacă $B^2 - AC \neq 0$, ED a caracteristicilor se va descompune în două ED; astfel dacă luăm în discuție ED (5') (în

ipoteza $A \neq 0$) și notăm

$$r_1 = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad r_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

$$r_1 + r_2 = \frac{2B}{A} \qquad r_1 r_2 = \frac{C}{A}$$

rezultă

$$Ay'^2 - 2by' + C = A(y' - r_1)(y' - r_2).$$

Prin urmare, dacă $Ay'^2 - 2By' + C = 0$, se deduc ED

$$y' - r_1 = 0, \; y' - r_2 = 0,$$

din care se obțin egalitățile

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} - r_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} - r_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

dacă scriem soluția generală a ED $y' - r_1 = 0$ sub forma $\xi(x, y) = \alpha_1$ și soluția generală a ED $y' - r_2 = 0$ sub forma $\eta(x, y) = \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Din (9), calculînd determinantul funcțional $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ avem $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = (r_1 - r_2) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}$; deci dacă $r_1 \neq r_2$ acest determinant funcțional este nenul și transformarea $(x, y) \to (\xi, \eta)$ este un difeomorfism (de clasă C^2 dacă $A, B, C \in C^1$). Prin urmare, în cazul eliptic sau hiperbolic, raportînd EDP (1) la caracteristicile ei, va rezulta EDP (9).

Există o diferență esențială între tipurile eliptic și hiperbolic, deoarece în primul caz avem $r_2 = \bar{r}_1$ (r_1 și r_2 fiind funcții cu valori complexe pentru $x, y \in \mathbb{R}$), iar în al doilea caz r_1 și r_2 au valori reale; deci în cazul tipului eliptic funcțiile A, B, C trebuie presupuse analitice pentru a putea da un sens operației de derivare, pe cînd în cazul hiperbolic aceste funcții trebuie presupuse doar de clasă C^1.

Observația 7. În cazul eliptic (deci presupunînd A, B, C analitice în domeniul $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ în variabilele x și y, iar $(B^2 - AC)(x, y) < 0$ dacă $(x, y) \in D_2$) vom avea

$$\xi(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \; \eta(x, y) = \varphi(x, y) - i\psi(x, y)$$

și va rezulta prin calcul direct

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}.$$

Așadar, în cazul tipului eliptic, pentru a nu avea în EDP (9) variabile complexe se poate considera reperul real $\varphi O \psi$ cînd EDP (9) se transcrie

$$\Delta_2 u + a_2(\varphi, \psi)\frac{\partial u}{\partial \varphi} + b_2(\varphi, \psi)\frac{\partial u}{\partial \psi} + c_2(\varphi, \psi)\, u + d_2(\varphi, \psi) = 0, \quad (9')$$

Δ_2 fiind operatorul lui Laplace (în variabilele independente φ, ψ).

Observația 8. În ipoteza $B^2 - AC > 0$ în D_2, forma canonică a EDP (1) va fi dată de EDP (9); scriind însă

$$\varphi = \xi + \eta, \quad \psi = \xi - \eta$$

vom avea $\dfrac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta} = \dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial \psi^2}$ și se va obține din (9) a doua formă canonică pentru EDP (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + a_3(\varphi, \psi)\frac{\partial u}{\partial \varphi} + b_3(\varphi, \psi)\frac{\partial u}{\partial \psi} + c_3(\varphi, \psi)\, u + d_3(\varphi, \psi) = 0.$$

În sfîrșit, în cazul tipului parabolic în D_2 al EDP (1), vom avea o singură familie de caracteristici reale $\xi(x, y) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; cu transformarea $(x, y) \to (\xi, \eta)$, $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, unde η este o funcție de clasă $C^2(D_2)$ astfel încît $\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$, din (7') se deduce $a = 0$, $c \neq 0$, iar deoarece în acest caz avem $r_1 = r_2 = \dfrac{B}{A}$, coeficientul b se scrie $2b = A(\xi_x + r_1\xi_y)(\eta_x + r_2\eta_y) + A(\xi_x + r_2\xi_y)(\eta_x + r_2\eta_y)$ adică $b = 0$ (deoarece $\xi_x + r_1\xi_y = 0$, $\xi_x + r_2\xi_y = 0$). Așadar, în acest caz forma canonică a EDP (1) va fi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a_4(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b_4(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c_4(\xi, \eta)u + d_4(\xi, \eta) = 0$$

Observația 9. În formele canonice anterioare s-a presupus $A \neq 0$; dacă însă $A = 0$, dar $C \neq 0$, considerațiile rămîn valabile cu condiția considerării ED (5'') în locul ED (5'); dacă avem $A = 0$, $C = 0$,

neapărat $B \neq 0$ (altfel EDP (1) n-ar fi o ecuație de ordinul al doilea) și ecuația în cauză se va scrie direct sub forma (9) (prin împărțire la B și cu x, y în loc de ξ și η).

De remarcat că în mare parte rezultatele din acest punct au ca punct de plecare definiția 1 a probemei Cauchy pentru EDP (1); rezultă că în cazul hiperbolic sau parabolic (cînd există caracteristici reale) trebuie ca γ să nu coincidă pe nici o porțiune a sa cu un arc de caracteristică, iar în cazul tipului eliptic γ poate fi orice drum din $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ (deoarece caracteristicile EDP (1) sînt curbe imaginare). Dar acest avantaj nu poate fi aplicat practic deoarec, de regulă, la acest tip de ecuații nu se dezvoltă probleme Cauchy ci probleme la limită (în care soluția este globală, trebuind aflată în D_2, nu doar în vecinătatea lui γ).

3.2. Teorema Cauchy–Kovalevskaia și probleme corect puse în sensul lui Hadamard

Rămînînd în cazul EDP cu două variabile independente (liniare sau nu) se poate demonstra următorul rezultat fundamental:

Teorema 1. (*Cauchy-Kovalevskaia*). *Fie* $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$, $u_0 = u_0(x_2)$, $u_1 = u_1(x_2)$ *funcții analitice în variabilele lor în vecinătatea originii. Atunci există o singură soluție* $u = u(x, y)$ *a* EDP

$$u_{xx} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}) \tag{11}$$

analitică în vecinătatea originii din $\mathbb{R}^2$, *care verifică datele inițiale*

$$u(x, y)\Big|_{x=0} = u_0(y), \; u_x(x, y)\Big|_{x=0} = u_1(y). \tag{12}$$

Nu vom da demonstrația acestei teoreme dar vom face cîteva considerații legate de acest rezultat; astfel, teorema 1 asigură existența și unicitatea soluției analitice a EDP (11) care verifică condițiile inițiale (12) dacă f, u_0 și u_1 sînt funcții analitice. Cu alte cuvinte, avem

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_{jk} x^j y^k, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

dacă funcțiile f, u_0 și u_1 sînt dezvoltabile în serie Taylor convergentă, seria (13) fiind convergentă pentru $|x|$ și $|y|$ suficient de mici; coeficienții u_{jk} se pot determina cu ajutorul valorilor funcțiilor f, u_0 și u_1 și al derivatelor acestora în origină; pentru aceasta se utilizează

faptul că din (13) rezultă

$$u_{jk} = \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k} u}{\partial x^j \partial y^k}(x, y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} \qquad j,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Prin urmare, vom avea, folosind condițiile (12):

$$u_{0k} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x, y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} [u(0, y)]_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{k!} u_0^{(k)}(0),\ k = 0,\ 1,\ \ldots$$

$$u_{1k} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x\, \partial y^k}(x, y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(0, y)\right]_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{k!} u_1^{(k)}(0),\ k = 0,\ 1,\ \ldots,$$

utilizînd acum și EDP (11) vom avea pentru $j \geqslant 2$:

$$u_{jk} = \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k-2}}{\partial x^{j-2} \partial y^k} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k-2} f}{\partial x^{j-2} \partial y^k}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots$$

Rezultă deci unic determinate valorile coeficienților dezvoltării din (13). Teorema 1 însă nu afirmă nimic în legătură cu existența unor soluții neanalitice ale EDP (11), care să verifice condițiile inițiale (12); dacă însă EDP (11) este liniară (deci de forma (1)) se poate arăta că soluția (13) este singura posibilă (cu alte cuvinte, în cazul EDP liniare (1) în care coeficienții $A, \ldots, F$ și termenul liber G sînt funcții analitice, singura soluție care verifică datele inițiale (12) cu u_0 și u_1 analitice este soluția (13)).

Teorema 1 este valabilă și în cazul unei ecuații în care funcția necunoscută depinde de un număr oarecare de variabile, păstrînd însă condițiile de analiticitate pentru f, u_0 și u_1, după cum este valabilă și în cazul sistemelor de ecuații cu derivate parțiale (în care numărul ecuațiilor este egal cu numărul funcțiilor necunoscute).

În enunțul teoremei 1 trebuie făcută legătura dintre forma EDP (11) și condițiile inițiale (12); de obicei, se spune că (12) definește o *problemă Cauchy restrînsă* pentru o EDP de forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \qquad (14)$$

iar teorema 1 afirmă că în ipoteza posibilității explicitării lui u_{xx} din (14), dacă f, u_0 și u_1 sînt analitice, va exista o soluție analitică (13). Evident, dacă avem în vedere definiția 1, problema Cauchy restrînsă (12) va fi un caz particular al problemei Cauchy considerată prin această definiție (γ va coincide cu un segment al dreptei $x = 0$ iar derivata u_x va fi evident o derivată care se încadrează în restricțiile de la observația 3 : dacă se cunoaște u_0 astfel încît $u(0, y) = u_0(y)$, se vor putea obține doar derivatele $\dfrac{\partial^k u}{\partial y^k}(0, y) = u_0^{(k)}(y)$ nu și derivatele $\dfrac{\partial^j u}{\partial x^j}(0, y)$.

De remarcat că orice problemă Cauchy poate fi transformată într-o problemă Cauchy restrînsă prin schimbarea reperului ; astfel dacă γ din definiția 1 este definit de ecuația implicită $\varphi(x, y) = 0$, $\varphi \in C^1$, prin transformarea $(x, y) \to (\xi, \eta)$, $\xi = \varphi(x, y) \eta = \psi(x, y)$, unde ψ este o funcție oarecare de clasă C^1, verificînd condiția $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0$, în locul EDP (14) se obține EDP

$$F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = 0, \tag{14'}$$

dacă se au în vedere formulele (7). Pentru EDP (14') problema Cauchy

$$u|_\gamma = f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\gamma = g$$

va fi o problemă Cauchy restrînsă ; într-adevăr, prima condiție $u|_\gamma = f$, se va scrie

$$u|_\gamma = u(x, y)|_{\varphi(x,y)=0} = u(\xi, \eta)|_{\xi=0} = f(\eta),$$

iar condiția $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_\gamma$ va deveni (cu o alegere convenabilă a funcției ψ) $u_\xi|_{\xi=0} = g(\eta)$. Această ultimă afirmație poate fi justificată în modul următor : ținînd seama de definiția lui $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ și de modul în care se transformă derivatele parțiale u_x și u_y, vom putea scrie

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\gamma = (u_x l_1 + u_y l_2)|_\gamma = [(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x) l_1 + (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y) l_2]_\gamma =$$

$$= [(\xi_x l_1 + \xi_y l_2) u_\xi + (\eta_x l_1 + \eta_y l_2) u_\eta]_{\xi=0}$$

și va fi suficient să fie verificate condițiile

$$\xi_x l_1 + \xi_y l_2 = 1, \quad \eta_x l_1 + \eta_y l_2 = 0 \tag{15}$$

pentru a avea $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{\tau} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0}$. Or, prima condiție (15) se transcrie sub forma $\varphi_x l_1 + \varphi_y l_2 = 1$ și ea va fi îndeplinită deoarece vectorul de componente (φ_x, φ_y) este normal la γ și cum $l \neq \tau$ vom avea întotdeauna $\varphi_x l_1 + \varphi_y l_2 \neq 0$; a doua condiție (15) se transcrie $\psi_x l_1 + \psi_y l_2 = 0$ și dacă l_1 și l_2 sînt cunoscuți, se obține o EDP de primul ordin pentru determinarea funcției ψ (conform teoriei acestor ecuații ψ se va obține prin integrarea sistemului caracteristic $\frac{\mathrm{d}x}{l_1} = \frac{\mathrm{d}y}{l_2}$), iar transformarea $(x, y) \to (\xi, \eta)$, $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ va fi un difeomorfism deoarece $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x = \lambda(\varphi_x l_1 + \varphi_y l_2) = \lambda$ unde $\lambda \neq 0$ se deduce din relația $\psi_x l_1 + \psi_y l_2 = 0$, deci $\psi_x = -\lambda l_2$, $\psi_y = \lambda l_1$. Aplicînd acum teorema 1 EDP (14′), va trebui să explicităm derivata $u_{\xi\xi}$; ținînd seama de (7), avem

$$F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta, u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}) = F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u(\xi, \eta), u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x, u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y, u_{\xi\xi}\xi_x^2 + \ldots, u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \ldots, u_{\xi\xi}\xi_y^2 + \ldots]$$

unde termenii nescriși în derivatele u_{xx}, u_{xy} și u_{yy} nu conțin derivata $u_{\xi\xi}$; or explicitarea lui $u_{\xi\xi}$ este posibilă (conform teoremei funcțiilor implicite) dacă $\frac{\partial F_1}{\partial u_{\xi\xi}} \neq 0$, adică dacă

$$\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\xi_x^2 + \frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\xi_x\xi_y + \frac{\partial F}{\partial u_{yy}}\xi_y^2 \neq 0$$

sau, ținînd cont că avem $\xi = \varphi(x, y)$, vom obține

$$\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\varphi_x^2 + \frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\varphi_x\varphi_y + \frac{\partial F}{\partial u_{yy}}\varphi_y^2 \neq 0. \tag{16}$$

Pentru a putea interpreta condiția (16), să presupunem că EDP $F = 0$ este liniară de forma (1), cînd $\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} = A$, $\frac{\partial F}{\partial u_{xy}} = 2B$, $\frac{\partial F}{\partial u_{yy}} = C$; atunci (16) se transcrie $A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 \neq 0$, obținîndu-se astfel condiția cunoscută de la secțiunea 3.1 : pentru ca problema Cauchy $u|_\gamma = f, \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_\gamma = g, \gamma = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = 0\}$ să admită soluție este necesar ca γ să fie necaracteristică pe orice arc al ei. De aceea, este naturală definiția următoare.

Definiția 4. *Caracteristicile* EDP $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$, $F \in C^1$ *sînt drumurile netede din* $\mathbb{R}^2$ *definite prin* $\varphi(x, y) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *unde* $\varphi \in C^1$ *verifică* EDP *de ordinul întîi*.

$$\frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \quad r = u_{xx}, \quad s = u_{xy}, \quad t = u_{yy}. \tag{16'}$$

Ca și în secțiunea 3.2 dacă se parametrizează γ, se deduce din (16′) ecuația

$$\frac{\partial F}{\partial r}\dot{\varphi}_2^2 - \frac{\partial F}{\partial s}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{\partial F}{\partial t}\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{16''}$$

(dacă $\varphi[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] = \alpha$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(I)$, iar dacă, în particular avem $\gamma = \{(x, y) \mid y = \varphi(x), x \in I\}$ sau $\gamma = \{(x, y) \mid x = \psi(y), y \in J\}$, (16″) devine

$$\frac{\partial F}{\partial r}\varphi'^2(x) - \frac{\partial F}{\partial s}\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

respectiv

$$\frac{\partial F}{\partial t}\psi'^2(y) - \frac{\partial F}{\partial s}\psi'(y) + \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

Observația 10. Din (16′) rezultă că pentru a determina efectiv caracteristicile EDP $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ în $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ trebuie cunoscută de regulă soluția $u \in C^2(D_2)$ a acestei ecuații, iar caracteristicile deși sînt definite ca drumuri de clasă C^1 din D_2, în realitate ele sînt proiecțiile în D_2 ale unor drumuri de pe graficul soluției $u = u(x, y)$ (considerată ca o pînză din $\mathbb{R}^3$).

Dacă F este o funcție liniară în variabilele r, s, t cu coeficienți funcții doar de x și y, atunci caracteristicile EDP $F = 0$ nu vor depinde de soluția u și deci pot fi definite ca în secțiunea 3.1.

Cu aceste considerații, teorema 1 se poate generaliza, considerînd în locul problemei Cauchy restrînse (12) o problemă Cauchy generală; dacă datele problemei sînt analitice, iar γ nu este caracteristică a EDP $F = 0$ atunci în vecinătatea lui γ (presupusă de asemenea analitică) va exista o soluție analitică a EDP în cauză care verifică datele inițiale (Cauchy) prescrise (nespecificîndu-se nimic în legătură cu existența unor soluții neanalitice a aceleiași probleme).

Observația 11. De remarcat că *ipoteza de analiticitate pentru datele din teorema* 1 *nu poate fi eliminată*; *astfel, dacă se presupune* $F \in C^\infty$ *(dar nu și analitică) atunci teorema* 1 *poate să nu mai fie valabilă.*

Definiția 5. *O problemă impusă unei* EDP *se numește corectă în sensul lui Hadamard dacă se verifică simultan următoarele trei condiții* :

i. *Soluția problemei considerate există.*

ii. *Soluția în cauză este unic determinată.*

iii. *Soluția căutată este stabilă* în sensul următor : la variații mici ale datelor problemei corespund soluții ale EDP care diferă puțin între ele (adică soluția depinde continuu de datele problemei atașate ecuației considerate).

Este evidentă legătura dintre definiția 5 și problemele practice care se rezolvă prin modelări în teoria EDP ; de regulă, soluția unei EDP care intervine în probleme practice verifică condițiile din această definiție ; în expunerea care va urma ne va interesa de fiecare dată dacă o problemă dată este sau nu corect pusă. Vom încheia însă această secțiune arătînd că problema Cauchy pentru ecuația lui Laplace nu este o problemă corect pusă ; se va constata deci că îndeplinirea condițiilor i și ii din definiția 5 nu este suficientă pentru a se verifica și a treia condiție.

Fie $D_2 \subset \mathbb{R}^2$, $D_2 = \{(x, y) \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\}$, $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = r + t$ și fie u o soluție a EDP $r + t = 0$ care verifică datele Cauchy $u(x, y)\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\Big|_{x=0} = \frac{1}{n}\sin(ny)$, $n = 1, 2, \ldots$; notînd cu u_n soluția corespunzătoare se verifică prin calcul că $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2}\sin(ny)\,\mathrm{sh}\,(nx)$.

Prin urmare deși $u, \frac{\partial u}{\partial x} \to 0$, cînd $n \to \infty$, pentru $x = 0$, totuși $u(x, y) \to \infty$ cînd $n \to \infty$, deci la variații mici ale lui $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}$ se obțin variații oricît de mari ale soluțiilor corespunzătoare.

3.3. Cazul ecuațiilor cu derivate parțiale cu n variabile independente

Fie EDP

$$F(x, u, p_j, p_{jk}) = 0, \qquad p_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad p_{jk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}. \tag{17}$$

cu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n > 2$; pentru această ecuație, rezultatele din 3.1 și 3.2 se extind direct și de aceea le vom enunța fără a le demonstra.

Teorema 2. (*Cauchy-Kovalevskaia*). *Dacă* EDP *se poate scrie sub forma*

$$p_{11} = f(x,\ u,\ p_j,\ p_{jk}),\quad p_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \tag{18}$$

iar p_{11} *nu mai apare în membrul drept al ecuației* (18), *atunci problema Cauchy restrînsă*

$$u(x)\Big|_{x_1=0} = u_0(x'),\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = u_1(x'),\ x' = (x_2, \ldots, x_n) \tag{19}$$

admite o singură soluție analitică în vecinătatea originii $x = 0$ *dacă funcțiile* f, u_0 *și* u_1 *sînt analitice în variabilele lor* (analicitatea datelor inițiale u_0 și u_1 se presupune în vecinătatea originii din $\mathbb{R}^{n-1}$, iar analiticitatea lui f este presupusă în vecinătatea originii din $\mathbb{R}^m$ $m = \frac{1}{2} n(n+5)$).

Definiția 6. *Dacă* $u = u(x)$ *este o soluție de clasă* C^2 *a* EDP (17) *atunci pînzele caracteristice ale acestei ecuații vor fi definite prin* $\varphi(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, φ *verificînd ecuația caracteristicilor*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \tag{20}$$

în care s-a înlocuit u, p_j, p_{jk} *în derivatele* $\frac{\partial F}{\partial p_{jk}}$ *prin soluția considerată și derivatele acesteia.*

Cu ajutorul teoremei 2 și a pînzelor (suprafețelor) caracteristice ale EDP (17) se poate enunța teorema de existență și unicitate a problemei Cauchy generale $u\Big|_S = u_0, \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_S = u_1$, unde $S \subset \mathbb{R}^n$ este o pînză netedă necaracteristică a ecuației (17) definită prin $\varphi(x) = 0$, iar l este o direcție din $\mathbb{R}^n$ netangentă la S: dacă u_0, u_1, φ și F sînt funcții analitice, atunci în vecinătatea lui S va exista o soluție analitică a EDP (17), soluție a problemei Cauchy considerate.

Dacă ecuația (17) este liniară (deci dacă F este liniară în u, p_j, p_{jk}) atunci suprafețele ei caracteristice sînt independente de u și scriind

$$F(x, u, p_j, p_{jk}) = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(x)\, p_{jk} + \sum_{j=1}^{n} B_j(x)\, p_j + C(x)u + D(x) \tag{17'}$$

ecuația caracteristicilor (20) se scrie

$$\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \tag{18}$$

și cu ajutorul ei, exact la fel ca la secțiunea 3.1 se poate realiza o clasificare și se pot obține forme canonice pentru EDP (17) liniare. Pentru aceasta, din (18) se deduce forma pătratică

$$A(y) = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(x^\circ) y_j y_k \tag{19}$$

considerînd punctul $x^0 \in D_n \subset \mathbb{R}^n$, D_n fiind domeniul de definiție al coeficienților EDP liniare dedusă cu ajutorul lui (17').

Definiția 7. *Dacă matricea formei pătratice* (19) *este nesingulară, atunci* EDP *liniară*

$$\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} B_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x)\, u + D(x) = 0 \tag{20}$$

va fi neparabolică în punctul $x^0 \in D_n$; *dacă însă* $\det [A_{jk}(x^0)] = 0$ EDP *va fi de tip parabolic în punctul* x^0 (de remarcat că dacă A_{jk} sînt funcții continue în D_n, atunci dacă ecuația (20) este neparabolică în x^0, ea va fi neparabolică și într-o vecinătate a acestui punct).

Utilizînd teoria formelor pătratice, se știe că prin transformări liniare nedegenerate efectuate asupra variabilelor $y = (y_1, \ldots, y_n)$ în (19), se obține forma canonică

$$A(z) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j z_j^2, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad m \leqslant n, \quad z = Ty, \quad \det T \neq 0;$$

deci dacă $m = n$ forma pătratică (19) se reduce la o sumă de n pătrate, și de aceea EDP (20) va avea în acest caz una din următoarele forme canonice (în punctul $x^0 \in D_n$):

i. $$\pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial z_n^2} \right) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial z_j} + c(x)u + d(x) = 0,$$

ii. $$\pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial z_{n-1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z_n^2} \right) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial z_j} + c(x)u + d(x) = 0,$$

iii. $$\pm \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z_{k+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial z_n^2} \right) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial z_j} +$$

$$+ c(x)u + d(x) = 0, \quad n \geqslant 4, \quad 2 \leqslant k \leqslant n - 2.$$

Definiția 8. *Dacă în punctul* $x^0 \in D_n$ *se obține forma canonică* i, ii *sau* iii *atunci* EDP (20) *va fi de tip eliptic, hiperbolic normal respectiv ultrahiperbolic în acest punct.*

Dacă însă EDP *este de tip parabolic în punctul* x^0 *avem* $m < n$ *și cazul cel mai important în practică este cel al tipului parabolic normal cînd* $m = n - 1$ *și forma canonică se scrie*

$$\text{iv.} \quad \pm\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial z_{n-1}^2}\right) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\,\frac{\partial u}{\partial z_j} + c(x)\,u + d(x) = 0$$

Observația 12. *Din considerațiile anterioare rezultă că pentru a putea defini formele canonice* i—iv *nu este obligatoriu ca* EDP (17 *să fie liniară în toate variabilele* u *și* p_j; *aceleași concluzii se obțin și în cazul* EDP *de forma*

$$\sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + B\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

numite EDP *de ordinul al doilea aproape liniare.*

Revenind la EDP prezentate în introducere (vezi punctul 1), în baza definiției 8 rezultă :

— *Ecuația Laplace, ecuația Poisson și ecuația lui Helmholtz sînt ecuații de tip eliptic în* $\mathbb{R}^n$.

— *Ecuația căldurii este o ecuație de tip parabolic normal în* $\mathbb{R}^{n+1}$.

— *Ecuația undelor este o ecuație de tip hiperbolic normal în* $\mathbb{R}^{n+1}$.

De remarcat că s-au luat în considerație doar EDP în care intervin doar funcții cu valori reale ; în practică apar însă EDP în care funcțiile au valori complexe (vezi EDP Schrödinger) și de aceea sînt necesare uneori și extensii ale acestor definiții la astfel de situații ; nu vom insista însă acum asupra acestor situații și ne vom limita doar la ecuațiile prezentate în introducere.

4. Ecuații de tip eliptic

La acest punct vom avea în vedere proprietățile soluțiilor ecuațiilor Laplace $\Delta_n u = 0$ și ale ecuației lui Poisson $\Delta_n u = F$. Pentru precizarea noțiunilor, vom spune că u este o *funcție armonică* (pe scurt FA) *în domeniul* $D_n \subset \mathbb{R}^n$ *dacă* $u \in C^2(D_n)$, $u \in C^0(\bar{D}_n)$ *și în fiecare punct din* D_n *se verifică ecuația lui Laplace* $\Delta_n u(x) = 0$, $x \in D_n$; *dacă însă* $u \in C^2(D_n)$ *și* $\Delta_n u(x) = 0$, $x \in D_n$ (fără a presupune $u \in C^0(\bar{D}_n)$) *atunci* u *se va numi funcție potențial* (pe scurt FP).

În baza acestor definiții, o funcție potențial în D_n devine o funcție armonică dacă această funcție este continuă în $\bar{D}_n$.

Teoria legată de soluțiile ecuației Laplace $\Delta_n u = 0$ se poate realiza independent de numărul variabilelor independente; totuși se obișnuiește să se separe cazul $n = 2$ de cazul $n > 2$ deoarece în ipoteza $n = 2$, după cum s-a văzut la cap. III, această teorie este strîns legată de teoria funcțiilor olomorfe de o variabilă complexă $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. De aceea la acest punct vom lua în considerație cazul $n > 2$ și deoarece rezultatele sînt aceleași pentru orice n, vom presupune pentru precizare, $n = 3$.

4.1. Soluții fundamentale și formule de reprezentare

Fie $y \in \mathbb{R}^3$ fixat și să determinăm FP care depind doar de distanța dintre punctele x și y, $x \in \mathbb{R}^3$ fiind presupus variabil; notînd $r = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$, cu $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ și presupunînd $u(x) = f(r) = f(\|x - y\|)$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f'(r)\frac{x_j - y_j}{r}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) = f''(r)\frac{(x_j - y_j)^2}{r^2} +$$

$$+ f'(r)\left[\frac{1}{r} - \frac{(x_j - y_j)^2}{r^2}\right].$$

Va rezulta

$$\Delta_3 u(x) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r),$$

iar în ipoteza $\Delta_3 u = 0$, se deduce

$$f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r} = c_1 + \frac{c_2}{\|x - y\|}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Observația 1. Presupunînd $n \geqslant 2$ arbitrar, rezultă repetînd calculul anterior

$$u(x) = f(\|x - y\|) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln \|x - y\| & \text{pentru } n = 2 \\ c_1 + c_2 \|x - y\|^{2-n} & \text{pentru } n > 2 \end{cases} \tag{1'}$$

cu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ și $x \neq y$.

De aici se deduce că FP care depind doar de distanța dintre două puncte din $\mathbb{R}^n$ au forme diferite, după cum $n = 2$ sau $n > 2$.

Definiția 1. *Funcția* $x \mapsto s(x, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ *definită prin*

$$s(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln(\|x - y\|) & \text{pentru } n = 2 \\ \dfrac{\|x - y\|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} & \text{pentru } n > 2 \end{cases} \tag{2}$$

în care $\omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$ *este aria sferei unitate din* $\mathbb{R}^n$, *poartă numele de funcția potențial elementar din* $\mathbb{R}^n$.

Este evident că funcția potențial elementar (2) este o FP în $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, dar nu este o FA decîtîn acele domenii din $\mathbb{R}^n$ care nu admit punctul y ca punct limită (funcția (2) se obține din (1′) prin particularizarea constantelor c_1 și c_2).

Definiția 2. *Vom spune că funcția* $E = E(x, y)$ *este o soluție fundamentală a ecuației Laplace* $\Delta_n u = 0$ *în domeniul* $D_n \subset \mathbb{R}^n$, *dacă* E *se scrie sub forma*

$$E(x, y) = s(x, y) + \varphi(x, y) \tag{2'}$$

unde s *este potențialul elementar din definiția* 1, *iar* φ *pentru orice* $y \in D_n^-$ *este* FA *în* D_n.

În continuare vom avea nevoie de două consecințe deduse din formula Gauss-Ostrogradski

$$\int_{D_n} \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial D_n} (f, \nu) \, d\sigma, \quad dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \tag{3}$$

ν fiind versorul normalei exterioare la ∂D_n, D_n este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$, $\partial D_n \in C^1$ cel puțin pe porțiuni, iar $f = (f_1, \ldots, f_n) \in C^1(D_n) \cap C^0(D_n^-)$. Luînd $f = u \nabla_n v$, $u \in C^1(D_n) \cap C^0(D_n^-)$, $v \in C^2(D_n) \cap C^1(D_n^-)$, deoarece $\operatorname{div}(u \nabla_n v) = u \Delta_n v + (\nabla_n u, \nabla_n v) = u \Delta_n v + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \dfrac{\partial v}{\partial x_j}$, iar $(f, \nu) = (u \nabla_n v, \nu) = u \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial v}{\partial x_j} \nu_j = u \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$, din (3) rezultă *prima formulă Green*

$$\int_{D_n} u \Delta_n v \, dx + \int_{D_n} (\nabla_n u, \nabla_n v) \, dx = \int_{\partial D_n} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma. \tag{4}$$

Presupunînd acum $u,\ v \in C^2(D_n) \cap C^1(D_n^-)$, scriind (4) cu u în loc de v și v în loc de u, scăzînd rezultatul din (4) se deduce *a doua formulă Green*

$$\int_{D_n} (u\Delta_n v - v\Delta_n u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D_n} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\mathrm{d}\sigma. \tag{4'}$$

Fie acum u o FP în $D_3 \subset \mathbb{R}^3$, D_3 fiind un domeniu mărginit și $G_3 \subset D_3$ astfel încît perechii $(G_3, \partial G_3)$ i se poate aplica formula (3); fie $y \in G_3$ și E soluția fundamentală (2') (pentru domeniul G_3). Aplicînd a doua formulă Green în domeniul $G_3 \setminus B_\varepsilon(y)$, unde $B_\varepsilon(y)$ este sfera deschisă de rază ε centrată în y, cu $\varepsilon > 0$ suficient de mic pentru a avea $B_\varepsilon(y) \subset G_3$) rezultă

$$\int_{\partial(G_3 \setminus B_\varepsilon(y))} \left[u(x)\frac{\partial E}{\partial \nu}(x, y) - E(x, y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right]\mathrm{d}\sigma_x = \tag{5}$$

$$= \int_{G_3 \setminus B_\varepsilon(y)} [u(x)\,\Delta_3^x E(x, y) - E(x, y)\,\Delta_3 u(x)]\,\mathrm{d}x$$

(notația $\mathrm{d}\sigma_x$ înseamnă că elementul de arie pe frontieră se calculează în punctul x, iar Δ_3^x înseamnă că operatorul Δ_3 se aplică în raport cu variabilele x_1, x_2, x_3). Deoarece $\Delta_3^x E(x, y) = 0$ pentru $x \in G_3 \setminus B_\varepsilon(y)$, iar $\Delta_3 u(x) = 0$, din identitatea anterioară se deduce egalitatea

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left[u(x)\frac{\partial E}{\partial \nu}(x, y) - E(x, y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right]\mathrm{d}\sigma_x = \int_{\partial G_3} u(x)\frac{\partial E}{\partial \nu}(x, y) -$$

$$- E(x, y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\Big]\,\mathrm{d}\sigma_x, \tag{5'}$$

pentru că $\partial(G_3 \setminus B_\varepsilon(y)) = \partial G_3 \cup \partial B_\varepsilon(y)$, iar în (5) normala la $\partial B_\varepsilon(y)$ este dirijată spre centrul sferei, pe cînd în (5') normala este dirijată spre exterior în ambii membri. Utilizînd parametrizarea $x = y + \varepsilon t$ pentru $\partial B_\varepsilon(y)$ (deci $\|t\| = 1$ cu $t = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$) avem $\mathrm{d}\sigma_x = \varepsilon^2\mathrm{d}\omega$, $\mathrm{d}\omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, se deduce

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left[u(x)\frac{\partial E}{\partial \nu}(x, y) - E(x, y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right]\mathrm{d}\sigma_x = \tag{5''}$$

$$= \int_{\|t\|=1} \left[u(y + rt)\frac{\partial E}{\partial r}(y + rt, y) - E(y + rt, y)\frac{\partial u}{\partial r}(y + rt)\right]_{r=\varepsilon} \varepsilon^2\mathrm{d}\omega.$$

Cum $E(x, y) = \dfrac{\|x-y\|^{-1}}{4\pi} + \varphi(x, y)$ din (2) și (2′) rezultă, cu $x = y + rt$:

$$E(y+rt, y) = \frac{1}{4\pi r} + \varphi(y+rt, y), \frac{\partial E}{\partial r}(y+rt, y) = -\frac{1}{4\pi r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}(y+rt, y);$$

aşadar, înlocuind aceste rezultate în (5″) se obţine cu $S_1 = \partial B_1(0)$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left[u(x) \frac{\partial E}{\partial \nu}(x, y) - E(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right] \mathrm{d}\sigma_x = \iint_{S_1} u(y+\varepsilon t) \left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}(y+\varepsilon t, y) \right] \varepsilon^2 \,\mathrm{d}\omega - \iint_{S_1} \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon} + \varphi(y+\varepsilon t, y) \right] \frac{\partial u}{\partial r}(y+\varepsilon t) \varepsilon^2 \,\mathrm{d}\omega =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} u(y+\varepsilon t) \,\mathrm{d}\varphi + \varepsilon^2 \iint_{S_1} u(y+\varepsilon t) \frac{\partial \varphi}{\partial r}(y+\varepsilon t, y) \,\mathrm{d}\omega - \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\partial u}{\partial r}(y+\varepsilon t) \,\mathrm{d}\omega - \varepsilon^2 \iint_{S_1} \varphi(y+\varepsilon t, y) \frac{\partial u}{\partial r}(y+\varepsilon t) \,\mathrm{d}\omega.$$

Trecînd la limită, pentru $\varepsilon \to 0$, deoarece $\dfrac{1}{4\pi} \iint_{S_1} u(y+\varepsilon t) \mathrm{d}\omega \to u(y)$ ($\varepsilon \to 0$) se obţine în baza lui (5′),

$$u(y) = \int_{\partial G_3} \left[E(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial E}{\partial \nu}(x, y) \right] \mathrm{d}\sigma_x, \quad y \in G_3 \qquad (6)$$

care arată că s-a demonstrat următorul rezultat:

Teorema 1. *Dacă* $u : D_3 \to \mathbb{R}$ *este o* FP *atunci pentru orice domeniu* $G_3 \subset D_3$ *mărginit cu* $\partial G_3 \in C^1$ *(cel puţin pe porţiuni)* u *se poate exprima în orice punct din* G_3 *cu ajutorul a două integrale de suprafaţă în care intervin valorile lui* u *şi ale derivatei sale după normală calculate pe* ∂G_3 *precum şi valorile soluţiei fundamentale* E *şi ale derivatei* $\dfrac{\partial E}{\partial \nu}$ *calculate pe aceeaşi suprafaţă.*

În acest mod s-a justificat importanţa soluţiei fundamentale E definită prin (2′): cu ajutorul ei se pot obţine valorile oricărei soluţii a ecuaţiei Laplace cu ajutorul unor integrale de suprafaţă.

Identitatea (6) va fi numită în viitor *formula de reprezentare a* FP.

Observația 2. *Demonstrația teoremei* 1 *arată că s-a reușit să se obțină formula de reprezentare* (6) *datorită singularității soluției fundamentale* (care a condus la apariția termenului care conține factorul $\frac{1}{r^2}$).

Observația 3. Din analiza formulei de reprezentare (6) s-ar părea că există posibilitatea determinării unei FP în G_3 dîndu-se în mod arbitrar valorile lui u și ale derivatei $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ pe ∂G_3; astfel, dacă $u\Big|_{\partial G_3} = f, \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial G_3} = g$, înlocuind în (6) rezultă

$$u(y) = \int\limits_{\partial G_3} \left[E(x, y)g(x) - f(x)\frac{\partial E}{\partial \upsilon}(x, y) \right] \mathrm{d}\sigma_x, \quad y \in G_3.$$

Lucrurile însă nu stau așa (deși condițiile anterioare pot fi interpretate ca date Cauchy pe ∂G_3 pentru u); într-adevăr, dacă în a doua formulă Green se presupune $v = 1$, rezultă (cu $D_3 = G_3$)

$$\int\limits_{\partial G_3} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}\sigma = 0. \tag{7}$$

Această relație arată că pe ∂G_3 valorile derivatei $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ nu pot fi arbitrare (deoarece nu orice funcție g verifică relația $\int\limits_{\partial G_3} g\,\mathrm{d}\sigma = 0$) și deci formula de reprezentare nu poate fi utilizată direct pentru a rezolva problema amintită; de fapt, din considerațiile din secțiunea 2.4. s-a rezolvat (în $\mathbb{R}^2$) o problemă Dirichlet pentru ecuația Laplace $\Delta_2 u = 0$, în care pe frontieră se cunoștea doar u nu și derivata $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. Rezultă așadar că identitatea (6) se utilizează cu anumite precauții în determinarea FP u.

4.2. Principiul de maxim în teoria funcțiilor potențial

Din formula de reprezentare (6) rezultă

Teorema 2. (*teorema de medie Gauss*). *Dacă* $u : D_3 \to \mathbb{R}$ *este o* FP $D_3 \subset \mathbb{R}^2$ *fiind o mulțime deschisă, atunci pentru orice sferă deschisă*

$B_R(y) \subset D_3$ *are loc egalitatea*

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(x)\, \mathrm{d}\sigma, \tag{8}$$

unde $S_R = \partial B_R(y)$.

Deoarece (6) este valabilă pentru orice φ care apare în definiția soluției fundamentale E, vom putea presupune în particular $\varphi = 0$ și cu $\partial G_2 = S_R$, se obține:

$$u(y) = \int_{S_R} \left[\frac{1}{4\pi \| x - y \|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{4\pi \| x - y \|} \right) \right] \mathrm{d}\sigma.$$

Deoarece $\| x - y \| = R$, iar $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial r}$ (fiind vorba de o sferă) avem

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{4\pi \| x - y \|} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{4\pi R^2}$$ și deci se obține

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R} \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\, \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(x)\, \mathrm{d}\sigma,$$

ceea ce coincide cu (8) dacă avem în vedere (7).

Egalitatea (8) arată că media oricărei FP în D_3 pe suprafața sferei deschise $B_R(y)$, cu R arbitrar, dar astfel încît $B_R(y) \subset D_3$, este egală valoarea acestei FP în centrul sferei (reamintim că prin media unei funcții reale u pe o suprafață $S \subset \mathbb{R}^3$ avînd aria $|S| \neq 0$ se înțelege numărul real $\frac{1}{|S|} \int_S u(x)\, \mathrm{d}\sigma$).

Teorema 3. (*principiul de maxim pentru* FP). *Dacă* $u : D_3 \to \mathbb{R}$ *este o* FP *neconstantă în domeniul* D_3, *atunci* u *nu poate avea puncte de maxim sau minim în* D_3.

Să presupunem că u admite în punctul $x_0 \in D_3$ un maxim: $u(x_0) = M \geqslant u(x)$, $x \in D_3$; va rezulta $u(x) = M$ pentru $x \in B_\varepsilon(x_0)$ cu $\varepsilon > 0$, suficient de mic pentru ca $B_\varepsilon(x_0) \subset D_3$. Într-adevăr, dacă în punctul $z \in B_\varepsilon(x_0)$ am avea $u(z) < M$, va exista o vecinătate V_z astfel încît $u(x) < M$ pentru $x \in V_z$; considerînd egalitatea (8) cu $y = x_0$ și $R = \| x_0 - z \| < \varepsilon$, va rezulta

$$M = u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(x)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R \cap V_z} u(x)\mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R \setminus (S_R \cap V_z)} u(x)\mathrm{d}\sigma < \frac{|S|}{4\pi R^2} \int_{S_R} \mathrm{d}\sigma = M$$

(pe $S_R \cap V_z$ avem $u(x) < M$, iar pe $S_R \setminus (S_R \cap V_z)$ avem $u(x) \leqslant M$, deci

$$\int_{S_R \cap V_z} u(x)\,d\sigma < M \int_{S_R \cap V_z} d\sigma, \quad \int_{S_R \setminus (S_R \cap V_z)} u(x)\,d\sigma \leqslant M \int_{S_R \setminus (S_R \cap V_z)} d\sigma \text{ și deci}$$

$$\int_{S_R} u(x)\,d\sigma < M \int_{S_R \cap V_z} d\sigma + M \int_{S_R \setminus (S_R \cap V_z)} d\sigma = M \int_{S_R} d\sigma = M \cdot 4\pi R^2).$$

S-a obținut o contradicție, care arată că $u(x) = M$, $x \in B_\varepsilon(x_0)$; cum prin ipoteză u nu este o constantă în D_3, va exista $y \in D_3$ cu proprietatea $u(y) < M$. Deoarece D_3 este o mulțime conexă, va exista un drum continuu $\gamma \subset D_3$ care are extremitățile în x_0 și y. Fie $A = \{x | x \in \gamma,\ u(x) = M\}$. Cum $A \subset D_3$ și u este o funcție continuă în D_3 va rezulta A mulțime închisă; în baza raționamentului anterior A este și mulțime deschisă în γ, deci $A = \gamma$. Rezultă $u(y) = M$, ceea ce contrazice ipoteza $u(y) < M$. Deci u nu poate avea un punct de maxim în domeniul D_3; de asemenea u nu poate avea un punct de minim în D_3 (deoarece în caz contrar FP-u ar admite un punct de maxim în D_3).

Consecința 1. Dacă $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu mărginit, iar u este FA în D_3, atunci u își atinge valorile maxime și cele minime pe frontiera lui D_3.

Într-adevăr, deoarece $u \in C^0(\overline{D_3})$, iar cum $\overline{D_3}$ este un compact, conform teoremei lui Weierstrass, vor exista în D_3 cel puțin două puncte $\bar{x}$ și $\underline{x}$ astfel încît

$$\min_{x \in \overline{D_3}} \{u(x)\} = u(\underline{x}) \leqslant u(x) \leqslant u(\bar{x}) = \max_{x \in \overline{D_3}} \{u(x)\}.$$

Cum u este FP, iar $\bar{x}$ este punct de maxim și $\underline{x}$ este punct de minim, în baza teoremei 3, $\underline{x}, \bar{x} \notin D_3$ deci $x, \bar{x} \in \partial D_3$, dacă u este neconstantă în D_3; dacă $u(x) = A \in \mathbb{R}$, rezultatul este banal.

Definiția 3. *Vom spune că u este soluție a problemei Dirichlet interioare pentru domeniul mărginit $D_3 \subset \mathbb{R}^3$, dacă u este* FA *în D_3 și restricția ei la ∂D_3 este o funcție continuă dată* $\left(u\Big|_{\partial D_3} = f \in C^0(\partial D_3)\right)$.

Consecința 2. *Soluția problemei Dirichlet interioare pentru domeniul mărginit D_3 dacă există este unic determinată.*

Într-adevăr, dacă ar exista două FA în D_3, fie ele u_1 și u_2, astfel încît $u_1\Big|_{\partial D_3} = f$, $u_2\Big|_{\partial D_3} = f$, atunci $u = u_1 - u_2$ va fi de asemenea FA în D_3, iar $u\Big|_{\partial D_3} = (u_1 - u_2)\Big|_{\partial D_3} = u_1\Big|_{\partial D_3} - u_2\Big|_{\partial D_3} = f - f = 0$; în baza consecinței 1 avem $u(\underline{x}) \leqslant u(x) \leqslant u(\bar{x})$, $x \in \overline{D_3}$, $\underline{x}, \bar{x} \in \partial D_3$, adică $u(\underline{x}) = 0$, $u(\bar{x}) = 0$, deci $u(x) = 0$, $x \in \overline{D_3}$ și prin urmare $u_1(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{D_3}$).

Cu ajutorul consecinței 2 se poate justifica contradicția aparentă de la observația 3 : cu ajutorul formulei de reprezentare se poate determina FP u cunoscîndu-se doar valorile lui u pe ∂G_3 (deci valorile derivatei $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ vor rezulta pe ∂G_3, deoarece u va fi definită și de clasă $C^1(G_3)$) deoarece aceste valori determină o singură soluție a ecuației Laplace (dacă această soluție există).

Consecința 3. *Soluția problemei Dirichlet interioare pentru domeniul mărginit D_3 este stabilă.*

Într-adevăr, fie u_1, u_2 FA în D_3 astfel încît $u_1\Big|_{\partial D_3} = f_1$, $u_2\Big|_{\partial D_3} = f_2$, iar $|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$, $x \in \partial D_3$ (deci $-\varepsilon < f_1(x) - f_2(x) < \varepsilon$); va rezulta că FA $u = u_1 - u_2$ va avea valori pe ∂D_3 cuprinse între $-\varepsilon$ și ε, iar cum valorile din D_3 nu pot depăși valorile de pe frontieră, în D_3 vom avea $-\varepsilon < u(x) < \varepsilon$, adică $|u_1(x) - u_2(x)| < \varepsilon$ $x \in \overline{D_3}$.

Pentru a arăta că problema Dirichlet interioară este corectă în sensul lui Hadamard (vezi 3.2) mai trebuie demonstrată existența soluției ; cîteva considerații legate de această problemă vor fi făcute în secțiunea următoare.

4.3. Funcția Green pentru problema Dirichlet interioară

La secțiunea 4.1 s-a dedus formula de reprezentare (6), adică (schimbînd între ele rolurile variabilelor $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$ și scriind D_3 în loc de G_3)

$$u(x) = \iint_{\partial D_3} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, E(y, x) - u(y)\, \frac{\partial E}{\partial y}(y, x) \right] d\sigma_y. \tag{9}$$

În (9), $E(y, x)$ este o soluție fundamentală a ecuației Laplace $\Delta_3 u = 0$, adică

$$E(y, x) = \frac{1}{4\pi \|y - x\|} + \varphi(y, x), \tag{10}$$

unde $\varphi(y, x)$ pentru x fixat în D_3 este de clasă C^1 în $\overline{D_3}$ și armonică în D_3.

Definiția 4. *Orice soluție fundamentală în D_3 a ecuației Laplace $\Delta_3 u = 0$, care se anulează pentru $y \in \partial D_3$, se va numi funcție Green pentru problema Dirichlet interioară relativă la domeniul D_3 și ecuația Laplace.*

Această funcție Green va fi notată prin $G(y, x)$.

Observația 4. *Din definiția 4 rezultă următoarele proprietăți ale funcției $G = G(y, x)$, cu $x \in D_3$ fixat și y variabil în $\overline{D_3}$:*

$$G(y, x) \in C^2(D_3 \setminus \{x\}),\ G(y, x) \in C^1(\overline{D_3} \setminus \{x\}),\ \Delta_3^y G(y, x) = 0, \qquad y \neq x, \tag{11}$$

$$G(y, x) - \frac{1}{4\pi \|x - y\|} \in C^2(D_3), \tag{11'}$$

$$G(y, x) = 0 \text{ pentru } y \in \partial D_3. \tag{11''}$$

Observația 5. *Definiția 4 se justifică prin faptul că din (9) rezultă*

$$u(x) = -\int_{\partial D_3} f(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(y, x)\, \mathrm{d}\sigma_y,$$

dacă $u\Big|_{\partial D_3} = f$.

Teorema 4. *Funcția Green din definiția 4 posedă următoarele proprietăți :*

i. *Este simetrică în variabilele x și y, adică*

$$G(x, y) = G(y, x),$$

ii. *Pentru $x \neq y$ verifică inegalitățile*

$$0 \leqslant G(x, y) \leqslant \frac{1}{4\pi \|x - y\|},$$

iii. *Pentru $x' = x + a$, $x' = (x_1', x_2', x_3')$, $a = (a_1, a_2, a_3)$ avem*

$$G(x, y) - G(x', y) = \frac{\|a\|}{4\pi \|x - y\| \cdot \|x' - y\|} + c(x, x'),$$

unde

$$c(x, x') = \sup_{y \in \partial D_3} \frac{\|a\|}{4\pi \|x - y\| \|x' - y\|}.$$

i. Fie $x', x'' \in D_3$ și sferele deschise $B_\varepsilon(x')$, $B_\varepsilon(x'')$ cu $\varepsilon > 0$ suficient de mic pentru a avea $B_\varepsilon(x') \subset D_\varepsilon$, $B_\varepsilon(x'') \subset D_3$, $B_\varepsilon(x') \cap B_\varepsilon(x'') = \emptyset$, pentru $x' \neq x''$; în $D_3^* = D \setminus (B_\varepsilon(x') \cup B_\varepsilon(x''))$, $G(y, x')$ și $G(y, x'')$ sînt FP și de aceea, aplicînd în D_3^* a doua formulă Green (4') se deduce, ținînd seama că $G(y, x) = 0$ pentru $y \in \partial D_3$:

$$0 = \int\limits_{\partial D_3} \left[G(y, x') \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(y, x'') - G(y, x'') \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y') \right] d\sigma_y =$$

$$= \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x')} [\ldots] d\sigma_y + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x'')} [\ldots]\, d\sigma_y$$

(în parantezele din membrul drept se află diferența din prima integrală de suprafață). Calculînd integralele pe $\partial B_\varepsilon(x')$ și $\partial B_\varepsilon(x'')$ procedînd la fel ca la deducerea formulei de reprezentare (6), va rezulta

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x')} \left[G(y, x') \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(y, x'') - G(y, x'') \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(y, x') \right] d\sigma_y = G(x', x'') + A_1\varepsilon,$$

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x'')} \left[G(y, x') \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(y, x'') - G(y, x'') \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(y, x') \right] d\sigma = -G(x'', x') + A_2\varepsilon,$$

cu A_1 și A_2 integrale de suprafață ale unor funcții continue; pentru $\varepsilon \to 0$ rezultă $G(x', x'') - G(x'', x') = 0$.

ii. Conform definiției soluției fundamentale, rezultă

$$G(y, x) = \frac{1}{4\pi \|x - y\|} + \varphi(y, x),$$

unde φ, pentru x fixat în D_3, este o FP în D_3 cu valori negative pe ∂D_3 (din $G(y, x) = 0$, $y \in \partial D_3$, se deduce $\varphi(y, x) = -\frac{1}{4\pi \|x - y\|} < 0$, $y \in \partial D_3$); deci în baza principiului de maxim (teorema 3) se deduce $\varphi(y, x) \leqslant 0$, pentru orice $y \in D_3^-$, $y \neq x$. Prin urmare, rezultă $G(y, x) \leqslant \frac{1}{4\pi \|x - y\|}$ și mai rămîne de arătat că $G(y, x) \geqslant 0$ în D_3, $y \neq x$; or izolînd punctul $x \in D_3$ prin sfera deschisă $B_\varepsilon(x) \subset D_3$, deoarece $G(x, y) \to \infty$ cînd $y \to x$, G va avea valori pozitive pe $\partial B_\varepsilon(x)$ și valori nule pe ∂D_3, rezultă (în baza principiului de maxim, funcția $y \mapsto G(y, x)$ fiind o FP în $D_3 \setminus B_\varepsilon(x)$) $G(y, x) \geqslant 0$, $y \in D \setminus B_\varepsilon(x)$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, se deduce $G(y, x) \geqslant 0$ în D_3.

Pentru iii să definim $F : D_3 \to \mathbb{R}$ prin

$$F(y) = G(x, y) - G(x', y) - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\|x - y\|} - \frac{1}{\|x' - y\|} \right);$$

evident F este FP în D_3, deci valorile extreme ale lui F se află pe ∂D_3. Se deduce, G fiind nul pe ∂D_3,

$$|F(y)| \leqslant \frac{1}{4\pi} \sup_{y \in \partial D_3} \left| \frac{1}{\|x - y\|} - \frac{1}{\|x' - y\|} \right|;$$

cu $m \left| \frac{1}{\|x-y\|} - \frac{1}{\|x'-y\|} \right| = \left| \frac{\|x+a-y\| - \|x-y\|}{\|x-y\|\|x'-y\|} \right| \leqslant \frac{\|a\|}{\|x-y\|\|x'-y\|}$ (în baza inegalității $\left| \|\alpha\| - \|\beta\| \right| \leqslant \|\alpha - \beta\|$), rezultă, cu notația din enunț

$$|G(x,y) - G(x',y)| - \frac{1}{4\pi} \left| \frac{1}{\|x-y\|} - \frac{1}{\|x'-y\|} \right| \leqslant |F(y)| \leqslant c(x,x').$$

Conform observației 5, soluția problemei Dirichlet interioare va putea fi scrisă sub forma

$$u(x) = -\int_{\partial D_3} f(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) \mathrm{d}\sigma_y, \; x \in D_3^-, \tag{12}$$

dacă u este FA în D_3 și $u = f$ pe $\partial D_3, f \in C^0(\partial D_3)$; din (12) se deduce că soluția căutată se poate scrie sub forma unei integrale improprii cu parametru, dar pentru aceasta trebuie demonstrată existența funcției Green precum și convergența integralei din (12). Vom face acum ipoteza că funcția Green din definiția 4 există și în plus verifică restricțiile următoare:

$$G(x,y) - \frac{1}{4\pi\|x-y\|} \in C^2 \text{ cînd } x, \; y \in D_3 \tag{13}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) \in C^0 \text{ cînd } x \in D_3^-, \; x_0 \in \partial D_3 \text{ și } \|x - x_0\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \; y \in \partial D_3, \tag{13'}$$

$$\|y - x_0\| \geqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \text{ fiind arbitrar.}$$

Teorema 5. *Dacă funcția Green pentru domeniul D_3 există și verifică* (13), (13'), *atunci prin* (12) *se rezolvă problema Dirichlet interioară.*

Dacă $x \in D_3$ și $y \in \partial D_3$ atunci din (11) rezultă $\Delta_3^x G(x,y) = 0$ (folosind și simetria funcției Green), ceea ce face să avem

$$\Delta_3 u(x) = \Delta_3 \left[-\int_{\partial D_3} f(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) \, \mathrm{d}\sigma_y \right] = -\int_{\partial D_3} f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} [\Delta G_3^x(x,y)] \mathrm{d}\sigma_y = 0, \; x \in D_3,$$

posibilitatea intervertirii integralei cu operatorul Δ_3 rezultînd din ipotezele (13) și (13').

Rămîne deci de arătat că $\lim_{x \to x_0 \in \partial D_3} u(x) = f(x_0)$. Cum din formula de reprezentare (6) pentru $E = G$ și $u = 1$, se deduce $-\int_{\partial D_3} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) \mathrm{d}\sigma_y = 1$, utilizînd (12) avem egalitatea

$$u(x) = -f(x_0) \int_{\partial D_3} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) \mathrm{d}\sigma_y - \int_{\partial D_3} [f(y) - f(x_0)] \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) \mathrm{d}\sigma_y$$

și va fi suficient să arătăm că a doua integrală de suprafață tinde la zero cînd $x \to x_0$. Pentru aceasta, vom scrie $\partial D_3 = S_\varepsilon \cup S'_\varepsilon$, unde $S_\varepsilon = \partial D_3 \cap B_\varepsilon(x_0)$ (deci $S'_\varepsilon = S \setminus S_\varepsilon$) pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic ca să avem $|f(y) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ cînd $y \in S_\varepsilon$ (posibil în baza continuității uniforme pe ∂D_3 a lui f); vom avea

$$\left| \int_{S_\varepsilon} [f(y) - f(x_0)] \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y \right| \leqslant \int_{S_\varepsilon} |f(y) - f(x_0)| \left| \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) \right| d\sigma_y <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) \right| d\sigma_y.$$

Cum pentru x fixat în D_3^-, avem $G(x, y) > 0$ pentru $y \in D_3$ (vezi ii din teorema 4) și $G(x, y) = 0$ pentru $y \in \partial D_3$ (vezi definiția 4), G ca funcție de y va fi descrescătoare pe direcția ν_y și deci $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) \leqslant 0$, $y \in \partial D_3$, $x \in D_3^-$; vom avea

$$\int_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) \right| d\sigma_y = -\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y \leqslant -\int_{\partial D_3} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y = 1$$

rezultînd

$$\left| \int_{S_\varepsilon} [f(y - f(x_0)] \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y \right| < \frac{\varepsilon}{2} \int_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) \right| d\sigma_y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pentru $y \in S'_\varepsilon$, în baza ipotezei (13') $\frac{\partial G}{\partial \nu_y}$ va fi o funcție continuă și atunci, deoarece $G(x, y) = 0$, dacă $x \in \partial D_3$, $x \neq y$, va rezulta $\int_{S'_\varepsilon} [f(y) - f(x_0)] \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y \to 0$, cînd $x \to x_0 \in \partial D_3$ și deci pentru $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$ vom avea

$$\left| \int_{S'_\varepsilon} [f(y) - f(x_0)] \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Așadar,

$$\left| \int_{\partial D_3} [f(y) - f(x_0)] \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y \right| \leqslant \left| \int_{S_\varepsilon} [f(y) - f(x_0)] \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y \right| +$$

$$+ \left| \int_{S'_\varepsilon} [f(y) - f(x_0)] \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y)\, d\sigma_y \right| < \varepsilon$$

dacă $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$.

Observația 6. Teorema 5 este aplicabilă dacă s-a reușit să se găsească funcția Green pentru domeniul D_3 și în plus sînt verificate condițiile (13) și (13′); dacă D_3 este de exemplu sfera deschisă $B_R(0)$ atunci vom arăta că sînt verificate toate condițiile pentru ca teorema 5 să fie valabilă.

4.4. Funcția Green pentru sferă și consecințele ei

Fie $D_3 = B_R(0) = \{x \mid x \in \mathbb{R}^3, \|x\| < R\}$, deci $\partial D_3 = S_R = \{x \mid x \notin \mathbb{R}^3, \|x\| = R\}$ și $y \in D_3$, $y \neq 0$; să notăm $y' = \dfrac{R^2}{\|y\|^2} y$. Atunci $y' \notin D_3$, deoarece $\|y'\| = \dfrac{R^2}{\|y\|} > R$ și fie

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\|x - y\|} - \frac{R}{\|y\|\,\|x - y'\|}\right). \tag{14}$$

Funcția G definită prin (14) va fi *funcția Green pentru sferă*: aici $\varphi(x, y) = -\dfrac{R}{4\pi\|y\|\,\|x - y'\|}$ și evident $\Delta_3^x \varphi(x, y) = 0$ pentru orice $x \in D_3$; cum $y' \notin D_3$ avem $\|x - y'\| > 0$, $x \in D_3$, iar $\dfrac{1}{\|x - y'\|}$ va fi o FP în sfera $B_R(0)$; dacă $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ rezultă $y' = \left(\dfrac{R^2 y_1}{\|y\|}, \dfrac{R^2 y_2}{\|y\|}, \dfrac{R^2 y_3}{\|y\|}\right)$, $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ și $\varphi(x, y) = -\dfrac{R\|y\|}{4\pi\|x\|y\|^2 - R^2 y\|}$ iar pentru $y \in S_R$ rezultă $y' = y$ și în consecință $G(x, y) = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\|x - y\|} - \dfrac{R}{R\|x - y\|}\right) = 0$.

Condițiile (13) și (13′) se verifică: avem

$$G(x, y) - \frac{1}{4\pi\|x - y\|} = \frac{-R}{4\pi\|y\|\|x - y'\|} = \varphi(x, y) \in C^2(D_3 \times D_3)$$

și

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^3},$$

iar $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)$ este o funcție indefinit derivabilă (chiar analitică) pentru orice $x \neq y$ și $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) \to 0$ cînd $x \to x_0 \in S_R$, deoarece

$\|x\| \to \|x_0\| = R$ și numărătorul se anulează ($\|x\| < R$, $\|y\| = R$).

Pentru calculul lui $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ se poate folosi relația $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \frac{1}{R}(\nabla_3^y G(x, y), y)$, dedusă din definiția derivatei după o direcție: $\frac{\partial f}{\partial \nu}(y) = \frac{\partial f}{\partial y_1}(y)\nu_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}(y)\,\nu_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3}(y)\,\nu_3 = (\nabla_3 f, \nu)$; ținînd seama că la sferă $\nu = \frac{y}{R}$, se deduce $\frac{\partial f}{\partial \nu}(y) = \frac{1}{R}(\nabla f_3, y) = \frac{1}{R}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)$.

În baza teoremei 5, soluția problemei Dirichlet interioare pentru sferă este dată de formula integrală

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{4\pi R}\int_{S_R}\frac{f(y)}{\|x-y\|^3}\,d\sigma_y,\quad \|x\| < R,\ S_R = \partial B_R(0) \tag{15}$$

numită *formula lui Poisson pentru sferă*; folosind efectiv coordonatele lui x și y, formula (15) se transcrie

$$u(x_1, x_2, x_3) = \tag{15'}$$
$$= \frac{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{4\pi R}\iint_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=R^2}\frac{f(y_1, y_2, y_3)\,d\sigma}{[\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}]^3}.$$

Utilizînd coordonatele sferice, scriind $x_1 = r\sin\theta_1\cos\varphi_1$, $x_2 = r\sin\theta_1\sin\varphi_1$, $x_3 = r\cos\theta_1$, $y_1 = R\sin\theta_2\cos\varphi_2$, $y_2 = R\sin\theta_2\sin\varphi_2$, $y_3 = R\cos\theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi[$, $r < R$, formula lui Poisson (15) devine

$$u(r, \theta_1, \varphi_1) = \frac{R^2 - r^2}{4\pi R}\int_{S_R}\frac{f(\varphi_2, \theta_2)\,d\sigma}{(R^2+r^2-2Rr\cos\gamma)^{3/2}},\quad d\sigma = R^2\sin\theta_2\,d\theta_2\,d\varphi_2, \tag{15''}$$

unde γ este unghiul dintre dreptele care trec prin origină și punctele x respectiv y (s-a utilizat teorema cosinusului: $\|x-y\|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma$, iar $f(\varphi_2, \theta_2) = f(y_1, y_2, y_3)\Big|_{y_1^2+y_2^2+y_3^2=R^2} = f(R\sin\theta_2\cos\varphi_2,\ R\sin\theta_2\sin\varphi_2,\ R\cos\theta_2)$).

Observația 7. Deși formula lui Poisson (15) (sau formele echivalente (15'), (15'')) s-au dedus pentru sfera deschisă $B_R(0)$ centrată în origină, formula rămîne valabilă și pentru orice sferă deschisă $B_R(z)$

cu $z \in \mathbb{R}^3$, cînd această formulă se scrie

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x - z\|^2}{4\pi R} \int_{\partial B_R(z)} \frac{f(y)}{\|x-y\|^3} \, \mathrm{d}\sigma_y ; \qquad (15''')$$

formula (15'') rămîne neschimbată, cu specificarea că polul sistemului sferic nu este originea ci punctul $z = (z_1, z_2, z_3)$ (deci $x_1 = z_1 + r\sin\theta_1 \cos\varphi_1, \ldots, y_1 = z_1 + R \sin\theta_2 \cos\varphi_2, \ldots$).

Observația 8. Dacă în formula Poisson (15''') se presupune $x = z$ (deci x este în centrul sferei deschise $B_R(z)$, rezultă, deoarece $\|x - y\| = R$,

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R(x)} f(y) \, \mathrm{d}\sigma \qquad (16)$$

și cum $u\Big|_{\partial B_R(z)} = f$, ultima egalitate va constitui *teorema de medie Gauss* pentru FP (vezi teorema 2) care inițial a fost justificată utilizîndu-se formula de reprezentare (6); în (16) însă avem $f \in C^0(\partial B_R(x))$ și de aceea este naturală următoarea definiție :

Definiția 5. *Dacă* $u : D_3 \to \mathbb{R}$ *este continuă în domeniul* D_3 *și are proprietatea*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(y) \, \mathrm{d}\sigma, \qquad (17)$$

pentru orice $S_R = \partial B_R(x)$, $B_R(x) \subset D_3$, *vom spune că* f *este o funcție cu proprietatea de medie* (pe scurt FPM) în D_3.

În baza acestei definiții, rezultă că orice FP este o FPM (în baza teoremei de medie Gauss); remarcabil este faptul că și reciproca acestui rezultat este adevărată : orice FPM este o FP. Pentru a justifica acest rezultat, va fi suficient să observăm că principiul de maxim pentru FP (teorema 3) va fi valabil și pentru FPM deoarece demonstrația teoremei 3 nu face uz de derivabilitatea lui u.

Teorema 6. *Dacă* $u \in C^0(D_3)$ *are proprietatea de medie în* D_3 *atunci* u *este* FP *în* D_3.

Fie z un punct oarecare din D_3 și $R > 0$ astfel încît $B_R(z) \subset D_3$; cu ajutorul formulei lui Poisson (15''') se poate obține în $B_R(z)$ o FA ale cărei valori pe $S_R = \partial B_R(z)$ sînt date de restricția lui u la S_R și fie v această FA. Deci $\Delta_3 v(x) = 0$, $x \in B_R(z)$, iar $v\Big|_{S_R} = u\Big|_{S_R}$; să notăm $w = u - v$. Evident w este o FPM în $B_R(z)$ cu proprietatea $w\Big|_{S_R} = u\Big|_{S_R} -$

$-v\Big|_{S_R} = 0$, ceea ce înseamnă că $w(x)=0$, $x \in B_R(z)$ (o FPM în D_3 cu valori nule pe ∂D_3 este nulă în D_3), adică $u(x) = v(x)$, $x \in B_R(z)$ și u este FP în vecinătatea oricărui punct $z \in D_3$.

Teorema 7. (*prima teoremă de convergență Harnack*). *Fie* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *un șir de* FA *în domeniul* $D_3 \subset \mathbb{R}^3$, *uniform convergent pe* ∂D_3. *Atunci acest șir va converge uniform și în* D_3 *către o* FA.

Fie $x \in D_3$; deoarece $u_n - u_m$ este FA în D_3, în baza principiului de maxim vom avea :

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leqslant \sup_{y\in\partial D_3} |u_n(v) - u_m(x)| < \varepsilon, \quad n > m \geqslant N(\varepsilon).$$

Rezultă convergența uniformă în $\overline{D_3}$ către o funcție continuă u care este o FPM, deoarece trecînd la limită ($n \to \infty$) în egalitatea

$$u_n(x) = \frac{1}{4\pi R^3} \int_{\partial B_R(x)} u_n(y)\, d\sigma,$$

unde $B_R(x) \subset D_3$, se deduce relația (17); teorema este demonstrată dacă se utilizează, teorema 6 și faptul că $u \in C^\circ(\overline{D_3})$.

Teorema 8. (*inegalitățile lui Harnack*). *Fie* u FA *în* D_3 *și pozitivă în acest domeniu*; *atunci pentru orice* $x \in B_R(z) \subset D_3$ *au loc inegalitățile*

$$\frac{R(R - \|x - z\|)}{(R + \|x - y\|)^2} u(z) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R(R + \|x - z\|)}{(R - \|x - z\|)^2} u(z).$$

Din formula lui Poisson (15'') se deduce

$$(R - r)^3 \leqslant \|x - y\|^3 = (R^2 + r^2 - 2R\cos\gamma)^{3/2} \leqslant (R + r)^3$$

deoarece $-1 \leqslant \cos\gamma \leqslant 1$; cum $u(y) \geqslant 0$, prin înmulțirea inegalităților

$$\frac{1}{(R + r)^3} \leqslant \frac{1}{\|x - y\|^3} \leqslant \frac{1}{(R - r)^3}$$

cu $\dfrac{(R^2 - r^2)u(y)}{4\pi R}$ acestea nu-și schimbă sensul, iar după integrare pe $S_R = \partial B_R(z)$, vor rezulta inegalitățile

$$\frac{R - r}{(R + r)^2} \cdot \frac{1}{4\pi R} \int_{S_R} u(y)\, d\sigma \leqslant \frac{R^2 - \|x - z\|^2}{4\pi R} \int_{S_R} \frac{u(y)}{\|x - y\|^3}\, d\sigma_y \leqslant \frac{R + r}{(R - r)^2} \cdot \frac{1}{4\pi R} \int_{S_R} u(y)\, d\sigma,$$

care în baza teoremei de medie Gauss și a formulei Poisson vor coincide cu inegalitățile din enunț.

Consecința 4. *Dacă u este* FP *în $\mathbb{R}^3$ mărginită inferior sau superior, atunci u este o constantă.*

Într-adevăr, dacă de exemplu $u(x) \geqslant m \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, atunci notînd $v = u - m$, v va fi FP în $\mathbb{R}^3$ și în plus $v(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^3$; se pot aplica inegalitățile lui Harnack pentru un $z \in \mathbb{R}^3$ și orice $B_R(z)$. Trecînd la limită, pentru $R \to \infty$, rezultă $v(z) \leqslant v(x) \leqslant v(z)$, $x \in$ ^{3}; prin urmare $v(x) = v(z) \in \mathbb{R}$ și deci $u(x) = v(z) + m \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Consecința 5. *Fie u* FA *pozitivă în domeniul D_3 și fie G_3 un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^3$ cu proprietatea $G_3^- \subset D_3$; atunci pentru orice $x_0 \in G_3^-$ există $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ depinzînd doar de D_3 și G_3 astfel încît pentru orice $x \in G_3^-$ să avem*

$$c_1 u(x_0) \leqslant u(x) \leqslant c_2 u(x_0). \tag{18}$$

Într-adevăr să notăm $4a = \inf_{\substack{x \in G_3^- \\ y \in \partial D_3}} \|x - y\|$, iar $a > 0$; deoarece G_3^- este un

compact din $\mathbb{R}^3$, va exista o acoperire finită a lui G_3 cu sferele deschise $B_a(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$; $G_3^- \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_a(x_j)$, $x_1, \ldots, x_n \in G_3^-$. Pentru orice două puncte x_0, $x \in G_3^-$ vor exista sferele deschise $B_{2a}(x_{j_k})$, $k = 1, 2, \ldots, m \leqslant n$, $1 \leqslant j_k \leqslant n$ cu proprietatea $x_{j_1} \in B_{2a}(x_0)$, $x_{j_{k+1}} \in B_{2a}(x_{j_k})$, $x \in B_{2a}(x_{j_m})$, iar pentru $x \in G_3^-$ avem $B_{4a}(x) \subset D_3$. În baza inegalităților lui Harnack (teorema 8), avem

$$\frac{4a(4a - \|x_{j_1} - x_0\|)}{(4a + \|x_{j_1} - x_0\|)^2} u(x_0) \leqslant u(x_{j_1}) \leqslant \frac{4a(4a + \|x_{j_1} - x_0\|)}{(4a - \|x_{j_1} - x_0\|)^2} u(x_0);$$

dar

$$\frac{4a(4a - \|x_{j_1} - x_0\|}{(4a + \|x_{j_1} - x_0\|)^2} \geqslant \frac{4a(4a - 2a)}{(4a + 2a)} = \frac{2}{9} \quad \text{și}$$

$$\frac{4a(4a + \|x_{j_1} - x_0\|}{(4a - \|x_{j_1} - x_0\|)^2} \leqslant \frac{4a(4a + 2a)}{(4a - 2a)^2} = 6,$$

adică $\frac{2}{9} u(x_0) \leqslant u(x_{j_1}) \leqslant 6u(x_0)$. În mod analog rezultă $\frac{2}{9} u(x_{j_1}) \leqslant u(x_{j_2}) \leqslant$ $\leqslant 6u(x_{j_1}, \ldots, \frac{2}{9} u(x_{j_m}) \leqslant u(x) \leqslant 6u(x_{j_m})$ și vor rezulta inegalitățile (18) cu $c_1 =$ $= \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$ (din construcție rezultă dependența lui c_1 și c_2 de a deci de D_3 și G_3).

Teorema 9. (*a doua teoremă de convergență Harnack*). *Fie $(u_n)_{n \geqslant 1}$ un șir de* FP *în D_3 astfel încît:*

i. *Pentru orice $x \in D_3$ avem $u_{n+1}(x) \geqslant u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$*

ii. *Există un* $x_0 \in D_3$ *și* $K \in \mathbb{R}$, *astfel încît* $u_n(x_0) \leqslant K$, $n = 1, 2, \ldots$ *Atunci șirul* $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *va converge uniform în orice compact* $A_3 \subset D_3$ *către o* FA *în* A_3.

Fie $G_3 \subset D_3$ astfel încît $A_3 \subset G_3^- \subset D_3$ și $x_0 \in G_3^-$; șirul $(u_n(x_0))_{n \geqslant 1}$ din $\mathbb{R}$ va fi monoton și mărginit în baza ipotezelor i și ii, deci va fi convergent. În baza inegalităților (18), pentru orice $x \in G_3^-$ vom avea

$$0 \leqslant u_n(x) - u_m(x) \leqslant c_2[u_n(x_0) - u_m(x_0)] < \varepsilon, \; n > m \geqslant N(\varepsilon);$$

rezultă uniform-convergența șirului $(u_n)_{n \geqslant 1}$ în G_3^-, deci și în A_3, iar faptul că funcția limită este o FA în A_3 rezultă la fel ca în prima teoremă de convergență Harnack (teorema 7).

Definiția 6. *Fie* D_3 *un domeniu din* $\mathbb{R}^3$ *și* $\varphi : D_3^- \to \mathbb{R}$ *o funcție continuă. Se spune că* φ *este funcție subarmonică în* D_3 *dacă pentru orice* $B_r(a) \subset D_3$ *avem*

$$\varphi(a) \leqslant \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\partial B_r(a)} \varphi(y) \, d\sigma,$$

iar φ *va fi o funcție superarmonică dacă*

$$\varphi(a) \geqslant \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\partial B_r(a)} \varphi(y) \, d\sigma,$$

pentru orice $B_r(a) \subset D_3$.

Din definiția 6 rezultă, în baza rezultatelor de pînă acum că o FA este simultan subarmonică și superarmonică ; reciproc dacă φ este în D_3 sub și superarmonică atunci φ este FA în D_3. Evident, dacă φ este subarmonică în D_3, funcția $-\varphi$ va fi superarmonică în D_3, iar dacă φ_1, φ_2 sînt sub(super)armonice în D_3 și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, atunci combinația liniară $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ este deasemenea sub-(super)armonică în D_3.

Dacă avem în vedere demonstrația teoremei de maxim pentru FA și FPM, va rezulta că dacă φ este subarmonică în D_3 și dacă există un punct $a \in D_3$ cu proprietatea $\varphi(a) \geqslant \varphi(x)$, pentru orice $x \in D_3$, atunci φ este constantă în D_3 ; dacă însă φ este superarmonică în D_3 și $\varphi(a) \leqslant \varphi(x)$ pentru un $a \in D_3$ și orice $x \in D_3$, atunci iarăși φ este constantă în D_3. Cu alte cuvinte funcțiile subarmonice în D_3, neconstante, își ating valorile maxime numai pe ∂D_3 iar funcțiile superarmonice în D_3, neconstante, își ating valorile minime numai pe ∂D_3.

Cu ajutorul funcțiilor sub(super)armonice în D_3 se poate demonstra existența soluției problemei Dirichlet interioară pentru do-

meniul mărginit D_3 (metoda Poincaré-Perron). Fără a intra în amănunte, vom menționa că această metodă constă în următoarele :

Dacă f este restricția FA u la ∂D_3, vom numi *funcție superioară* (*inferioară*) relativă la funcția $f \in C^0(\partial D_3)$ o funcție φ superarmonică (respectiv subarmonică) în D_3 care verifică inegalitatea $\varphi \geqslant f$ (respectiv inegalitatea $\varphi \leqslant f$). Fie $\mathcal{F}$ familia funcțiilor superioare relative la f; această familie nu este vidă, deoarece orice constantă $c \geqslant \sup f$ va fi o funcție superioară ; se definește funcția u în punctul $x \in D_3$ ca marginea inferioară a tuturor valorilor elementelor din $\mathcal{F}$ calculate în x. Se arată că u este FA în D_3 cu proprietatea $u\Big|_{\partial D_3} = f$.

4.5. Funcții potențial de tip special

Fie $s(x, y) = \dfrac{1}{4\pi \| x - y \|}$ funcția potențial elementar a ecuației Laplace $\Delta_3 u = 0$; lăsînd la o parte factorul constant $\dfrac{1}{4\pi}$, cu ajutorul acestei funcții se pot defini următoarele integrale improprii cu parametru

$$U(x) = \int_{D_3} \frac{\sigma(y)}{\| x - y \|} \, \mathrm{d}y \tag{19}$$

$$V(x) = \int_{S} \frac{\mu_1(y)}{\| x - y \|} \, \mathrm{d}\sigma_y, \tag{20}$$

$$W(x) = \int_{S} \mu_2(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{\| x - y \|} \right) \mathrm{d}\sigma_y \tag{21}$$

în care D_3 este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^3$ avînd frontiera ∂D_3 netedă (sau cel puțin netedă pe porțiuni), iar S este o pînză netedă (sau netedă pe porțiuni) din $\mathbb{R}^3$; σ, μ_1 și μ_2 sînt funcții definite și cel puțin integrabile pe mulțimile de definiție ale acestor integrale.

Definiția 7. *Integralele cu parametru* (19), (20) *și* (21) *se numesc respectiv potențial* (*newtonian*) *de volum, de simplu strat și de dublu strat respectiv, definite de funcțiile* σ, μ_1, μ_2.

Observația 9. Potențialii (19)—(21) sînt integrale cu parametri care devin integrale improprii dacă în (20) și (21) $x \in S$, iar în (19) $x \in D_3$; funcțiile σ, μ_1 și μ_2 se numesc *distribuțiile de sarcini* ale potențialilor respectivi.

Teorema 10. i. *Dacă* $\sigma \in C^0(D_3)$, $|\sigma(x)| \leqslant M$, $x \in D_3$, *atunci potențialul de volum* (19) *este o funcție de clasă* C^1 *în* $\mathbb{R}^3$; *în plus*

$$\nabla_3 U(x) = \int_{D_2} \sigma(y)\ \nabla_3^x \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) \mathrm{d}y$$

și pentru $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D_3^-$ *avem* $\Delta_3 U(x) = 0$.

ii. *Dacă* σ *este hölderiană de indice* $\alpha > 0$ *în* D_3^- (*deci dacă* $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant K \|x-y\|^\alpha$ *pentru orice* $x, y \in D_3^-$) *atunci* $U \in C^2(D_3)$ *și se verifică* EDP *Poisson.*

$$\Delta_3 U(x) = -4\pi\sigma(x),\ x \in D_3.$$

iii. *Dacă* $\sigma \in C^k(D_3^-)$ *atunci* $U \in C^{k+1}(D_3)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Fie $h_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h_\delta(\|x-y\|) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x-y\|}, & \text{pentru } \|x-y\| > \delta \\ \dfrac{1}{2\delta}\left(3 - \dfrac{\|x-y\|^2}{\delta^2}\right), & \text{pentru } \|x-y\| \leqslant \delta; \end{cases}$$

rezultă $h_\delta \in C^1(\mathbb{R})$ și de aceea definind $U_\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ prin

$$U_\delta(x) = \int_{D_3} \sigma(y) h_\delta(\|x-y\|)\, \mathrm{d}y,$$

în baza teoriei integralelor cu parametru, va rezulta $U_\delta \in C^1(\mathbb{R}^3)$ și

$$\nabla_x U_\delta(x) = \int_{D_3} \sigma(y)\ \nabla_x h_\delta(\|x-y\|)\, \mathrm{d}y.$$

Fie $x \in D_3$ fixat; dacă $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D_3^-$, U este evident de clasă C^∞; comparînd U și U_δ rezultă $U = U_\delta$ în afara lui $B_\delta(x)$ și deci

$$|U(x) - U_\delta(x)| \leqslant \int_{B_\delta(x)} |\sigma(y)| \left| \frac{1}{\|x-y\|} - \frac{3}{2\delta} + \frac{\|x-y\|^2}{2\delta^3} \right| \mathrm{d}y.$$

Deoarece $|\sigma(y)| \leqslant M$, $y \in D_3^-$, iar $\mathrm{d}y = r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\omega$ ($\mathrm{d}\omega = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$) în coordonate sferice avînd polul în punctul x, se deduce, deoarece $\|x-y\| = r$

$$|U(x) - U_\delta(x)| \leqslant M \cdot 4\pi \int_0^\delta r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2\sigma} + \frac{2}{2\delta^3} \right) \mathrm{d}r = \frac{2\pi}{5} M\delta^2$$

și deci U_δ converge uniform către U ($\delta \to 0$); cum $U_\delta \in C^1(\mathbb{R}^3)$, se deduce $U_\delta \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

Să notăm cu U^* integrala improprie (pentru $x \in D_3$)

$$U^*(x) = \int_{D_3} \sigma(y) \nabla_3^x \left(\frac{1}{||x-y||} \right) dy$$

și deoarece avem (utilizînd regula de derivare sub semnul integral)

$$\nabla_3 U_\delta(x) = \int_{D_3} \sigma(y) \nabla_3^x h_\delta(||x-y||) dy \in C^0(\mathbb{R}^3).$$

dacă $\nabla_3 U_\delta$ converge uniform către U^*, va rezulta i; or

$$|U^*(x) - \nabla_3 U_\delta(x)| \leqslant \int_{B_\delta(x)} |\sigma(y)| \left| \nabla_3^x \left(\frac{1}{||x-y||} \right) + \nabla_3^x \left(\frac{||x-y||^2}{2\delta^3} \right) \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi M \int_0^\delta r^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{r}{\delta^3} \right) dr = \frac{4\pi}{\delta} M\delta,$$

deoarece $\nabla_3^x \left(\frac{1}{||x-y||} \right) = - \frac{(x_1-y_1)\vec{i} + (x_2-y_2)\vec{j} + (x_3-y_3)\vec{k}}{||x-y||^3}$,

deci $\left\| \nabla_3^x \left(\frac{1}{||x-y||} \right) \right\| = \frac{1}{||x-y||^2}$, iar $\nabla_3^x \left(\frac{||x-y||^2}{2\delta^2} \right) =$

$= \frac{(x_1-y_1)\vec{i} + (x_2-y_2)\vec{j} + (x_3-y_3)\vec{k}}{\delta^3}$, deci $\left\| \nabla_3^x \left(\frac{||x-y||^2}{2\delta^3} \right) \right\| \leqslant \frac{||x-y||}{\delta^3}$.

Așadar $\nabla_3 U_\delta$ converge uniform către U^*.

ii. Demonstrația este asemănătoare celei de la i cu diferența că se consideră funcția $g_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g_\delta(||x-y||) = \begin{cases} \frac{1}{||x-y||^3}, & \text{pentru } ||x-y|| > \delta \\ \frac{1}{2\delta^3} \left(5 - \frac{3}{\delta^2} ||x-y||^2 \right), & \text{pentru } ||x-y|| \leqslant \delta \end{cases}$$

care conduce la considerarea integralei (deoarece $\nabla_3 U(x) =$

$$= - \int_{D_3} \sigma(y) \frac{(x_1-y_1)\vec{i} + (x_2-y_2)\vec{j} + (x_3-y_3)\vec{k}}{||x-y||^3} dy,$$

$$u_\delta(x) = - \int_{D_3} \sigma(y) [(x_1-y_1)\vec{i} + (x_2-y_2)\vec{j} + (x_3-y_3)\vec{k}] \, g_\delta(||x-y||) \, dy;$$

deoarece se verifică ușor că $g_\delta \in C^1(\mathbb{R}^3)$, avem $u_\delta \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Pentru $\|x-y\| \leqslant \delta$, prin calcul direct se deduce, pentru $\|x-y\| \leqslant \delta$,

$$\operatorname{div}_x \{[(x_1-y_1)\vec{i}+(x_2-y_2)\vec{j}+(x_3-y_3)\vec{k}]g_\delta(\|x-y\|)\} = \frac{15}{2}\left(\frac{1}{\delta^3}-\frac{1}{\delta^5}\|x-y\|^2\right),$$

iar prin integrare, în sfera $B_\delta(x)$, rezultă

$$\int_{B_\delta(x)} \operatorname{div}_x\{[(x_1-y_1)\vec{i}+(x_2-y_2)\vec{j}+(x_3-y_3)\vec{k}]\, g_\delta(\|x-y\|)\}\, dy = 4\pi.$$

De aceea, vom avea, ținînd cont că pentru $y \in D_3 \setminus B_\delta(x)$, $\operatorname{div} u_\delta(x) = 0$ (deoarece $\Delta_3^x\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) = 0,\ y \neq x$)

$$\operatorname{div} u_\delta(x) = -\int_{B_\delta(x)} \sigma(y)\operatorname{div}_y\{[(x_1-y_1)\vec{i}+(x_2-y_2)\vec{j}+(x_3-y_3)\vec{k}]\, g_\delta(\|x-y\|)\}\, dy =$$

$$= -4\pi\sigma(x) + \int_{B_\delta(x)} [\sigma(x)-\sigma(y)] \operatorname{div}\{[(x_1-y_1)\vec{i}+(x_2-y_2)\vec{j}+(x_3-y_3)\vec{k}]g(\|x-y\|)\}\, dy,$$

iar în baza ipotezei $|\sigma(x)-\sigma(y)| \leqslant M\|x-y\|^\alpha$, rezultă

$$|\operatorname{div} u_\delta(x) + 4\pi\,\sigma(x)| \leqslant M_1\delta^\alpha,$$

adică $\operatorname{div} u_\delta(x)$ converge uniform către $-4\pi\sigma(x)$, cînd $\delta \to 0$. Cum u_δ converge uniform în raport cu x către ∇U, din rezultatul anterior decurge concluzia dorită: $U \in C^2(D_3)$ și $\Delta_3 U(x) = -4\pi\sigma(x)$, $x \in D_3$.

iii. Deoarece la punctul i s-a arătat că $\sigma \in C^0(D_3)$ implică $U \in C^1(\mathbb{R}^3)$ va fi suficient să justificăm afirmația pentru $k=1$, pentru $k>1$ raționîndu-se în mod analog. Fie deci $\sigma \in C^1(D_3)$ cînd prin aplicarea punctului i rezultă $U \in C^1(D_3)$, iar cum $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)$ avem

$$\nabla_3 U(x) = \int_{D_3} \sigma(y)\nabla_3^x\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) dy = -\int_{D_3} \sigma(y)\nabla_3^y\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) dy;$$

în ipoteza $\sigma \in C^1(D_3)$, are loc identitatea

$$\sigma(y)\nabla_3^y\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) = \nabla_3^y\left[\frac{\sigma(y)}{\|x-y\|}\right] - \frac{1}{\|x-y\|}\nabla_3\sigma(y),\ x \in D_3$$

și de aceea $\nabla_3 U$ se poate scrie sub forma:

$$\nabla_3 U(x) = \int_{D_3} \frac{1}{\|x-y\|}\nabla_3\sigma(y)dy - \int_{D_3} \nabla_3^y\left[\frac{\sigma(y)}{\|x-y\|}\right] dy,\ x \in D_3.$$

Aplicînd identitatea integrală a gradientului $\int_{D_3} \nabla_3 \varphi(y)\, dy = \int_{\partial D_3} \varphi(y) \nu_y d\sigma_y$, se deduce identitatea vectorială

$$\nabla_3 U(x) = \int_{D_3} \frac{1}{\|x-y\|} \nabla_3 \sigma(y) dy - \int_{\partial D_3} \frac{\sigma(y)\nu_y}{\|x-y\|} d\sigma_y, \quad x \in D_3,$$

care arată că $\nabla_3 U \in C^1(D_3)$ (deoarece în baza lui i avem $\int_{D_3} \frac{1}{\|x-y\|} \nabla_3 \sigma(y)\, dy \in C^1(\mathbb{R}^3)$, iar integrala de suprafață $\int_{\partial D_3} \frac{\sigma(y)\nu_y}{\|x-y\|} d\sigma_y$ va defini o funcție indefinit derivabilă în $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D_3$), deci $U \in C^2(D_3)$. Repetînd procedeul anterior, dacă $\sigma \in C^2(\bar{D}_3)$ va rezulta $U \in C^3(D_3)$ etc.

Teorema 10 conține cîteva rezultate privind convergența integralelor multiple improprii, convergența fiind înțeleasă în sensul valorii principale; astfel, dacă $x \in D_3$, integrala improprie care definește potențialul de volum U este convergentă, iar derivatele parțiale de primul ordin se obțin prin derivare directă sub semnul integral (pe componente, proprietatea de derivare de la i din teorema 10 se scrie $\frac{\partial U}{\partial x_j}(x) = \int_{D_3} \sigma(y) \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right) dy$). În legătură cu aceste probleme, vom justifica următorul rezultat:

Propoziția 1. *Fie $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit cu frontiera netedă pe porțiuni, f o funcție integrabilă astfel încît $|f(x)| \leqslant M$, $x \in \bar{D}_3$. Atunci integralele improprii cu parametru de forma*

$$F(x) = \int_{D_3} \frac{f(y)}{\|x-y\|^\alpha} dy, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in D_3$$

sînt uniform convergente, în sensul valorii principale pentru $\alpha < 3$.

Scriind $F = F_1 + F_2$, unde

$$F_1(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{f(y)}{\|x-y\|^\alpha} dy, \quad F_2(x) = \int_{D_3 \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{f(y)}{\|x-y\|^\alpha} dy, \; B_\varepsilon(x) \subset D_3,$$

cum $F_2 \in C^\infty$(integrandul nefiind discontinuu în $D_3 \setminus B_\varepsilon(x)$) este suficient să discutăm convergența integralei care definește pe F_1; cum în $B_\varepsilon(x)$ avem $dy = r^2 dr d\omega$, rezultă deoarece $\|x - y\| = r$,

$$|F_1(x)| \leqslant M \int_0^\varepsilon r^{2-\alpha}\, dr \int_{S_1} d\omega = 4\pi M \frac{\varepsilon^{3-\alpha}}{3-\alpha}, \quad \alpha < 3$$

și $F_1 \to 0$ cînd $\varepsilon \to 0$, dacă $\alpha < 3$, convergența fiind uniformă.

Din această propoziție rezultă direct convergența integralelor care definesc derivatele parțiale de primul ordin ale potențialului de volum (cînd $\alpha = 2$) și prin analogie se pot stabili și situațiile cînd integralele de suprafață de forma $F(x) = \iint_S \frac{f(y)}{\|x-y\|^\alpha}\, d\sigma_y$ sînt convergente (dacă $x \in S$, S pînză netedă mărginită din $\mathbb{R}^3$, f integrabilă și mărginită pe S) în sensul valorii principale pentru $\alpha < 2$.

În ceea ce privește ii din teorema 10, dacă $\sigma \in C_0^1(D_3)$, $|\sigma(x)| \leqslant M$, $x \in D_3^-$, o demonstrație mai simplă se poate realiza în modul următor:

$$\Delta_3 U(x) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_{D_3} \frac{\sigma(y)}{\|x-y\|}\, dy = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{D_3} \sigma(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) dy =$$

$$= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{D_3} \sigma(y)\, \frac{y_j - x_j}{\|x-y\|^3}\, dy;$$

cu schimbarea de variabile $y \leftrightarrow z$, $y_j - x_j = z_j$; $j = 1, 2, 3$, va rezulta

$$\Delta_3 U(x) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{G_3} \sigma(z + x) \frac{z_j}{\|z\|^3}\, dz$$

cu G_3 translatatul lui D_3 prin schimbarea utilizată. Deoarece $\sigma \in C^1$ se poate deriva sub semnul integral și vom avea

$$\Delta_3 U(x) = \sum_{j=1}^3 \int_{G_3} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j}(z + x) \frac{z_j}{\|z\|^3}\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^3 \int_{G_3 \setminus B(0)} \frac{\partial \sigma}{\partial z_j}(z+x) \cdot \frac{z_j}{\|z\|^3}\, dz$$

(deoarece $\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}(z + x) = \frac{\partial \sigma}{\partial z_j}(z + x)$; apoi, utilizînd un calcul efectuat anterior rezultă, dacă $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$) este versorul normalei exterioare:

$$\Delta_3 U(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^3 \int_{G_3 \setminus B_\varepsilon(0)} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} \left[\sigma(z + x) \frac{z_j}{\|z\|^3} \right] - \sigma(z + x) \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{z_j}{\|z\|^3} \right) \right\} dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\sum_{j=1}^{3} \int_{\partial G_3} \sigma(z + x) \frac{z_j \nu_j}{\|z\|^3} \, d\sigma_z - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \sigma(x + z) \frac{z_j \nu_j}{\|z\|^3} \, d\sigma_z = \right.$$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \sigma(x + z) \frac{(z, \nu)}{\|z\|^3} \, d\sigma_z,$$

integrala pe ∂G_3 fiind nulă deoarece se presupune $\sigma \Big|_{\partial G_3} = 0$; cum pe $\partial B_\varepsilon(0)$ avem $z = \varepsilon \nu$, rezultă $(z, \nu) = \varepsilon \|\nu\|^2 = \varepsilon \|z\| = \varepsilon$, $d\sigma = \varepsilon^2 \, d\omega$, și se deduce

$$\Delta_3 U(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_1} \sigma(x + \varepsilon \nu) \, d\omega = - \iint_{S_1} \sigma(x) d\omega = - \sigma(x) \iint_{S_1} d\omega = -4\pi\sigma(x).$$

Observația 10. Deoarece $\Delta_3 U(x) = 0$, pentru $x \in R^3 \setminus D_3^-$, iar $\Delta_3 U(x) = -4\pi\sigma(x)$ pentru $x \in D_3$, rezultă că *potențialul de volum U generat de funcția σ hölderiană în D_3 nu este o funcție de clasă C^2 în $\mathbb{R}^3$ ci este o funcție de clasă C^2 pe porțiuni* (derivatele parțiale de ordinul al doilea vor fi continue în D_3 și în $\mathbb{R}^3 \setminus D_3^-$, deci aceste derivate vor admite un salt pe ∂D_3).

Observația 11. *Teorema* 10 *permite integrarea* EDP *de tip Poisson* $\Delta_3 u(x) = F(x)$, *dacă F este hölderiană în D_3*; scriind

$$u(x) = v(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{D_3} \frac{F(y)}{\|x - y\|} \, dy$$

rezultă $\Delta_3 u(x) = \Delta_3 v(x) - \frac{1}{4\pi} \Delta_3 \left(\int_{D_3} \frac{F(y)}{\|x - y\|} \, dy \right) = \Delta_3 v(x) + F(x)$ și prin înlocuire în ecuația Poisson $\Delta_3 u = F$, se deduce $\Delta_3 v = 0$. Așadar, cu ajutorul potențialului newtonian de volum integrarea oricărei ecuații Poisson se va reduce la integrarea unei ecuații Laplace.

Teorema 10 conține proprietățile de bază ale potențialului newtonian de volum; pentru potențialii de simplu și dublu strat (20) respectiv (21) vom prezenta proprietățile lor mai deosebite, presupunînd $S = \partial D_3$ (ceea ce nu constituie o restricție : dacă S nu este frontiera unui domeniu din $\mathbb{R}_3$, prin considerarea unei alte pînze netede S', putem presupune $\partial D_3 = S \cup S'$; prelungind funcțiile μ_1 și μ_2 cu valoarea zero pe S', va rezulta evident $\int_{\partial D_3} \frac{\mu(y)}{\|x - y\|} \, d\sigma_y = \int_S \frac{\mu(y)}{\|x - y\|} \, d\sigma =$

$= V(x)$ și analog pentru $W(x)\Big)$. De regulă, se presupune $\partial D_3 \in C^2$ (deci și $S \in C^2$) și notînd $D_3' = \mathbb{R}^3 \setminus D_3^-$, vom scrie

$$f(x_0)\Big|_i = \lim_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in D_3}} f(x), \quad f(x_0)\Big|_e = \lim_{\substack{x \to x_0 \in S \\ x \in D_3'}} f(x),$$

dacă aceste limite există.

Teorema 11. *Fie μ_1 și μ_2 funcții continue pe ∂D_3 și $x_0 \in \partial D_3$; atunci*

i. $V \in C^0(\mathbb{R})$;

ii. $$W(x_0)\Big|_e = 2\pi\mu_2(x_0) + \int_{\partial D_3} \mu_2(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{\|x_0 - y\|}\right) \mathrm{d}\sigma_y$$

$$W(x_0)\Big|_i = -2\pi\mu_2(x_0) + \int_{\partial D_3} \mu_2(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{\|x_0 - y\|}\right) \mathrm{d}\sigma_y;$$

iii. $$\lim_{h \to 0}\left[\frac{\partial W}{\partial \nu_{x_0}}(x_0 + h\nu_{x_0}) - \frac{\partial W}{\partial \nu_{x_0}}(x_0 - h\nu_{x_0})\right] = 0,$$

dacă ν_{x_0} este versorul normalei exterioare la ∂D_3 în punctul x_0;

iv. $$\frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0)\Big|_e = -2\pi\mu_1(x_0) + \int_{\partial D_3} \mu_1(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}}\left(\frac{1}{\|x_0 - y\|}\right) \mathrm{d}\sigma_y$$

$$\frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0)\Big|_i = 2\pi\mu_1(x_0) + \int_{\partial D_3} \mu_1(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}}\left(\frac{1}{\|x_0 - y\|}\right) \mathrm{d}\sigma_y;$$

v. $V,\ W \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial D_3)$, $\Delta_3 V(x) = 0$, $\Delta_3 W(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ *(funcția W fiind continuă cînd $x_0 \in \partial D_3$, aceeași proprietate avînd-o și funcția* $\int_{\partial D_3} \mu_1(y)\, \frac{\partial}{\partial \nu_{x_0}}\left(\frac{1}{\|x_0 - y\|}\right) \mathrm{d}\sigma_y$*)*

Punctele i—iv se demonstrează cu anumite dificultăți și din cauza lungimii acestora, nu le prezentăm aici; punctul v este banal deoarece dacă $x \in \sigma D_3$ integralele care definesc potențialii V și W nu mai sînt improprii; deoarece $\frac{1}{\|x - y\|} \in C^\infty$, dacă $x \neq y$, rezultă $V,\ W \in C^\infty$, $x \notin \partial D_3$ și derivarea se efectuează direct sub semnul integral

$$\Delta_3 V(x) = \Delta_3\left(\int_{\partial D} \frac{\mu_1(y)}{\|x - y\|}\, \mathrm{d}\sigma_y\right) = \int_{\partial D_3} \mu_1(y) \Delta_3^x\left(\frac{1}{\|x - y\|}\right) \mathrm{d}\sigma_y = 0$$

deoarece $x \neq y$ și în consecință $\Delta_3^x\left(\frac{1}{\|x - y\|}\right) = 0$;

$$\Delta_3 W(x) = \Delta_3 \left[\int_{\partial D_3} \mu_2(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{x-y\|} \right) \mathrm{d}\sigma_y \right] = \int_{\partial D_3} \mu_2(y) \Delta_3^x \left[\frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right] \mathrm{d}\sigma_y = \right.$$

$$= \int_{\partial D_3} \mu_2(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left[\Delta_3^x \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) \right] \mathrm{d}\sigma_y = 0, \quad x \neq y,$$

utilizînd faptul că pentru $x \neq y$ funcția $\frac{1}{\|x-y\|}$ este indefinit derivabilă și în consecință derivatele de orice ordin sînt permutabile între ele : $\frac{\partial}{\partial \nu_y} \Delta_3^x c = \Delta_3^x \frac{\partial c}{\partial \nu_y}$, $c(x, y) = \frac{1}{\|x-y\|}$.

Observația 12. *În baza proprietății v din teorema* 11 *și a formulei de reprezentare* (6) (cu $\varphi = 0$) *rezultă că orice* FA *în* D_3 *este indefinit derivabilă în acest domeniu*; într-adevăr, din (6) se deduce cu x în loc de y și $\varphi = 0$

$$u(x) = \int_{\partial D_3} \frac{1}{\|x-y\|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, \mathrm{d}\sigma_y - \int_{\partial D_3} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) \mathrm{d}\sigma_y,$$

deci orice FA se poate scrie ca o combinație liniară dintre un potențial de simplu strat $\left(\mu_1 = \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)$ și un potențial de dublu strat ($\mu_2 = -u$) și deci $u \in C^\infty(D_3)$.

De asemenea, va exista o legătură strînsă între potențialii U și V și polinoamele Legendre; acestea din urmă sînt polinoame ortogonale pe intervalul $[-1, 1]$ și posedă proprietatea

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x), \quad |t| < 1$$

dacă $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [(x^2-1)^n]$ este polinomul Legendre de gradul n (vezi cap. IV, punctul 4). Această legătură se poate stabili cu ajutorul teoremei cosinusului cînd $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \, \|y\| \cos\gamma$, γ fiind unghiul dintre dreptele care trec prin origină și punctele x și y. Presupunînd D_3 (în cazul funcției U) sau S (în cazul funcției V) mărginiți și $\|x\| > \|y\|$, se deduce

$$\frac{1}{\|x-y\|} = \frac{1}{\sqrt{\|x\| - 2\|x\| \, \|y\| \cos\gamma + \|y\|^2}} =$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\|y\|}{\|x\|}\cos\gamma + \frac{\|y\|^2}{\|x\|}}} = \frac{1}{\|x\|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|y\|}{\|x\|} \right)^n P_n(\cos\gamma), \quad \frac{\|y\|}{\|x\|} < 1.$$

Rezultă

$$U(x) = \int_{D_3} \frac{\sigma(y)}{\|x-y\|}\,dy = \frac{1}{\|x\|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\|x\|^n}\int_{D_3}\sigma(y)\,\|y\|^n P_n(\cos\gamma)\,dy$$

$$V(x) = \int_S \frac{\mu_1(y)}{\|x-y\|}\,d\sigma_y = \frac{1}{\|x\|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\|x\|^n}\int_S \mu_1(y)\|y\|^n P_n(\cos\gamma)\,d\sigma_y$$

şi deci, în particular, $U,\ V \to 0$ cînd $\|x\| \to \infty$.

Observaţia 13. *Proprietăţile potenţialilor de simplu şi dublu strat pot fi utilizate pentru a demonstra existenţa soluţiei problemei Dirichlet interioare, cu condiţia rezolvării unei ecuaţii integrale.*

Se utilizează următorul procedeu :

Potenţialul de dublu strat (21) cu $\mu_2 \in C^0(\partial D_3)$ este o FP în D_3 şi deoarece există $W(x)\Big|_i$, pentru $x \in \partial D_3$ (proprietatea ii din teorema 11), scriind

$$u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial D_3} \mu_2(y)\,\frac{\partial}{\partial \nu_z}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)d\sigma_y, & \text{pentru } x \in D_3 \\ W(x)\Big|_i & \text{pentru } x \in \partial D_3 \end{cases} \tag{22}$$

u va fi o FA în D_3 şi mai rămîne de justificat condiţia la limită $u\Big|_{\partial D_3} = f$;

= cum $u \in C^\circ(D_3^-)$ avem $u\Big|_{\partial D_3} = u_i$, unde $u_i(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \in \partial D_3 \\ x \in D_3}} u(x)$ şi în baza lui ii din teorema 11 va rezulta

$$f(x_0) = -2\pi\mu_2(x_0) + \int_{\partial D_3}\mu_2(y)\,\frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{\|x_0-y\|}\right)d\sigma_y,\quad x_0 \in \partial D_3.$$

Ultima egalitate poate fi interpretată ca o ecuaţie integrală pentru μ_2; se arată că această ecuaţie integrală admite întotdeauna o singură soluţie continuă μ_2 oricare va fi $f \in C^0(\partial D_3)$, iar funcţia (22) va fi, cu acest μ_2, soluţia căutată pentru problema Dirichlet în cauză. Această metodă de rezolvare a problemei Dirichlet a fost imaginată de către matematicianul norvegian Fredholm care cu această ocazie a demon-

strat teoremele care îi poartă numele și care rezolvă complet problema găsirii soluțiilor ecuațiilor integrale de forma :

$$u(x) = f(x) + \int_A K(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y$$

K fiind nucleul acestei ecuații, iar $A \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit sau o pînză netedă (funcția K poate admite pe A și discontinuități integrabile).

Remarcabil este faptul că prin această metodă se pot rezolva și alte probleme la limită, nu numai problema Dirichlet interioară ; vom enunța acum aceste probleme notînd cu D_3 un domeniu mărginit cu frontiera netedă, iar D_3' este definit prin $D_3' = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_3$.

Problema Dirichlet exterioară : *Să se determine în* D_3' *o soluție a ecuației Laplace* $\Delta_3 u = 0$ *cu următoarele proprietăți* :

i. $u \in C^2(D_3')$, $u \in C^0(D_3 \cup \partial D_3)$;

ii. $u\Big|_{\partial D_3} = f$, $f \in C^0(\partial D_3)$;

iii. *Pentru* $\|x\| \to \infty$, $x \in D_3'$, $u(x) \to 0$ *ca* $\dfrac{1}{\|x\|}$, $\nabla_3 u(x) \to 0$ *ca* $\dfrac{1}{\|x\|^2}$

(*convergența fiind uniformă*).

Problema Neumann interioară : *Să se determine în* D_3 *o soluție a ecuației Laplace* $\Delta_3 u = 0$, *astfel încît* :

i. $u \in C(\bar{D}_3)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \in \partial D_3 \\ x \in D_3}} \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ *să existe*

ii. $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x)\Big|_{\partial D_3} = f$, $f \in C^0(\partial D_3)$.

Problema Neumann exterioară : *Să se determine în* D_3' *o soluție a ecuației Laplace* $\Delta_3 u = 0$, *astfel încît* :

i. $u \in C^2(D_3')$, $u \in C^0(D_3' \cup \partial D_3)$, *există* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \in \partial D_3 \\ x \in D_3'}} \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$;

ii. $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x)\Big|_{\partial D_3} = f, \quad f \in C_0(\partial D_3)$;

iii. *Pentru* $\|x\| \to \infty$, $x \in D_3'$, $u(x)$ *să tindă uniform la zero astfel încît* $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|x\|\,|u(x)| = 0$ *şi* $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|x\|^2\,\|\nabla_3 u(x)\| = 0$, $x \in D_3'$.

Extinzînd procedeul indicat mai sus pentru problema Dirichlet interioară la celelalte trei probleme la limită, căutînd pentru problemele de tip Dirichlet o soluţie de forma unui potenţial de dublu strat, iar pentru problemele de tip Neumann o soluţie de forma unui potenţial de simplu strat se obţin patru ecuaţii integrale de tip Fredholm care însă se cuplează cîte două : problema Dirichlet interioară cu problema Neumann exterioară şi problema Neumann interioară cu problema Dirichlet exterioară. Aplicînd rezultatele demonstrate de Fredholm acestor ecuaţii integrale, va rezulta că toate aceste probleme admit o singură soluţie, dacă datele pe ∂D_3 sînt funcţii continue, cu excepţia problemei Neumann interioară care admite soluţie dacă şi numai dacă datele la frontieră $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = f(x)$, $x \in \partial D_3$ verifică relaţia $\int\limits_{\partial D_3} f(x)\,\mathrm{d}\sigma = 0$. Nu vom insista asupra acestor aspecte, dar trebuie remarcată posibilitatea definirii problemelor anterioare şi pentru domenii $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ care nu sînt mărginite ; astfel dacă D_3 este semispaţiul $x_3 > 0$, problema Dirichlet $u(x)\Big|_{x_3=0} = f(x_1, x_2)$, cu anumite condiţii de regularitate cînd $\|x\| \to \infty$, $x_3 > 0$, f fiind funcţie continuă în $\mathbb{R}^2$ mărginită la infinit, se rezolvă cu ajutorul formulei Poisson

$$u(x) = u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3]^{3/2}}$$

4.6. Funcţii şi valori proprii pentru ecuaţia Laplace

În rezolvarea problemelor la limită este posibilă utilizarea unor metode speciale bazate pe noţiunile analizei funcţionale. Vom ilustra această posibilitate în cazul problemei Dirichlet interioare, considerînd spaţiile Sobolev $\overset{\circ}{H}_1(D_3)$. Reamintim că $f \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$ dacă există un

șir $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ din $C_0^\infty(D_3)$ astfel încît $\|\varphi_n - f\|_1 \to 0\ (n \to \infty)$, unde

$$(\varphi, \psi)_1 = \int\limits_{D_3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \varphi\psi\right)\mathrm{d}x, \quad \|\varphi\|_1 = \sqrt{(\varphi, \varphi)_1}. \qquad (23)$$

Vom avea $f \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$ dacă f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} \in L_2(D_3)$, unde $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, 3$ sînt derivatele parțiale ale lui f în sensul teoriei distribuțiilor, iar $g \in L_2(D_3)$ dacă $\|g\|_0 < \infty$, unde

$$(\varphi, \psi)_0 = \int\limits_{D_3}\varphi\psi\,\mathrm{d}x, \ \|\varphi\|_0 = \sqrt{(\varphi, \varphi)_0}. \qquad (23')$$

Rezultă că (23) se mai poate scrie și sub forma $(\varphi, \psi)_1 = \sum\limits_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)_0 + (\varphi, \psi)_0$, rezultînd $\|\varphi\|_1^2 = \sum\limits_{j=1}^{3}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2$; prin urmare, avem $\|\varphi\|_0 \leqslant \|\varphi\|_1$, iar $\overset{\circ}{H}_1(D_3)$ este un spațiu Hilbert ca și $L_2(D_3)$ $(H_0(D_3) = H_0^0(D_3) = L_2(D_3)$, $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ fiind ca și pînă acum un domeniu mărginit cu frontiera cel puțin netedă pe porțiuni.

Definiția 8. *Fie* $A = \left\{u \,\middle|\, u \in C^2(D_3),\ u \in C^0(D_3^-),\ u\Big|_{\partial D_3} = 0\right\}$; *un număr* (*real sau complex*) λ *căruia i se poate atașa o funcție* $u \in A$ *cu proprietățile*

$$\Delta_3 u(x) + \lambda u(x) = 0,\ x \in D_3,\ (u, u)_0 = 1$$

se va numi valoare proprie din A *a operatorului lui Laplace* Δ_3; *funcția* u *se va numi funcție proprie atașată valorii proprii* λ.

Problema care ne interesează se referă la existența acestor funcții și valori proprii; pentru aceasta vom folosi rezultatele din cap. IV, punctul 5 și formulele din acest punct.

Astfel, utilizînd prima formulă (identitate) Green (4), adică

$$\int\limits_{D_3} v\Delta_3 u\,\mathrm{d}x + \int\limits_{D_3}(\nabla_3 v,\ \nabla_3 u)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial D_3} v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}\sigma$$

în care vom presupune $v = \varphi \in C_0^\infty(D_3)$ și u o funcție proprie (în ipo-

teza că există) corespunzătoare valorii proprii λ, deoarece în formula anterioară avem $(\nabla_3 u,\ \nabla_3 v) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}$, cum $v|_{\partial D_3} = \varphi|_{\partial D_3} = 0$, iar $\Delta_3 u = -\lambda u$, rezultă identitatea integrală

$$\int_{D_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x = \lambda\int_{D_3}\varphi u\,\mathrm{d}x,$$

care, cu notațiile (23′) și

$$B(u, \varphi) = \int_{D_3}\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right]\mathrm{d}x, \tag{24}$$

se transcrie

$$B(\varphi, u) = \lambda(\varphi, u)_0. \tag{25}$$

Comparînd cu cele expuse în cap. IV, punctul 5, dacă $B : \mathring{H}_1 \times \mathring{H}_1 \to \mathbb{R}$ va fi o formă biliniară simetrică, mărginită și coercitivă, va rezulta existența unui șir $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathbb{R}$ constituind valorile proprii cărora le va corespunde un șir $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de funcții proprii din $\mathring{H}_1(D_3)$; or, din (24) rezultă imediat că $B(\varphi, \psi) = B(\psi, \varphi)$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(D_3)$ precum și mărginirea lui B (de fapt avem $B(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_1 - (\varphi, \psi)_0$ și deci $|B(\varphi, \psi)| \leqslant |(\varphi, \psi)_1| + |(\varphi, \psi)_0|$; aplicînd inegalitatea lui Schwartz și majorarea $\|\varphi\|_0 \leqslant \|\varphi\|_1$, rezultă $B(\varphi, \psi) \leqslant \|\varphi\|_1\|\psi\|_1 + \|\varphi\|_0\|\psi\|_0 \leqslant 2\|\varphi\|_1\|\psi\|_1$).
Calculînd $B(\varphi, \varphi)$ rezultă

$$B(\varphi, \varphi) = \int_{D_3}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \|\varphi\|_1^2 - \|\varphi\|_0^2, \tag{26}$$

deci B este coercitivă (comparînd cu 4) din punctul 5, cap. IV, rezultă $k_1 = 1$, $k_0 = 1$); se poate presupune B strict coercitivă (deci $k_0 = 0$), deoarece înlocuind λ prin $\lambda + a$, $a \in \mathbb{R}$, (25) se va scrie

$$B(\varphi, u) - a(\varphi, u)_0 = \lambda(\varphi, u)_0$$

rezultînd din (26)

$$B(\varphi, \varphi) - a(\varphi, \varphi)_0 = \|\varphi\|_1^2 - (a+1)\|\varphi\|_0^2$$

și deci pentru $a = -1$ va rezulta $k_1 = 1$, $k_0 = 0$. Utilizînd acum rezultatele din cap. IV, punctul 5, rezultă

Teorema 12. *Ecuația Helmholtz $\Delta_3 u + \lambda u = 0$, admite în $\mathring{H}_1(D_3)$ o infinitate numărabilă de funcții proprii $(u_n)_{n\geqslant 1}$ care formează un șir*

ortonormal în $L_2(D_3)$ *și care definește o bază în* $\overset{\circ}{H}_1(D_3)$; *șirul valorilor proprii* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *este strict crescător*: $\lambda_n \to \infty\,(n \to \infty)$.

Evident $A \subset \overset{\circ}{H}_1(D_3)$ și este important de arătat că $u_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ (vezi definiția 8).

Folosind rezultatele anterioare, se pot obține informații suplimentare relative la șirurile $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ și $(u_n)_{n\geqslant 1}$ definite prin teorema 1. Astfel, reluînd calculele care au condus la identitatea 6, presupunînd $E = G$, G fiind funcția Green a problemei Dirichlet interioare pentru D_3, dacă $u_n \in C^2$ și verifică EDP $\Delta_3 u_n + \lambda_n u_n = 0$, va rezulta egalitatea

$$u_n(x) = \lambda_n \int_{D_3} G(x, y)\, u_n(y)\, \mathrm{d}y. \tag{27}$$

Deși relația (27) a fost dedusă în ipoteza $u_n \in C^2(D_3)$, totuși ea rămîne valabilă și dacă $u_n \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$; într-adevăr, dacă $u_n \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$ rezultă $\int_{D_3} G(x, y)\, u_n(y)\, \mathrm{d}y \in C^1(D_3)$, deoarece notînd $v_n(x) = \int_{D_3} G(x, y)\, u_n(y)\, \mathrm{d}y$ și presupunînd că $(\varphi_{n,k})_{k\geqslant 1}$ este șirul din $C_0^\infty(D_3)$ convergent în norma lui $\overset{\circ}{H}_1(D_3)$ către u_n, aplicînd inegalitatea lui Schwarz, se deduce :

$$|v_{n,k}(x) - v_{n,l}(x)| = \left| \int_{D_3} G(x, y)[\varphi_{n,k}(y) - \varphi_{n,l}(y)]\, \mathrm{d}y \right| \leqslant \int_{D_3} |G(x, y)||\varphi_{nk,}(y) -$$

$$- \varphi_{n,l}(y)|\mathrm{d}y \leqslant \left[\int_{D_3} G^2(x, y)\, \mathrm{d}y\right]^{1/2} \left(\int_{D_3} [\varphi_{n,k}(y) - \varphi_{n,l}(y)]^2\, \mathrm{d}y\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_{n,k} - \varphi_{n,l}\|_1 \left[\int_{D_3} G^2(x, y)\, \mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

Deoarece $G(x, y) = \dfrac{1}{4\pi} \cdot \dfrac{1}{\|x - y\|} + \varphi(x, y)$, φ fiind armonică, în baza rezultatelor din 4.5, integrala improprie $\int_{D_3} G^2(x, y)\, \mathrm{d}y$ va avea proprietăți analoage derivatei unui potențial de volum cu $\sigma(y) = 1$ în D_3 deci $\int_{D_3} G^2(x, y)\, \mathrm{d}y$ va fi o funcție continuă, deci mărginită; așadar,

deoarece şirul $(v_{n,k})_{n\geqslant 1}$ este uniform convergent în D_3 (avem $|v_{n,k}(x) - v_{n,l}(x)| \leqslant M\|\varphi_{n,k} - \varphi_{n,l}\|_1 \to 0$, $l, k \to \infty$), iar $v_{n,k} \in C^\infty(D_3)$, ($v_{n,k}$ fiind de forma unui potenţial de volum cu $\sigma = \varphi_{n,k} \in C_0^\infty(D_3)$ dacă se face abstracţie de termenul $\int_{D_3} \varphi(x, y)\varphi(y)\,dy$ care nu ridică probleme) se deduce $v_{n,k} \in C^0(D_3)$, iar $\lim_{n\to\infty} v_{n,k} = v_n$, convergenţa fiind uniformă în D_3. Aşadar, membrul drept al relaţiei (27) va defini o funcţie continuă, dacă $u_n \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$; or dacă $u_n \in C^0(D_3)$, tot (27) arată că $u_n \in C^1(D_3)$ şi atunci va rezulta $u_n \in C^2(D_n)$; în plus, din teorema (10) avem

$$\Delta_3 u_n(x) = \lambda_n \Delta_3 \left(\int_{D_3} \left[\frac{1}{4\pi \|x - y\|} + \varphi(x, y) \right] u_n(y)\, dy \right) =$$

$$= \lambda_n \Delta_3 \int_{D_3} \frac{u_n(y)}{4\pi \|x - y\|}\, dy + \Delta_3 \int_{D_3} \varphi(x, y) u_n(y)\, dy = \lambda_n u_n(x).$$

Aşadar, s-a justificat

Teorema 12. *Ecuaţia Helmholtz* $\Delta_3 u + \lambda u = 0$ *admite o infinitate numărabilă* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *de soluţii care verifică condiţia la limită* $u|_{\partial D_3} = 0$; *aceste soluţii sînt funcţii indefinit derivabile şi corespund valorilor proprii* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$. *În plus*

$$\lambda_n = \int_{D_3} \|\nabla_3 u_n\|^2\, dx = \int_{D_3} \left[\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx. \qquad (27')$$

Trebuie justificată doar ultima afirmaţie; or din prima identitate Green $\int_{D_3} v\Delta_3 u\, dx +$

$+ \int_{D_3} (\nabla_3 v, \nabla_3 u)\, dx = \int_{\partial D_3} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma$, pentru $u = v = u_n$, deoarece $\Delta_3 u_n = -\lambda_n u_n$, $u_n\Big|_{\partial D_3} = 0$ şi $\int_{D_3} u_n^2\, dx = 1$, se obţine relaţia indicată.

Observaţia 14. *Din* (27′) *se deduce* $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Observaţia 15. *Soluţiile* EDP *Helmholtz* $\Delta_3 u + \lambda u = 0$ *care verifică* $u|_{\partial D_3} = 0$, *pot fi interpretate ca funcţii proprii ale problemei la limită* $u|_{\partial D_3} = 0$ *pentru operatorul lui Laplace* $-\Delta_3$ (avem $-\Delta_3 u_n = \lambda_n u_n$, $u_n|_{\partial D_3} = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Observația 16. *Dacă G este funcția Green pentru problema Dirichlet interioară atașată problemei Dirichlet $u|_{\partial D_3} = f$, atunci are loc egalitatea*

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) u_n(y), \quad x \neq y, \quad x, y \in \bar{D_3}, \tag{28}$$

unde $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sînt șirurile valorilor, respectiv funcțiilor proprii din teorema 12, convergența fiind în $\overset{\circ}{H}_1(D_3)$.

Într-adevăr, deoarece $G(x, y) \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$, considerînd G funcție de x, are loc egalitatea

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) u_n(x)$$

cu $a_n(y) = (G(x, y), u_n(x))_0 = \int_{D_3} G(x, y) u_n(x)\, dx$; în baza simetriei funcției Green și a relației (27) va rezulta $a_n(y) = \frac{1}{\lambda_n} u_n(y)$ și (28) este justificată.

În cazul EDP Poisson și Helmholtz neomogenă, adică în cazul ecuațiilor

$$\Delta_3 u = F, \quad \Delta_3 u + \mu u = F, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

se poate rezolva problema Dirichlet interioară $u|_{\partial D_3} = 0$, cu ajutorul șirurilor $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ din teorema 12.

Astfel în cazul ecuației Poisson $\Delta_3 u = F$, $F \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$, calculînd produsul scalar $(\varphi, \Delta_3 u)_0$ rezultă, în baza primei formule Green

$$B(\varphi, u) = (\varphi, F)_0;$$

scriind $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$, deoarece $B(\varphi, u) = B\left(\varphi, \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n\right) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n B(\varphi, u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n (\varphi, u_n)_0$ se deduce egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n (\varphi, u_n)_0 = (\varphi, F)_0,$$

care, deoarece $\varphi \in C_0^{\infty}(D_3)$ este arbitrar, înseamnă

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n u_n = F,$$

deci $\lambda_n a_n = (F,\ u_n)_0$, adică $a_n = \dfrac{1}{\lambda}(F,\ u_n)_0$; prin urmare dacă, $F \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$, EDP Poisson $\Delta_3 u = F$, va admite o singură soluție u dacă $u\,|_{\partial D_3} = 0$, această soluție putîndu-se scrie sub forma seriei

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}(F,\ u_n)_0 u_n.$$

Pentru EDP Helmholtz neomogenă

$$\Delta_3 u + \mu u = F,\ \mu \in \mathbb{R},\ F \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$$

soluțiile care verifică $u\,|_{\partial D_3} = 0$ se pot scrie sub forma seriei

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \mu}(F,\ u)_0 u \tag{28'}$$

(justificarea fiind complet analoagă celei din cazul ecuației Poisson); din (28') se deduce că soluția EDP Helmholtz $\Delta_3 u + \mu u = F$, care verifică $u\,|_{\partial D_3} = 0$ va exista numai dacă $\mu \neq -\lambda_n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ fiind șirul valorilor proprii ai operatorului $-\Delta_3$ pentru problema Dirichlet interioară. Dacă $\mu = -\lambda_{n_0}$ pentru un număr întreg pozitiv n_0 în general soluția nu există decît dacă $(F,\ u_{n_0})_0 = 0$, cînd această soluție este nedeterminată, scriindu-se

$$u = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{\lambda_n + \mu}(F,\ u_n)_0 u_n + a_{n_0} u_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + \mu}(F,\ u_n)_0 u_n,$$

unde a_{n_0} este un număr real oarecare.

La punctul următor vom lua în discuție cîteva aplicații ale considerațiilor de mai sus.

4.7. Funcții speciale atașate ecuației Laplace în $\mathbb{R}^3$

i. **Coordonate cilindrice**. Coordonatele cilindrice r, θ, z sînt legate de coordonatele carteziene x, y și z prin

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,\ r \geqslant 0,\ \theta \in [0,\ 2\pi[,\ z \leqslant \mathbb{R};$$

conform calculelor din 2.4, vom avea

$$\Delta_3 u(r, \theta, z) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)(r,\ \theta,\ z). \tag{29}$$

Prin separare de variabile, scriind

$$u(r,\ \theta,\ z) = \varphi(r,\ \theta)Z(z)$$

din (29) se deduce imediat

$$\frac{\varphi_{rr} + \dfrac{1}{r}\,\varphi_r + \dfrac{1}{r^2}\,\varphi_{\theta\theta}}{\varphi} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda$$

sau observînd că $\varphi_{rr} + \dfrac{1}{r}\,\varphi_r + \dfrac{1}{r^2}\,\varphi_{\theta\theta}$ este laplaceianul Δ_2 în coordonate polare, rezultă EDP de tip Helmholtz din $\mathbb{R}^2$

$$\Delta_2\varphi + \lambda\varphi = 0 \tag{29'}$$

și ED

$$Z'' + \lambda Z = 0. \tag{29''}$$

Separînd în continuare variabilele în EDP (29') scriind

$$\varphi(r,\ \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

rezultă imediat ED

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - \mu)\mathrm{R} = 0 \tag{30}$$

$$\Theta'' + \Theta = 0 \tag{31}$$

în care $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ sînt deocamdată oarecari; pentru $\lambda > 0$ cu schimbarea $\xi = \sqrt{\lambda}r$ în ED (30) se deduce ecuația transformată

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\xi} + (\xi^2 - \mu)R = 0, \tag{30'}$$

care este o ecuație Bessel (vezi cap. V, punctul 1) și deci soluția ei se va scrie

$$R(\xi) = c_1J_\nu(\xi) + c_2N_\nu(\xi),\ \ \nu = \sqrt{\mu},$$

unde c_1, c_2 sînt numere reale oarecari, iar J_ν și N_ν sînt funcții Bessel de prima și a doua speță (pentru $\nu \notin \mathbb{Z}$, se poate înlocui N_ν prin $J_{-\nu}$). Prin urmare, soluția generală a ED (30) va fi

$$R(r) = c_1J_\nu(\sqrt{\lambda}r) + c_2N_\nu(\sqrt{\lambda}r),\ \nu = \sqrt{\mu},$$

iar soluția generală a ED (29'') se va scrie respectiv

$$Z(z) = c_3\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}z} + c_4\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}z},\ \Theta(\theta) = c_5\cos(\nu\theta) + c_6\sin(\nu\theta)$$

cu $c_1, \ldots, c_6$ constante arbitrare; aşadar, prin separare de variabile se obţin în $\mathbb{R}^3$ următoarele FA :

$$u(r, \theta, z) = [c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda} r) + c_2 N_\nu(\sqrt{\lambda} r)][c_3 e^{\sqrt{\lambda} z} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda} z}] \cdot$$
$$\cdot [c_5 \cos(\sqrt{\mu}\theta) + c_6 \sin(\sqrt{\mu}\theta)] \qquad (32)$$

dacă $\lambda > 0$, $\mu \neq 0$ (pentru $\lambda = 0$ se înlocuieşte $c_3 e^{\sqrt{\lambda} z} + c_4 e^{-\sqrt{\lambda} z}$ prin $c_3 + c_4 z$, iar pentru $\mu = 0$ se înlocuieşte $c_5 \cos(\sqrt{\mu}\theta) + c_6 \sin(\sqrt{\mu}\theta)$ prin $c_5 + c_6\theta$).

În ipoteza că variabila θ ia valori în $[0, 2\pi]$, pentru θ trebuie să se obţină funcţii periodice cu perioada 2π, ceea ce antrenează $\mu = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ obţinîndu-se FA

$$u_n(r, \theta, z) = [c_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) + c_2 N_n(\sqrt{\lambda} r)][c_3 e^{\sqrt{\lambda} z} +$$
$$+ c_4 e^{-\sqrt{\lambda} z}] \cdot [c_5 \cos(n\theta) + c_6 \sin(n\theta)]. \qquad (32')$$

În probleme practice efective, dacă soluţia trebuie să fie mărginită pentru $r = 0$ trebuie presupus $c_2 = 0$ (deoarece funcţia Bessel N_ν este nemărginită în vecinătatea lui $r = 0$).

Exemplul. 1. Să determinăm potenţialul electric V în interiorul cilindrului $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h$ ştiind că acest potenţial este nul pe suprafaţa cilindrului, exceptînd baza $z = 0$ unde $u(t, \theta, 0) = f(r, \theta)$, f fiind o funcţie continuă în $[0, a] \times [0, 2\pi]$, iar $f(r, \theta)|_{r=a} = 0$ (sau $f \in H_1(D_3)$, $D_3 =]0, a[\times]0, 2\pi[\times]0, h[$).

Deoarece potenţialul electric V este o funcţie continuă în $\overline{D_3}$ care verifică în D_3 EDP Laplace, din teoria anterioară rezultă soluţiile

$V_n(r, \theta, z) = J_n(\sqrt{\lambda} r)\, e^{\pm\sqrt{\lambda} z} [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, deoarece funcţiile care depind de z sînt combinaţii liniare ale funcţiilor ch $(\sqrt{\lambda} z)$ şi sh $(\sqrt{\lambda} z)$ se poate presupune (pentru a avea $V_n = 0$, $z = h$)

$$V_n(r, \theta, z) = J_n(\sqrt{\lambda} r)[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \operatorname{sh}[\sqrt{\lambda}(h - z)].$$

Cum $V_n(r, \theta, z)|_{r=a} = 0$ se deduce $J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0$, adică $\sqrt{\lambda} a = \xi_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, rezultînd valorile proprii $\lambda_k = \dfrac{\xi_{nk}^2}{a^2}$, $k = 1, 2, \ldots$ unde $(\xi_{nk})_{k \geqslant 1}$ sînt zerourile lui J_n; prin urmare, rezultă o dublă infinitate de soluţii

$$V_{n,k}(r, \theta, z) = J_n\left(\frac{\xi_{nk} r}{a}\right) [A_{nk} \cos(n\theta) + B_{nk} \sin(n\theta)] \cdot \operatorname{sh} \frac{\xi_{nk}}{a} (h - z),$$

care conduc la soluţia căutată.

$$V(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} V_{n,k}(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\xi_{nk} r}{a}\right) [A_{nk} \cos(n\theta) +$$
$$+ B_{nk} \sin(n\theta)] \operatorname{sh} \frac{\xi_{nk}}{a} (h - z).$$

Impunînd condiția $V|_{z=0} = f$ se deduce

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\xi_{nk} r}{a}\right) [A_{nk} \cos(n\theta) + B_{nk} \sin(n\theta)] \operatorname{sh}\left(\frac{\xi_{nk} h}{a}\right),$$

iar în baza ortogonalității șirului trigonometric pe $[0, 2\pi]$ și a șirului de funcții Bessel $\left(J_n\left(\frac{\xi_{nk} r}{a}\right)\right)_{k \geqslant 1}$, rezultă

$$A_{nk} = \frac{2}{\pi a^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\xi_{nk} h}{a}\right) J_{n+1}^2(\xi_{nk})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n\left(\frac{\xi_{nk} r}{a}\right) \cos(n\theta) \cdot r \, dr \, d\theta, \; n, k = 1, 2, \ldots$$

$$A_{0k} = \frac{1}{\pi a^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\xi_{0k} h}{a}\right) J_1^2(\xi_{0k})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n\left(\frac{\xi_{0k} r}{a}\right) r \, dr \, d\theta, \; k = 1, 2, \ldots$$

$$B_{nk} = \frac{2}{\pi a^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\xi_{nk} h}{a}\right) J_{n+1}^2(\xi_{nk})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n\left(\frac{\xi_{nk} r}{c}\right) \sin(n\theta) r dr \, d\theta, \; n, k = 1, 2, \ldots$$

În particular, presupunînd

$$f(r, \theta) = V_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \; V_0 \in \mathbb{R}$$

va rezulta (în baza simetriei față de axa Oz) $A_{nk} = 0$, iar din expresiile pentru coeficienții B_{nk} rezultă $B_{nk} = 0$, $n, k = 1, 2, \ldots$ și deci

$$V(r, \theta, z) = V(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\xi_k \frac{r}{a}\right) \operatorname{sh}\left[\frac{\xi_k}{a}(h - z)\right], \; J_0(\xi_k) = 0, \; k = 1, 2, \ldots$$

Vom avea

$$A_k = \frac{2V_0}{a^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\xi_k h}{a}\right) J_1^2(\xi_k)} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) J_0\left(\frac{\xi_k r}{a}\right) r \, dr, \; k = 1, 2, \ldots;$$

integrala poate fi calculată punînd $\frac{\xi_k r}{a} = t$ și integrînd prin părți, se obține

$$\int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) J_0\left(\frac{\xi_k r}{a}\right) r \, dr = \frac{2a^2}{\xi_k^2}\left[\frac{\xi_k^2 - x^2}{\xi_k^2} x J_1(x)\Big|_0^{\xi_k} + \frac{2}{\xi_k^2}\int_0^{\xi_k} x^2 J_1(x) \, dx\right] = \frac{2a^2}{\xi_k^2} J_2(\xi_k).$$

În baza legăturii dintre funcțiile Bessel J_0, J_1 și J_2 va rezulta $J_2(\xi_k) = \frac{2}{\xi_k} J_1(\xi_k) -$

$-J_0(\xi_k) = \frac{2}{\xi_k} J_1(\xi_k)$ și de aceea

$$V(r, z) = 8V_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_k^3 J_1(\xi_k) \operatorname{sh}\left(\frac{\xi_k h}{a}\right)} J_0\left(\xi_k \frac{r}{a}\right) \operatorname{sh}\left[\frac{\xi_k}{a}(h - z)\right].$$

Să facem observația că în acest exemplu s-a rezolvat o problemă de funcții și valori proprii pentru ecuația Helmholtz $\Delta_3 u + \lambda u = 0$.

ii. **Armonice sferice. Armonice de suprafață.** În cazul coordonatelor sferice

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r \cos\theta,\ r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

printr-un calcul direct ecuația Laplace se va scrie

$$\Delta_3 u(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)(r, \theta, \varphi)$$

sau

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Prin separarea variabilelor, scriind

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$$

se deduce că R va verifica ED

$$(r^2 R')' - \mu R = 0,\ \mu \in \mathbb{R},$$

iar Y va fi o soluție a EDP

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial r}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \mu Y = \Delta_2^* Y + \mu Y = 0; \qquad (33)$$

operatorul Δ_2^* definit în (33) se numește laplacianul pe suprafața sferei unitate din $\mathbb{R}^2$. Scriind $\mu = \alpha(\alpha + 1)$, ED $r^2 R'' + 2rR' - \alpha(\alpha+1)R = 0$, fiind de tip Euler, va admite soluția generală

$$R(r) = c_1 r^{\alpha} + c_2 r^{-1-\alpha},$$

iar EDP (33) va admite soluții $Y = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ dacă Θ și Φ vor verifica ED

$$\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + [\alpha(\alpha + 1)\sin^2\theta - \nu^2]\Theta = 0. \qquad (34)$$

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0$$

Rezultă

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} c_3 + c_4\varphi, & \text{dacă } \nu = 0 \\ c_3 \cos(\nu\varphi) + c_4 \sin(\nu\varphi), & \text{dacă } \nu \neq 0, \end{cases}$$

iar pentru integrarea ED verificată de Θ se efectuează schimbarea de variabilă $\xi = \cos\theta$ cînd cu $y(\xi) = \Theta(\arccos \xi)$ se deduce ED

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1 - \xi^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right] + \left[\alpha(\alpha + 1) - \frac{\nu^2}{1 - \xi^2}\right] y = 0,$$

numită ED Legendre asociată ale cărei soluții liniar independente se notează P_α^ν și Q_α^ν respectiv. În concluzie, FA din $\mathbb{R}^3$ care se obțin prin separare de variabile în ecuația Laplace în coordonate sferice (și care se numesc *armonice sferice*) sînt de forma

$$u(r, \theta, \varphi) = (c_1 r^\alpha + c_2 r^{-1-\alpha})(c_3 \cos\nu\varphi + c_4 \sin\nu\varphi)\,[c_5 P_\alpha^\nu(\cos\theta) + c_6 Q_\alpha^\nu(\sin\theta)], \tag{35}$$

cu mențiunea că pentru $\nu = 0$, $\sin\nu\varphi$ se înlocuiește prin φ.

Soluțiile EDP (34) se numesc de obicei *funcții sferice*; de obicei, aceste soluții se presupun continue pe sfera unitate (ceea ce antrenează, în particular, periodicitatea, cu perioada 2π în raport cu variabila φ); rezultă în (35) $\nu = m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ (valorii $m = 0$ corespunzîndu-i ca singură soluție c_3) și $\alpha = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $c_6 = 0$ (ultima condiție fiind impusă de singularitatea în $\theta = 0$ și $\theta = \pi$ a funcției Q_n^m). Prin urmare din (35) se deduce soluția

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)\,[A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi)],$$
$$n,\ m = 0, 1, 2, \ldots \tag{35'}$$

în care

$$P_n^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m P_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi^m}, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2 - 1)^n],$$

și deci $P_n^m = 0$, dacă $m > n$, ceea ce face ca în (35′) să avem $m = 0, 1, \ldots, n$. Scriind

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} Y_{nm}(\theta, \varphi) = A_{n0} P_n(\cos\theta) +$$
$$+ \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)\,[A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi)] \tag{35''}$$

se obține soluția continuă pe sfera unitate a EDP (33) și care poartă numele de FA *de suprafață* avînd gradul n; particularizînd constantele din (35″) se obțin diverse FA de suprafață. Astfel FA de suprafață avînd gradul n

$$Y_{nm}^{(p)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi),\ Y_{nm}^{(i)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)\sin(m\varphi),\ m = 0, 1, \ldots, n \tag{6}$$

sînt funcţii pare respectiv impare (în raport cu φ, $m \geqslant 2$); dacă $m = 0$ rezultă $Y_{n0} = P_n$, P_n fiind polinomul Legendre de gradul n. Dacă $m < n$ FA de suprafaţă $Y^{(p)}_{nm}$, $Y^{(i)}_{nm}$ se numesc *armonice teserale*, iar dacă $m = n$ aceste funcţii se numesc *armonice zonale*; evident, aceste funcţii vor fi ortogonale pe suprafaţa sferei unitate (dacă sînt distincte) fiind funcţii proprii ale ecuaţiei Helmholtz (33).

Exemple 2. Să rezolvăm problema Dirichlet interioară pentru sfera $B_R(0)$, valorile pe $\partial B_R(0)$ fiind $f(\theta, \varphi)$, cu ajutorul metodei separării variabilelor.

În baza rezultatelor anterioare, singura funcţie armonică în sfera $B_R(0)$, obţinută prin separarea variabilelor va fi

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} r^n [A_{nm} Y^{(p)}_{n,m}(\theta, \varphi) + B_{nm} Y^{(i)}_{nm}(\theta, \varphi)],$$

iar condiţia la frontieră va fi satisfăcută dacă avem

$$A_{00} + \sum_{n=0}^{\infty} R^n \left\{ A_{n0} Y^{(p)}_{n0}(\theta, \varphi) + \sum_{m=1}^{n} [A_{nm} Y^{(p)}_{nm}(\theta, \varphi) + B_{nm} Y^{i}_{nm}(\theta, \varphi)] \right\} = f(\theta, \varphi),$$

pentru $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; utilizînd proprietatea de ortogonalitate a funcţiilor sferice se pot determina toţi coeficienţii A_{nm}, B_{nm} rezultînd

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi R^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) Y^{(p)}_{nm}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta, \; m = 1, 2, \ldots n; \; n = 1, 2, \ldots$$

$$A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi R^n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) Y_{n0}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta = \frac{2n+1}{4\pi R^n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n(\cos\theta) \cdot$$

$$\cdot \sin\theta \, d\theta, \; n = 0, 1, \ldots$$

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi R^n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) Y^{(i)}_{nm}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta, \; m = 1, 2, \ldots, n;$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

3. În mod similar se rezolvă problema Dirichlet exterioară pentru sfera $B_R(0)$ dacă $u|_{\partial B_R(0)} = f(\theta, \varphi)$ în care caz însă

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} Y_n(\theta, \varphi).$$

Se pot rezolva de asemenea şi probleme Neumann (interioare sau exterioare) pentru sfera $B_R(0)$ soluţiile anterioare fiind convenabile deoarece la sferă avem $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial r}$.

5. Ecuații de tip parabolic

5.1. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuația căldurii din $\mathbb{R}$

Vom trata pe scurt cîteva aspecte esențiale din teoria ecuației căldurii, care este tipul reprezentativ pentru ecuațiile de tip parabolic normal de ordinul al doilea și cu coeficienți constanți; este vorba de EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_n u, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

în care $u = u(t, x)$. La secțiunea 2.1 s-a tratat cazul $n = 1$, rezolvîndu-se prima și a doua problemă mixtă cu ajutorul teoriei distribuțiilor periodice; acum se va atașa EDP (1) doar condiția inițială (care este o condiție pe o caracteristică a EDP (1))

$$u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

ceea ce implică $x \in \mathbb{R}^n$ și $t > 0$. Este important de remarcat că la fel ca și în cazul EDP Laplace rezultatele sînt aceleași independent de numărul variabilelor spațiale $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; rolul pe care-l juca în cazul ecuației lui Laplace funcția $s_n(x, y) = \|y - x\|^{2-n}$, $n > 2$ îl joacă aici funcția S_n definită prin

$$S_n(t, x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, \quad t > 0, \tag{3}$$

care este o soluție a EDP (1) (pentru $t > 0$, și $x \in \mathbb{R}^n$) după cum se verifică prin calcul direct. Pentru ușurința expunerii vom presupune $n = 1$, deci vom avea în vedere funcția

$$S_1(t, x) = S(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3'}$$

și vom formula următoarea problemă:

Problema 1. *Să se determine o soluție* $u = u(t, x)$ *a* EDP (1) *cu* $n = 1$ *în domeniul* $D_2 =]0, T[\times \mathbb{R}$, *astfel încît* $u \in C^0(D_2^-)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in C^0(D_2)$, *iar*

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

unde $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$ *este dată și verifică o inegalitate de forma*

$$|u_0(x)| \leqslant M e^{A x^2} \tag{3''}$$

cu $M, A \in \mathbb{R}_+$.

Pentru a rezolva această problemă, vom demonstra inițial următorul rezultat :

Lema 1. *Fie* $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *continue, astfel încît există* M_1, M_2, A_1, $A_2 \in \mathbb{R}$, $A_1 + A_2 < 0$, *iar,*

$$|f_1(x)| \leqslant M_1 e^{A_1 x^2}, \quad |f_2(x)| \leqslant M_2 e^{A_2 x^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Atunci $f_1 \overset{*}{} f_2 \in C^0(\mathbb{R})$ *și avem*

$$|(f_1 \overset{*}{} f_2)(x)| \leqslant M_1 M_2 \sqrt{\frac{-\pi}{A_1 + A_2}}\, e^{A_3 x^2}, \; A_3 = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}.$$

Deoarece

$$(f_1 \overset{*}{} f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x - y)\, dy, \tag{4}$$

se deduce

$$|(f_1 \overset{*}{} f_2)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f_1(y)|\, |f_2(x-y)|\, dy \leqslant M_1 M_2 \int_{\mathbb{R}} e^{A_1 y^2 + A_2 (x-y)^2}\, dy =$$

$$= M_1 M_2\, e^{A_3 x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{(A_1 + A_2)\left(y - \frac{A_2}{A_1 + A_2} x\right)^2} dy$$

și cum $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $a > 0$ se obține rezultatul indicat ; continuitatea convoluției $f_1 \overset{*}{} f_2$ decurge din faptul că integrala improprie din (4) este uniform convergentă, după cum rezultă din calculul anterior.

Teorema 1. *Dacă* S *este dată de* (3′), *iar* $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$ *verifică* (3″) *atunci funcția* u *definită prin*

$$u(t, x) = \begin{cases} S(t, x) \overset{*}{}_1 u_0(x) & \text{pentru } 0 < t \leqslant T < \dfrac{1}{4A} \\ u_0(x) & \text{pentru } t = 0 \end{cases}$$

(unde semnul $\overset{*}{}_1$ *indică operația de convoluție în raport cu variabila* x, t *fiind considerat parametru) va fi o soluție a problemei* 1 ; *această soluție este indefinit derivabilă în raport cu ambele variabile pentru* $t > 0$ *și verifică o inegalitate de forma*

$$|u(t, x)| \leqslant m\, e^{ax^2}$$

cu m, $a \in \mathbb{R}_+$.

Aplicînd lema 1 cu $f_1 = u_0$ și pentru t fixat, $f_2(x) = S(t, x)$, prin comparație se deduce $A_1 = A$, $M_1 = M$, $A_2 = -\frac{1}{4t}$, $M_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$ și vom avea $A_1 + A_2 = A - \frac{1}{4t} < 0$, dacă $0 < t < T = \frac{1}{4A}$; lema 1 arată că u este continuă în $]0, T[\times \mathbb{R}$ și verifică inegalitatea dorită cu $m = \frac{M}{\sqrt{1 - 4AT}}$, $a = \frac{A}{1 - 4AT}$. Faptul că $u \in C^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ rezultă din convergența uniformă a integralelor obținute prin derivare (în raport cu x și t) din

$$S(t, x) \overset{*}{,} u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy,$$

iar u va verifica în $[0, T[\times \mathbb{R}$ EDP (1) deoarece S are această proprietate:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) S(t, x) \overset{*}{,} u_0(x) =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) S(t, x)\right] \overset{*}{,} u_0(x) = 0.$$

Teorema va fi demonstrată dacă arătăm că $u(t, x) \to u_0(x)$ $(t \to 0)$; pentru aceasta este suficient să arătăm că $\lim_{x \to 0,\, t \to 0} u(t, x) = u_0(0)$, deoarece dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, punînd $y = x_0 + \alpha$ $u_0^*(\alpha) = u_0(x_0 + \alpha)$ și $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} u_0^*(\alpha)\, S(t, x - x_0 - \alpha)\, d\alpha$, va rezulta

$$\lim_{x \to x_0,\, t \to 0} u(t, x) = u_0^*(0) = u_0(x_0).$$

Deoarece

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} [u_0(y) - u_0(0)]\, S(t, x - y)\, dy + u_0(0) \int_{\mathbb{R}} S(t, x - y)\, dy = u_1(t, x) + u_2(t, x)$$

calculînd u_2, se deduce (cu substituția $\frac{y - x}{2\sqrt{t}} = z$, $dy = 2\sqrt{t}\, dz$)

$$u_2(t, x) = u_0(0) \int_{\mathbb{R}} S(t, x - y)\, dy = \frac{u_0(0)}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dt = u_0(0)$$

și mai rămîne de arătat că $\lim_{x \to 0,\, t \to 0} u_1(t, x) = 0$.

Pentru aceasta se utilizează ipotezele impuse lui u_0 (u_0 este continuă și verifică (3″)); deoarece avem

$$|u_0(y) - u_0(0)| \leqslant M(e^{Ay^2} - 1) \qquad (5)$$

în baza continuității lui u_0 se poate determina un număr real $B > 0$ care să depindă de ε, A și M astfel încît să fie valabilă evaluarea

$$|u_0(y) - u_0(x)| \leqslant \varepsilon e^{By^2}, \tag{5'}$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $y \in \mathbb{R}$ (comparînd (5) cu (5') va trebui să avem $Me^{By^2}(e^{Ay^2} - 1) < \varepsilon$ ceea ce este posibil, deoarece pentru $|y|$ mic, avem $e^{Ay^2} - 1 = y^2 g(y)$, cu g mărginit deci $|e^{Ay^2} - 1|$ poate fi făcut arbitrar de mic, iar pentru $|y|$ care nu verifică relația anterioară avem e^{By^2} mic). Utilizînd acum (5') ,pentru orice $t > 0$, dar $t < \dfrac{1}{8B}$, avem

$$|u_1(t, x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{By^2 - \frac{1}{4t}(y-x)^2}\, dy = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{Bx^2}{1-4Bt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{1}{4t} - B\right)\left(y - \frac{x}{1-4Bt}\right)^2} dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-4Bt}} e^{\frac{Bx^2}{1-4Bt}} < \varepsilon\sqrt{2}\, e^{2Bx^2},$$

și deci $|u_1(t, x)| < 2\varepsilon$ pentru x suficient de mic.

Pentru a arăta că funcția $S(t, x) \overset{*}{}_1 u_0(x)$ este singura soluție a problemei 1, vom justifica inițial următorul rezultat:

Teorema 2. (*principiul de maxim și minim pentru soluțiile ecuației căldurii*). *Fie* $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ *astfel încît* $\partial D_2 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (vezi Fig. VI.1) *și* u *o soluție în* $D_2 \cup \gamma_1$ *a ecuației căldurii, cu* $u \in C^0(\bar{D}_2)$, *iar* u_t, $u_{xx} \in C(D_2 \cup \gamma_1)$; *atunci* u *nu-și poate atinge valorile extreme decît pe* γ_2 (*dacă nu este o constantă*).

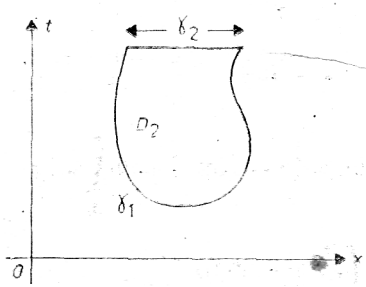

Fig. VI 1

Vom lua în considerație cazul maximului, minimul transformîndu-se în maxim prin schimbarea semnului. În baza teoremei lui Weierstrass pentru funcții continue pe un compact, va exista un punct, astfel încît această funcție să-și atingă valoarea maximă în acest punct și teorema va fi demonstrată dacă arătăm că $(t_0, x_0) \in \gamma_2$; să presupunem deci că avem $(t_0, x_0) \in D_2 \cup \gamma_1$ (se consideră segmentul γ_2 deschis) și fie

$$v(t, x) = u(t, x) - \varepsilon t$$

cu $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $v \in C^0(\bar{D}_2)$, iar $(t_0, x_0) \in D_2 \cup \gamma_1$ este punctul de maxim pentru v,

va trebui să avem $v_{xx}(t_0, x_0) \leqslant 0$; dar $v_{xx}(t_0, x_0) = u(t_0, x_0)$, deci $u(t_0, x_0) \leqslant 0$. Din ecuația căldurii se deduce

$$v_t(t_0, x_0) = u_t(t_0, x_0) - \varepsilon = u_{xx}(t_0, x_0) - \varepsilon \leqslant -\varepsilon ;$$

avînd în vedere forma specială a domeniului D_2, va exista $h > 0$ astfel încît $I = \{(t, x) | x = x_0, t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0\} \subset D_2 \cup \gamma_1$, iar $v_t|_I < -\frac{\varepsilon}{2}$. Prin integrare pe $[t_0 - h, t_0] \subset I$ se deduce imediat

$$v(t_0, x_0) = v(t_0 - h, x_0) + \int_{t_0-h}^{t_0} v_t(t, x_0)\, dt,$$

rezultînd

$$v(t_0, x_0) \leqslant v(t_0 - h, x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot h < v(t_0 - h, x_0),$$

ceea ce arată că punctul (t_0, x_0) nu este un punct maxim pentru v.

Teorema 3. (*de unicitate a problemei* 1). *Dacă soluția problemei* 1 *verifică o inegalitate de forma* $|u(t, x)| \leqslant Me^{Ax^2}$ cu M, $A \in \mathbb{R}_+$ *atunci această soluție va fi unic determinată.*

Fie u diferența a două soluții care verifică aceleași condiții inițiale pentru $t = 0$; vom avea $u(t, x)|_{t=0} = 0$, iar $|u(t, x)| \leqslant 2Me^{Ax^2}$ și să arătăm că de aici se deduce $u = 0$. Pentru aceasta, pentru $\varepsilon > 0$ și $b > 0$ să alegem numerele reale a și A_1 astfel încît $A < A_1$, $b < a$ cu $M \leqslant \varepsilon e^{a^2(A_1 - A)}$; să construim $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ prin $D_2 = \left\{(t, x) | |x| < a, 0 < t < \frac{1}{8A_1}\right\}$ și să definim funcția $v : D_2 \to \mathbb{R}$ prin

$$v(t, x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - 4A_1 t}} e^{\frac{A_1 x^2}{1 - 4A_1 t}}.$$

Este ușor de constatat că avem $v(t, x) = \varepsilon \sqrt{\pi} S\left(A_1 t - \frac{1}{4}, \sqrt{A_1}\, x\right)$, cu S funcția (3′); în consecință avem $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x_2}\right) v(t, x) = 0$. Dacă $0 \leqslant t < \frac{1}{8A_1}$ avem $v(t, \pm a) \leqslant \varepsilon \sqrt{2} e^{2A_1 a^2}$ rezultînd $|u(t, \pm a)| \leqslant 2Me^{Aa^2} \leqslant \varepsilon e^{a^2 A_1} \leqslant v(t, \pm a)$; deoarece $u(t, x)|_{t=0} = 0$ se deduce $|u(0, x)| \leqslant v(0, x) = \varepsilon e^{A_1 x^2}$. Deoarece D_2 este de forma lui D_2 din teorema 2 (aici D_2 este un dreptunghi cu una din baze pe axa Ox) se poate aplica teorema 2 funcțiilor $u - v$ și $-u - v$, rezultînd în $D_2 \varphi$ $|u(t, x)| \leqslant v(t, x)$; prin urmare, dacă $|x| \leqslant b$, pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $|u(t, x)| \leqslant \sqrt{2} \varepsilon e^{2A_1 b^2}$, ceea ce înseamnă $u(t, x) = 0$,

dacă $(t, x) \in \left[0, \frac{1}{8A_1}\right] \times [-b, b]$. Pentru $b \to \infty$ (ceea ce antrenează $a \to \infty$ deoarece s-a presupus $a > b$) și A_1 nemodificat, va rezulta $u(t, x) = 0$, $(t, x) \in \left[0, \frac{1}{8A_1}\right] \times \mathbb{R}$; repetînd raționamentul anterior în banda $\left[\frac{1}{8A_1}, \frac{1}{4A_1}\right] \times \mathbb{R}$, deoarece $u(t, x)\Big|_{t=\frac{1}{8A_1}} = 0$ va rezulta în final $u(t, x) = 0$ în domeniul ei de existență.

Teorema 4. (*de stabilitate*). *Soluția problemei* 1 *depinde continuu de* u_0 (continuitate în sensul metricii uniforme).

Presupunînd u, u^* soluții ale problemei 1, corespunzătoare datelor inițiale u_0 respectiv u_0^* dacă $\| u_0 - u_0^* \|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x) - u_0^*(x)| < \varepsilon$, cum $u(t, x) = S(t, x) \overset{x}{*} u_0(x)$, $u^*(t, x) = S(t, x) \overset{x}{*} u_0^*(x)$ se deduce ușor

$$\| u - u^* \|_\infty \leqslant \| u_0 - u_0^* \|_\infty \int_{\mathbb{R}} S(t, x - y)\, dy = \| u_0 - u_0^* \|_\infty < \varepsilon.$$

Observația 1. Principiul de maxim exprimat prin teorema 2 poate fi aplicat pentru a obține unicitatea și stabilitatea primei probleme mixte pentru ecuația căldurii. Într-adevăr, deoarece această problemă pretinde determinarea lui $u[0, T] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$, astfel încît $u \in C^0(D_2^-)$, $D_2 =]0, T[\times]0, \pi[$ și u_t, u_x, $u_{xx} \in C^\circ(D_2)$, $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t, x) = 0$ în D_2, iar $u(t, x)\big|_{t=0} = u_0(x)$, $u(t, x)\big|_{x=0} = \varphi_1 u(t, x)\big|_{x=\pi} = \varphi_2(t)$, $u_0(0) = \varphi_1(0)$, $u_0(\pi) = \varphi_2(0)$; dacă datele problemei pentru $x = 0$, $t = 0$ și $x = \pi$ sînt nule, u va fi nul și pentru $(t, x) \in [0, T] \times [0, \pi]$ (fig. VI.1 devine dreptunghiul $[0, \pi] \times [0, T]$, iar γ_2 este format din trei segmente). În plus, dacă u și u^* sînt două soluții ale primei probleme mixte corespunzînd datelor $(u_0, \varphi_1, \varphi_2)$ respectiv $(u_0^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*)$, dacă $\| u_0 - u_0^* \|_\infty < \varepsilon$, $\| \varphi_1 - \varphi_1^* \|_\infty < \varepsilon$, $\| \varphi_2 - \varphi_2^* \|_\infty < \varepsilon$ va rezulta $\| u - u^* \| < \varepsilon$ (valorile maxime și minime se ating numai pentru $t = 0$, $x = 0$ sau $x = \pi$ și deci sînt cuprinse între $-\varepsilon$ și ε).

Observația 2. Teoremele 3 și 4 sînt valabile și în cazul problemei $u(t, x)\big|_{t=0} = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ pentru ecuația căldurii neomogenă

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F, \tag{6}$$

unde $F \in C^0([0, T] \times \mathbb{R})$; într-adevăr, avem $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, dacă

$u = u_1 - u_2$ unde u_1 și u_2 sînt două soluții ale problemei Cauchy pentru ecuația (6) și dacă aceste soluții verifică ipotezele din teorema 3; va rezulta $u = 0$ adică $u_1 = u_2$. Analog se deduce $\|u - u^*\|_\infty < \varepsilon$ dacă $\|u_0 - u_0^*\|_\infty < \varepsilon$.

Rămîne de găsit soluția EDP (6) care verifică condiția inițială $u(t, x)|_{t=0} = u_0(x)$.

Lema 2. (*Principiul lui Duhamel*). *Dacă* $v = v(t, s, x)$ *este soluția problemei* 1, *astfel încît* $v(t, s, x)|_{t=0} = F(s, x)$ (s fixat), *atunci funcția* u_1, *definită prin*

$$u_1(t, x) = \int_0^t v(t - s, s, x)\, ds,$$

verifică EDP (6) *și în plus* $u_1(t, x)|_{t=0} = 0$.

Demonstrația se reduce la o verificare; evident $u_1|_{t=0} = 0$, iar deoarece

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(t, x) = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(t - s, s, x)ds + v(t - s, s, x)|_{x=t} = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(t - s, s, x)\, ds + F(t, x)$$

(s-a folosit faptul că $v(t - s, s, x)|_{s=t} = v(0, t, x) = F(t, x)$ și

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t, x) = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t - s, s, x)\, ds$$

se deduce $\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)(t, x) = \int_0^t \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)(t - s, s, x)\, ds + F(t, x) = F(t, x).$

Pentru a putea aplica lema 2 trebuie ca termenul liber (factorul perturbator) F să verifice ipotezele pentru u_0 din teorema 1 și de aceea vom presupune $F(t, x) \in C^0([0, T] \times \mathbb{R})$, iar pentru orice $t \in [0, T]$ să avem $|F(t, x)| \leqslant M e^{Ax^2}$, $M, A \in \mathbb{R}_+$, cînd $T < \frac{1}{4A}$.

În aceste ipoteze, funcția y din lema 2 se va putea scrie

$$v(t, s, x) = S(t, x) *_1 F(s, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} F(s, y)\, dy$$

și deci funcția u_1 din aceiași lemă va avea forma

$$u_1(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} F(s, y)\, dy = S_+(t, x) \overset{*}{\times} F_+(t, x), \tag{7}$$

unde $f_+(t, x) = f(t, x)$, pentru $t \geqslant 0$, $f_+(t, x) = 0$ pentru $t < 0$, convoluția realizîndu-se în spațiul $\mathbb{R}^2$: $(f \overset{*}{\times} g)(t, x) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(s, y) g(t - s, x - y)\, dy\, ds$. Așadar, am obținut rezultatul următor :

Teorema 5. *Dacă* $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$, $|u_0(x)| \leqslant M e^{Ax^2}$, $F \in C^0([0, T] \times \mathbb{R})$, $|F(t, x)| \leqslant M_1 e^{A_1 x^2}$, *pentru* $t \in \left[0, \frac{1}{4A_1}\right]$, *atunci soluția* EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F$$

se poate scrie sub forma

$$u(t, x) = S(t, x) \overset{*}{\times}_1 u_0(x) + S_+(t, x) \overset{*}{\times} F_+(t, x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dt + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} F(s, y)\, dy. \tag{8}$$

Justificarea formulei (8) este imediată avînd în vedere proprietățile funcțiilor $S(t, x) \overset{*}{\times}_1 u_0(x)$ și $S_+(t, x) \overset{*}{\times} F_+(t, x)$.

În această secțiune, pentru obținerea rezultatelor de bază rolul esențial l-a jucat soluția S definită prin (3'), dar nu s-a arătat care este motivul pentru care această funcție este indicată pentru rezolvarea problemelor legate de EDP (1).

Presupunînd u funcție analitică (sau distribuție) are loc dezvoltarea

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(t, x)\Big|_{t=0};$$

or

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n}(t, x)\Big|_{t=0} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\right]_{t=0} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\right]_{t=0} =$$

$$= \ldots = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}(t, x)\Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2n} u_0(x)}{\partial x^{2n}} = u_0^{(2n)}(x).$$

Prin urmare soluția problemei Cauchy $u(t, x)|_{t=0} = u_0(x)$ se va scrie sub forma seriei

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_0^{(2n)}(x),\ x \in \mathbb{R},$$

care este uneori utilă în determinarea efectivă a soluției u dacă u_0 este o funcție elementară.

Aplicînd transformarea Fourier în raport cu variabila x, se deduce

$$F_x[u(t, x)](\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} F[u_0^{(2n)}(x)](\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (i\xi)^{2n} F[u_0](\xi) =$$

$$= e^{-t\xi^2} \cdot F[u_0(x)](\xi) = F_x\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right](\xi) \cdot F[u_0(x)](\xi) =$$

$$= F_x[S(t, x) \overset{x}{*}_1 u_0(x)]$$

rezultînd exact soluția din teorema 1 (în calculele anterioare s-au utilizat formulele $F[u_0^{(k)}(x)](\xi) = (i\xi)^k F[u_0(x)](\xi)$ și $F[e^{-ax^2}](\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$, $a > 0$).

Observația 2. În aplicații, în locul EDP (1), apare EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_n u,\ a > 0; \tag{1'}$$

rezultatele anterioare, deduse pentru $n = 1$ rămîn în întregime valabile cu condiția înlocuirii lui t prin $a^2 t$ (deoarece schimbarea de variabilă $t \to a^2 t$ face ca din EDP (1') să apară EDP (1)).

Prin utilizarea metodei separării variabilelor se poate rezolva prima problemă mixtă pentru EDP (1'), utilizînd rezultatele din punctul 4; astfel, presupunînd $a = 1$ și $n = 3$ vom da următoarea definiție:

Problema 2. *Fie $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit avînd frontiera ∂D_3 netedă pe porțiuni; să se determine o soluție u a* EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_3 u$$

în $\mathbb{R}_+ \times G$, cu $u \in C^0(R_+^- \times D_3^-) \cap C^2(\mathbb{R}_+ \times D_3)$ verificînd următoarele condiții:

ii. $u(t, x) = f(t, x)$ *pentru* $0 \leqslant t < \infty$ *și* $x \in \partial D_3$

i. $u(t, x)|_{t=0} = u_0(x)$, $x \in D_3^-$

unde u_0 și f sînt funcții continue date astfel încît $f = u_0$ pentru $x \in \partial D_3$.

Vom numi problema 2 *prima problemă mixtă pentru ecuația căldurii.*

Obsevația 3. Fără a pierde din generalitate, se poate presupune în problema 2 $f = 0$, deoarece în caz contrar fie v soluția problemei Dirichlet interioare pentru D_3 și $\Delta_3 v = 0$ cu datele f pe ∂D_3; cum v este o FA în D_3, scriind $w(t, x) = u(t, x) - v(x)$ (u fiind soluția problemei 2) se deduce

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_3 u = \Delta_3 u - \Delta_3 v = \Delta_3(u - v) = \Delta_3 w$$

$$w\,|_{x \in \partial D_3} = u|_{\partial D_3} - v\,|_{\partial D_3} = f - f = 0$$

$$w(t, x)\,|_{t=0} = u(t, x)\,|_{t=0} - v(x)\,|_{t=0} = u_0(x) - v(x) = u_0^*(x)$$

S-a obținut iarăși problema 2 cu $f = 0$ și $u_0 = u_0^*$.

Teorema 6. *Problema 2 admite cel mult o singură soluție.*

Fie $u = u(t, x)$ o soluție a problemei 2 și să definim $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ prin

$$E(t) = \int_{D_3} (\nabla_3^x u, \nabla_3^x u)\, dx = \int_{D_3} \left(\sum_{j=1}^{3} \left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) \right]^2 \right) dx;$$

rezultă

$$E'(t) = 2 \int_{D_3} \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t}(t, x) \right] dx = 2 \int_{D_3} \sum_{j=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx = 2 \int_{\partial D_3} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j \right) \frac{\partial u}{\partial t}\, d\sigma - 2 \int_{D_3} \Delta_3 u \frac{\partial u}{\partial t}\, dx =$$

$$= -2 \int_{D_3} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leqslant 0,$$

deoarece $u\Big|_{\partial D_3} = 0$, deci $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\partial D_3} = 0$, iar $\Delta_3 u = \dfrac{\partial u}{\partial t}$; așadar, E care este prin definiție pozitivă, este totodată descrescătoare și cum $E(0) = 0$ (se presupune u o soluție a ecuației omogene verificînd condiția inițială nulă, ceea ce antrenează $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{t=0} = 0$) neapărat $E(t) = 0$ pentru orice t. Prin urmare $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, 2, 3$ și $u(t, x)$ fiind o constantă în raport cu variabilele x, nulă pentru $t = 0$, va fi nulă pentru orice $t \geqslant 0$ și $x \in D_3^-$.

Pentru a stabili existența soluției, vom scrie

$$u(t, x) = T(t)\, v(x),$$

iar T va verifica ED $T' + \lambda T = 0$, pe cînd v va fi o soluție în D_3 a EDP Helmholtz $\Delta_3 v + \lambda v = 0$, nulă pe ∂D_3; rezultă existența unui șir de valori proprii $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ pozitive și a unei înfinități numărabile de funcții proprii $(v_n)_{n\geqslant 1}$ din $\overset{\circ}{H}_1(D_3)$ (de fapt $v_n \in C_0^\infty(D_3)$). Cum $T(t) = T_n(t) = a_n e^{-\lambda_n t}$, se obțin soluțiile particulare $u_n(t, x) = a_n e^{-\lambda_n t} v_n(x)$ care conduc la seria

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t} v_n(x)$$

în care șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ din $\mathbb{R}$ se determină cu ajutorul condiției inițiale $u(t, x)|_{t=0} = u_0(x)$:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x),\ a_n = (u_0, v_n)_0 = \int_{D_3} u_0(x) v_n(x)\, dx,\ n \geqslant 1.$$

Așadar, dacă $u_0 \in \overset{\circ}{H}_1(D_3)$ rezultă soluția

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_0, v_n)_0\, e^{-\lambda_n t} v_n(x) = \int_{D_3} G(t, x, y)\, u_0(y)\, dy,$$

unde G este funcția Green atașată problemei 2 :

$$G(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} v_n(x) v_n(y).$$

În cazul ecuației neomogene, soluția se poate obține adaptînd în mod corespunzător principiul lui Duhamel (vezi Lema 2) de la problema 1 la problema 2.

5.2. Transformarea Weierstrass

În capitolul 4 s-au prezentat cîteva transformări integrale utilizate în practică; teoria legată de ecuația căldurii introduce o transformare integrală nouă; astfel cu ajutorul funcției S definită prin (3′) și a convoluției $S(t, x) *_1 f(x)$ se deduce funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = S(t, x) *_1 f(x) \Big|_{t=1}$, adică

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4}}\, dy. \tag{9}$$

Definiția 1. *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *este astfel încît funcția* F *definită prin* (9) *există, atunci* F *se numește transformarea Weierstrass a funcției* f *și vom scrie*

$$F = W[f].$$

Teoria transformării Weierstrass se poate realiza prin analogie cu teoria transformării Fourier sau a transformării Laplace; considerînd (9) ca fiind definiția clasică a acestei transformări, prin construcția unui spațiu convenabil de funcții-test se va obține un spațiu de distribuții în care are sens transformarea în cauză, iar nucleul transformării (9), adică funcția $S(1, x - y)$ este un element al acestui spațiu de funcții test. În acest caz, pentru distribuțiile în cauză transformarea Weierstrass se va defini prin (considerînd $x \in \mathbb{C}$)

$$W[f](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} < f(y),\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4}} > \tag{10}$$

Se poate arăta că (10) definește o funcție olomorfă pentru $a_1 < \mathrm{Re}\ x < a_2$, iar

$$\mathrm{D}^m W[f](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} < f(y),\ D_x^m\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4}} >,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

în plus, dacă se cunoaște $F = W[f]$, f se obține cu ajutorul formulei de inversare

$$f(y) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{4\pi}} \int_{a-\mathrm{i}r}^{a+\mathrm{i}r} F(x)\, \mathrm{e}^{\frac{(x-y)^2}{4}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{4\pi}} \int_{\substack{a-\mathrm{i}\infty \\ a\in]a_1,a_2[}}^{a+\mathrm{i}\infty} F(x)\, \mathrm{e}^{\frac{(x-y)^2}{4}}\, \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Este evidentă acum analogia dintre transformarea Laplace și transformarea Weierstrass, iar în baza teoriei din secțiunea 5.1 se deduce că soluția ecuației căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

se poate scrie sub forma (înlocuind deci $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$ prin $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$, $t > 0$ fiind un parametru)

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} < u_0(y),\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} >_y \tag{12}$$

indicele y arătînd variabila asupra căreia se efectuează calculele. Soluția (12) este valabilă pentru distribuții u_0 convenabil alese (de exemplu $u_0 \in \mathcal{D}'$, $u_0 \in \mathcal{S}'$) și trebuie interpretată ca o distribuție în raport cu x; dacă $t \to 0$ $(t > 0)$ avem $u(t, x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} u_0(x)$ în ipoteza $u_0 \in \mathcal{D}'$.

Transformarea Weierstrass este comodă în studiul EDP de tipul ecuațiilor căldurii, cum ar fi, de exemplu, ecuația policalorică

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m u(t, x) = F(t, x), \; m = 1, \; 2, \; \ldots,$$

unde $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} +$

$+ \frac{\partial^4}{\partial x^4}$, $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{m-1}\right]$, $m = 3, \; 4, \; \ldots$

De asemenea, această transformare se poate generaliza la $n > 1$ variabile prin înlocuirea lui $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$ prin $\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{4}}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ fiind de regulă un punct din $\mathbb{C}^n$: în baza considerațiilor anterioare dacă $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soluția EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_n u$$

cu proprietatea $u(t, x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} u_0(x)$ $(t \to 0)$ se va scrie

$$u(t, x) = \left\langle u_0(y), \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}{4t}} \right\rangle_y$$

Spațiile care se utilizează în teoria transformării Weierstrass din $\mathbb{R}$ se notează $W(\alpha, \beta)$ iar $W(\alpha, \beta) = \bigcup_{j=0}^{\infty} W_{a_j, b_j}$ cu șirurile $(a_j)_{j \geqslant 1}$, $(b_j)_{j \geqslant 1}$ din $\mathbb{R}$ astfel încît $a_j \downarrow \alpha$, $b_j \uparrow \beta$ $(j \to \infty)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\varphi \in W_{a,b}$, dacă $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ și $\sup_{x \in \mathbb{R}} e^{\frac{x^2}{4}} |\rho_{a,b}(x) \, D^p \varphi(x)| < \infty$, $p = 1, \; 2, \; \ldots$ cu $\rho_{a,b}(x) = e^{-ax^2/2}$, pentru $x < 0$ și $\rho_{a,b}(x) = e^{-bx^2/2}$, pentru $x \geqslant 0$. $W_{a,b}$ va fi un spațiu numărabil normat și complet, deci este un spațiu Fréchet în

care operația de derivare este o aplicație liniară și continuă pe $W_{a,b}$; spațiul $W(\alpha, \beta)$ va fi de asemenea complet, și $W'(\alpha, \beta)$ va fi spațiul distribuțiilor utilizat în transformarea Weierstrass, iar $\mathcal{D} \subset W(\alpha, \beta)$ este dens în $W(\alpha, \beta)$ (deci $W'(\alpha, \beta) \subset \mathcal{D}'$). Ca de obicei, $f \in W'(\alpha, \beta)$, dacă f este o formă liniară și continuă pe $W(\alpha, \beta)$, convergența în $W(\alpha, \beta)$ fiind definită în mod analog ca și în cazul spațiilor din transformarea Laplace (vezi 7.3 cap. IV).

6. Ecuații de tip hiperbolic

Vom analiza succint unele probleme din teoria EDP de tip hiperbolic, luînd ca model ecuația undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \Delta_n u(t, x) + F(t, x), \; t \geqslant 0, \; x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

sau $\square_n u = F$, cu notația, $\square_n = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n$, operatorul $\square_n$ citindu-se *dalambertian* n.

Această teorie diferă esențial de teoria valabilă în cazul ecuațiilor de tip eliptic sau parabolic; de asemenea comportarea soluțiilor diferă odată cu n: pentru n impar proprietățile soluțiilor EDP (1) diferă de proprietățile soluțiilor aceleiași EDP dar cu n par.

6.1. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuația coardei vibrante

După cum s-a precizat la secțiunea 2.2 ecuația coardei vibrante este EDP (1) cu $n = 1$; spre deosebire de situația tratată acolo acum se va ataşa EDP

$$\square_1 u = F \text{ sau } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x), \; t \geqslant 0, \; x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

cu condițiile inițiale

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\Big|_{t=0} = u_1(x), \; x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Problema (2), (3) se va rezolva în etape, considerînd EDP omogenă corespunzătoare lui (2), adică ecuația

$$\square_1 u = 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2'}$$

precum și condițiile inițiale omogene

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{3'}$$

Etapele de rezolvare vor fi :

Etapa 1 : *rezolvarea* EDP (2') *în condițiile inițiale* (3), *soluția fiind notată* u_h.

Etapa 2 : *rezolvarea* EDP (2) *în condițiile inițiale* (3'), *soluția fiind notată* u_p.

În consecință, după cum se verifică imediat, problema (2), (3) va fi rezolvată prin $u = u_h + u_p$.

Definiția 1. *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este integrabilă, prin media lui* f *pe intervalul* $I \subset \mathbb{R}$ *se înțelege numărul* $M_I[f]$, *definit prin*

$$M_I[f] = \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\, \mathrm{d}y$$

unde $|I|$ *este lungimea intervalului* I.

Observația 1. Dacă $I = [x, -t, x + t]$, atunci presupunînd $f \in C^0(\mathbb{R})$ avem

$$M_I[f] = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(y)\, \mathrm{d}y,$$

iar media $M_I[f]$ va depinde de variabilele t și x.

Lema 1. *Dacă* $u \in C^3\ (t > 0,\ x \in \mathbb{R})$ *și* u *verifică* EDP (2') *atunci funcția* $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ *va verifica aceeași ecuație.*

Avem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u\right] = 0.$$

Teorema 1. *Dacă* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *și* $I = B_t(x) =]x - t, x + t[$, $x \in \mathbb{R}$ $t > 0$ *atunci funcția*

$$m_f(t, x) = t\, M_I[f] \tag{4}$$

verifică EDP (2') *și condițiile inițiale*

$$m_f\Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial m_f}{\partial t}\Big|_{t=0} = f, \tag{5}$$

iar $\dfrac{\partial^2 m_f}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 0.$

Demonstrația se reduce la o simplă verificare, utilizînd regula lui Leibniz de derivare a integralelor cu interval de integrare variabil; deoarece din observația 1 se deduce

$$m_f(t, x) = t\, M_I[f] = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f(y)\, dy$$

vom avea

$$\frac{\partial m_f}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{2} [f(x + t) - f(x - t)]$$

$$\frac{\partial m_f}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)]$$

$$\frac{\partial^2 m_f}{\partial x^2}(t, x) = \frac{1}{2} [f'(x + t) - f'(x - t)]$$

$$\frac{\partial^2 m_f}{\partial x^2}(t, x) = \frac{1}{2} [f'(x + t) - f'(x - t)]$$

de unde rezultă (5) și evident $\frac{\partial^2 m_f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 m}{\partial x^2}$, $\left.\frac{\partial^2 m_f}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0.$

Teorema 2. *Soluția* EDP (2'), *care verifică condițiile inițiale* (3), *se scrie sub forma*

$$u_h(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}(t\, M_I[u_0]) + t\, M_I[u_1],$$

dacă $I = B_t(x) =]x - t, x + t[$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, *iar* $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$.

Se aplică teorema 1 și lema 1, ținînd seama că $\left.\frac{\partial^2 m_f}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0.$

Consecința 1. *Soluția* u_h *din teorema* 2, *în baza calculelor din demonstrația teoremei* 1, *se scrie sub forma*

$$u_h(t, x) = \frac{1}{2} [u_0(x + t) + u_0(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\, dy, \qquad (6)$$

numită formula lui d'Alembert pentru ecuația coardei vibrante.

Prin urmare, formula lui d'Alembert va fi soluția EDP a coardei în etapa 1.

Trecînd la etapa 2, se utilizează principiul lui Duhamel adaptat la cazul EDP (2); vom formula acest principiu, în acest caz, sub forma următoare:

Lema 2. *Dacă* $v = v(t, s, x)$ *este soluția* EDP (2′) *care verifică datele Cauchy*

$$v\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(t, s, x)\Big|_{t=0} = F(s, x), \tag{7}$$

cu $s \geqslant 0$, $F \in C^1$ *în raport cu variabila* x *pentru orice* $s \geqslant 0$ *atunci*

$$u_p(t, x) = \int_0^t v(t - s, s, x)\, ds \tag{8}$$

va fi soluția EDP (2) *în etapa* 2.

Vom arăta că u_p verifică cerințele etapei 2; evident $u_p\Big|_{t=0} = 0$ și deoarece

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}(t, x) = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(t - s, s, x)ds + v(t - s, s, x)\Big|_{s=t} = \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(t - s, s, x)\, ds$$

(în baza primei condiții (7) $v(t - s, s, x)\Big|_{s=t} = v(0, t, x) = 0$) se deduce $\dfrac{\partial u_p}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$;

apoi, utilizînd și a doua condiție (7) avem

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}(t, x) = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t - s, s, x)\, ds + \frac{\partial v}{\partial t}(t - s, s, x)\Big|_{s=t} = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t - s, s, x)ds + F(t, x)$$

și cum

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}(t, x) = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t - s, s, x)\, ds \text{ rezultă}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_p = \int_0^t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)(t - s, s, x)ds + F(t, x) = F(t, x).$$

Deoarece din formula lui d'Alembert (6), în condițiile inițiale (7) rezultă

$$v(t, s, x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} F(s, y)\, dy,$$

pentru u_p se obține din (8)

$$u_p(t, x) = \frac{1}{2}\left[\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(s, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s \tag{8'}$$

sau, cu schimbarea de variabilă $t - s = r$, $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}r$,

$$u_p(t, x) = \frac{1}{2}\int_0^t\left[\int_{x-r}^{x+r} F(t - r, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}r. \tag{8''}$$

Așadar, s-a demonstrat următorul rezultat :

Teorema 3. *Soluția ecuației coardei vibrante* (2) *care verifică datele inițiale* (3) *se poate scrie sub forma*

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x + t) + u_0(x - t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\,\mathrm{d}y + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t\left[\int_{x-r}^{x+r} F(t - r, y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}r \tag{9}$$

dacă $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, *iar* $F(t, x) \in C^1(\mathbb{R})$, *pentru orice* $t \geqslant 0$.

Observația 2. Conform noțiunilor din punctul 3, ecuația caracteristicilor pentru EDP (2) va fi

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 1 = 0 \text{ sau } (\mathrm{d}x + \mathrm{d}t)(\mathrm{d}x - \mathrm{d}t) = 0,$$

rezultînd caracteristicile

$$x + t = c_1,\ x - t = c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

luînd în considerare formula lui d'Alembert (6), se deduce că în această formulă un rol esențial îl au caracteristicile ecuației coardei vibrante.

Vom arăta acum că orice soluție a EDP (2) care verifică datele inițiale (3) se scrie neapărat sub forma (9); pentru aceasta vom demonstra următoarea teoremă de unicitate :

Teorema 4. EDP (2') *admite numai soluția banală dacă datele inițiale* u_0 *și* u_1 *sînt nule.*

Fie u diferența a două soluții ale EDP $\square_1 u = 0$; avem $u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 0$, iar în baza identității $-2u_t \square_1 u = 2\dfrac{\partial}{\partial x}(u_t u_x) - \dfrac{\partial}{\partial t}(u_t^2 + u_x^2)$, prin aplicarea formulei

lui Green va rezulta, ținînd cont că $\square_1 u = 0$

$$2\iint_{D_2} u_t \square_1 u \, dx\, dt = \int_{\partial D_2} (u_t^2 + u_x^2)dx + 2u_t u_x \, dt = 0.$$

Vom presupune D_2 trapezul definit de caracteristicele EDP $\square_1 u = 0$, care trec prin punctul $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 > 0$ și segmentele AB, DC determinate de dreptele $t = 0$ și $t = \tau < t_0$ și aceste caracteristici; pe AB avem $dt = 0$ și $u = 0$, $u_t = 0$, deci $u_x\Big|_{t=0} = 0$; pe segmentul DC al dreptei $t = \tau$ avem $dt = 0$, iar pe segmentele BC și AD aflate pe caracteristicile $x + t = x_0 + t_0$ respectiv $x - t = x_0 - t_0$ vom avea $dx = -dt$, respectiv $dx = dt$. Se deduce egalitatea

$$-\int_{DC} (u_t^2 + u_x^2)\, dx = \int_0^\tau (u_t^2 + u_x^2 - 2u_t u_x)dt + \int_0^\tau (u_t^2 + u_x^2 + 2u_t u_x)\, dt,$$

care antrenează $\int_{DC} (u_t^2 + u_x^2)\, dx = 0$, pentru orice $\tau \in [0, t_0]$. Cum $\iint_{D_2} (u_t^2 + u_x^2)\, dx\, dt =$

$$= \int_0^\tau \left[\int_{DC} (u_t^2 + u_x^2)dx \right] dt = 0 \text{ în } D_2 \text{ rezultă } u_t^2 + u_x^2 = 0, \text{ adică } u_t = u_x = 0, \text{ ceea ce înseamnă}$$

$u(t, x) = k$, $k \in \mathbb{R}$; deoarece $u \in C^0([0, T] \times \mathbb{R})$ pentru orice $T > 0$, iar $u\Big|_{t=0} = 0$ avem $k = 0$, adică $u = 0$ în D_2. Cum D_2 este orice trapez din semiplanul $t > 0$ (punctul (x_0, t_0) fiind arbitrar) se deduce $u(t, x) = 0$, pentru $t \geqslant 0$ și $x \in \mathbb{R}$.

Consecința 2. EDP $\square_1 u = F$, *admite o singură soluție în semiplanul* $t > 0$, *astfel încît* $u\Big|_{t=0} = u_0$, $u_t\Big|_{t=0} = u_1$, $u_0, u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fiind funcții date* (se presupune $u \in C^0([0, T] \times \mathbb{R})$, $T > 0$, u_t, u_{xx}, $u_{xx} \in C^0(]0, T[\times \mathbb{R})$; *dacă* $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$, $F \in C^1(]0, T[\times \mathbb{R})$, *atunci această soluție se poate scrie sub forma* (9).

Consecința 3. *Din* (9) *rezultă stabilitatea soluției problemei Cauchy* $u\Big|_{t=0} = u_0$, $u_t\Big|_{t=0} = u_1$, *pentru* EDP $\square_1 u = F$ *în sensul următor: dacă*

$$\|u_0 - u_0^*\|_\infty < \varepsilon, \quad \|u_1 - u_1^*\|_\infty < \varepsilon, \quad \|F - F^*\|_\infty < \varepsilon$$

atunci $\|u - u^*\|_\infty < \varepsilon_1$ *în orice* $D_2 \subset \mathbb{R}^2$, *dacă* u, u^* *sînt soluțiile* EDP $\square_1 u = F$ *respectiv* $\square_1 u = F^*$ *verificînd datele inițiale* $u\Big|_{t=0} = u_0$, $u_t\Big|_{t=0} = u_1$, $u^*\Big|_{t=0} = u_0^*$, $u_1^*\Big|_{t=0} = u^*$ (domeniul D_2 fiind de forma stabilită în demonstrația teoremei 4, iar $\varepsilon_1 \to 0$ cînd $\varepsilon \to 0$).

6.2. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuația undelor sferice

Prin *ecuația undelor sferice* se înțelege EDP $\square_3 u = F$, adică ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_3 u = F; \tag{10}$$

vom căuta soluțiile acestei EDP care verifică datele Cauchy

$$u\Big|_{t=0} = u_0, u_t\Big|_{t=0} = u_1, \; u_0, u_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{11}$$

considerînd prin soluție a EDP (10) o funcție $u : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^3)$, $T > 0$ astfel încît $u_t, u_{tt}, u_{x_j}, u_{x_j x_j} \in C^0(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$.

Pentru rezolvarea acestei probleme se urmează punct cu punct toate considerațiile din secțiunea 6.2 înlocuind funcția M_f, din definiția 1, prin media sferică a lui f pe sfera $B_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$; notînd aici această medie sferică prin $M_r[f](x)$, adică

$$M_r[f](x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} f(y)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} f(x + r\nu)\, d\omega, \tag{12}$$

unde $S_r = \partial B_r(x)$, $S_1 = \partial B_1(0)$; avem $y \in S_r$, deci $y = x + r\omega$, $\omega \in S_1$, $d\sigma = r^2\, d\omega$, $d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ (în coordonate sferice), iar ν este versorul normalei exterioare la S_1. Tot ce rămîne de justificat este faptul că funcția $t\, M_t[f](x) = u_f(t, x)$ verifică EDP $\square_3 u = 0$ și condițiile inițiale

$$u_f\Big|_{t-0} = 0, \frac{\partial u_f}{\partial t}\Big|_{t=0} = f, \; \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 0.$$

Teorema 5. *Funcția* $u_f : [0, \mathrm{R}] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *definită prin* $u_f(t, x) = t\, M_t[f](x)$, *pentru* $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, *verifică* EDP $\square_3 u = 0$ *și condițiile inițiale* $u_f\Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial u_f}{\partial t}\Big|_{t=0} = f, \frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 0.$

Vom justifica în prealabil următorul rezultat:

Lema 3. *Media sferică* (12) *verifică* EDP *Euler-Poisson-Darboux*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \Delta_3 u = 0 \tag{13}$$

și condițiile inițiale

$$u\Big|_{r=0} = f, \; u_r\Big|_{r=0} = 0, \; u_{rr}\Big|_{r=0} = \frac{1}{3}\Delta_3 f \tag{13'}$$

Avem dacă $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ și utilizăm în formula flux-divergență

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[\frac{\partial}{\partial r} f(x + r\omega) \right] d\omega = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[\sum_{j=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j} (x + r\omega) \nu_j \right] d\omega = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_3} \frac{\partial f}{\partial \nu} (y)\, d\sigma = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{B_r(x)} (\Delta_3 f)(y)\, dy = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \left[\iint_{S_1} (\Delta_3 f)(x + s\nu)\, d\omega \right] s^2\, ds,$$

ultima egalitate bazîndu-se pe egalitatea $dy = dr\, d\sigma = r^2 dr d\omega$ valabilă în cazul sferei. Eerivînd în raport cu r expresia $r^2 \dfrac{\partial M}{\partial r}$ din (14) rezultă

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial M_r}{\partial r} \right) = \frac{r^2}{4\pi} \iint_{S_1} (\Delta_3 f)(x + r\nu) d\omega = r^2 \Delta_3^x \left(\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} f(x + r\nu) d\omega \right) = r^2 \Delta_3^x M_r,$$

care conduce la EDP (13). Pentru condițiile (13′), din (12) avem

$$M_r[f] \Big|_{r=0} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} f(x + r\nu) \Big|_{r=0} d\omega = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} f(x) d\omega = f(x);$$

din expresia lui $\dfrac{\partial M_r}{\partial r}$ din (14) se deduce aplicînd regula lui Hopital

$$\frac{\partial M_r(f)}{\partial r} \Big|_{r=0} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{8\pi} r \iint_{S_1} (\Delta_3 f)(x + r\nu)\, d\omega = 0, \tag{14′}$$

iar din EDP (13), va rezulta, folosind faptul că $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial M_r[f]}{\partial r} = \dfrac{2}{3} \Delta_3 f$,

$$\frac{\partial^2 M_r[f]}{\partial r^2} \Big|_{r=0} = \lim_{r \to 0} \left(-\frac{2}{r} \frac{\partial M_r[f]}{\partial r} + \Delta_3^x M_r[f] \right) = \frac{1}{3} \Delta_3 f.$$

Demonstrația teoremei 5 este acum imediată; deoarece ecuația mediei sferice se poate scrie și sub forma (prin înmulțire cu r)

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_r[f]) - \Delta_3^x (r M_r[f]) = 0$$

scriind t în loc de r și notînd $u_f(t, x) = t M_t[f]$ se deduce $\square_3 u_f = 0$.

$$\text{Apoi } u_f \Big|_{t=0} = t M_t[f] \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial u_f}{\partial t} \Big|_{t=0} = M_t[f] \Big|_{t=0} + t \frac{\partial M_t[f]}{\partial t} \Big|_{t=0} = + f,$$

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 2 \frac{\partial M_t[f]}{\partial t} \Big|_{t=0} + t \frac{\partial^2 M_t[f]}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0.$$

Prin urmare, în baza analogiei dintre proprietățile funcției $t\,M_1[f]$ de la secțiunea 6.1 cu proprietățile funcției $t\,M_t[f]$ va rezulta că teorema 2 este direct aplicabilă (cu înlocuirea lui M_1 prin M_r) și putem presupune justificat următorul rezultat :

Teorema 6. *Soluția* EDP $\square_3 u = 0$ *care verifică datele inițiale* (11) *este dată de*

$$u_h(t, x) = tM_t[u_1] + \frac{\partial}{\partial t}(tM_t[u_0]) \tag{15}$$

dacă $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *și* $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$
În baza lui (12), relația (15) se va scrie

$$u_h(t, x) = \frac{1}{4\pi t}\iint_{S_t} u_1(y)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\iint_{S_t} u_0(y)\,\mathrm{d}\sigma\right) = \tag{15'}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{u_1(y)}{t}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_t}\frac{u_0(y)}{t}\,\mathrm{d}\sigma$$

sau, deoarece $\mathrm{d}\sigma = t^2\mathrm{d}\omega$,

$$u_h(t, x) = \frac{t}{4\pi}\iint_{S_1} u_1(x + t\nu)\,\mathrm{d}\omega + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\iint_{S_1} u_0(x + t\nu)\mathrm{d}\omega\right). \tag{15''}$$

Pentru obținerea soluției EDP $\square_3 u = F$ care verifică datele inițiale (11) se aplică principiul lui Duhamel, rezultînd funcția

$$u_p(t, x) = \int_0^t v(t - s, s, x)\,\mathrm{d}s,\ \square_3 v = 0,\ v\Big|_{t=0} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(s,x)$$

care va verifica EDP $\square_3 u = F$ și condițiile $u_p\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial u_p}{\partial t} = 0$; cum din (15) se deduce $v(t, s, x) = t\,M_t[F(s,\ x)]$, rezultă ($F \in C^2$ în x pentru orice $t \geqslant 0$)

$$u_p(t, x) = \int_0^t (t - s)M_{t-s}[F(s, x)]\,\mathrm{d}s,$$

așa că soluția dorită va fi

$$u(t, x) = u_h(t, x) + u_p(t, x) = t\, M_t[u_1] + \frac{\partial}{\partial t}(t\, M_t[u_0]) +$$

$$+ \int_0^t t - s)\, M_{t-s}[F(s, x)]\, ds. \tag{16}$$

Formula (16) va fi analoaga în $\mathbb{R}^3$ a formulei (9) din $\mathbb{R}^1$ și poartă numele de *formula lui Poisson pentru ecuația undelor sferice*. Teorema de unicitate 4 rămîne valabilă și în acest caz ca și teorema de stabilitate (consecința 3), ultima cu diferența că trebuie impuse condițiile $\|u_0 - u_0^*\|_\infty < \varepsilon$, $\|\nabla_3 u_0 - \nabla_3 u_0^*\|_\infty < \varepsilon$, $\|u_1 - u_1^*\|_\infty < \varepsilon$, $\|F - F^*\|_\infty < \varepsilon$ pentru a deduce $\|u - u_0\|_\infty < \varepsilon$ în orice domeniu din $[0, T] \times \mathbb{R}^3$.

Lema 4. *Dacă* $f \in C^k(D_3)$ *și* $r < \operatorname{dist}(x, \partial D_3)$, $x \in D_3$, *are loc dezvoltarea Taylor (numită formula lui Pizetti)*

$$M_r[f] = f + \sum_{j=1}^{m} \frac{r^{2j}}{2^j j!\, 1.3 \ldots (2j-1)} \Delta_3^j f + R_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{r^{2j}}{(2j)!} \Delta_3^j f + R_m,$$

$m \leqslant k$ *unde* $\Delta_3^0 f = f$, $\Delta_3^1 f = \Delta_3 f$, ..., $\Delta_3^j f = \Delta_3(\Delta_3^{j-1} f)$, $j = 2, 3, \ldots$

Scriind EDP (13) a mediei sferice sub forma

$$r \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial M_r}{\partial r} = r \Delta_3 M_r \text{ și}$$

derivînd de $l \leqslant k - 2$ ori în raport cu r se deduce identitatea

$$r \frac{\partial^{l+2} M_r}{\partial r^{l+2}} + (l+2) \frac{\partial^{l+1} M_r}{\partial r^{l+1}} = r \Delta_3 \left(\frac{\partial^l M_r}{\partial r^l} \right) + l \Delta_3 \left(\frac{\partial^{l-1} M_r}{\partial r^{l-1}} \right),$$

care pentru $r \to 0$ conduce la relația de recurență

$$\left. \frac{\partial^{l+1} M_r[f]}{\partial r^{l+1}} \right|_{r=0} = \frac{1}{l+2} \Delta_n \left(\left. \frac{\partial^{l-1} M_r[f]}{\partial r^{l-1}} \right|_{r=0} \right).$$

Deoarece avem

$$M_r[f] = \sum_{j=0}^{m} \frac{r^j}{j!} \left. \frac{\partial^j M_r[f]}{\partial r^j} \right|_{r=0} + \ldots$$

folosind (13′) rezultă că derivatele de ordin impar ale lui $M[f]$ sînt nule pentru $r = 0$, pe cînd derivatele de ordin par se exprimă prin iteratele operatorului lui Laplace Δ_3, obținîndu-se în final formula lui Pizetti.

Lema 4 este utilă în calculul efectiv al soluției (16) dacă u_0, u_1 și F sînt funcții elementare; pentru aceasta vom considera următorul exemplu:

Exemple 1. Fie $F(t, x, y, z) = t^2(x + y^2 + z^3)$, $u_0(x, y, z) = xy^2z^3$, $u_1(x, y, z) = e^{x+y+z}$; deoarece din formula lui Pizetti rezultă

$$M_t[u_0](x, y, z) = \left(u_0 + \frac{t^2}{2}\Delta^3 u_0 + \frac{t^4}{24}\Delta_3^2 u_0\right)(x, y, z) = xy^2z^3 + t^2(xz^3 + 3xyz) + \frac{xt^4}{2},$$

$$M_t[u_1](x, y, z) = e^{x+y+z}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^{2j}}{(2j)!} = \operatorname{ch}(t)e^{x+y+z}$$

$$M_t[F(s, x, y, z)] = s^2(x + y^2 + z^3) + \frac{t^2}{2}\Delta_3[s^2(x + y^2 + z^3)] =$$

$$= s^2(x + y^2 + z^3) + t^2s^2(1 + 3z),$$

soluția problemei Cauchy $u\Big|_{t=0} = u_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1$, pentru EDP $\square_3 u = F$ va fi

$$u(t, x, y, z) = t\operatorname{ch}(t)e^{x+y+z} + xy^2z^3 + 3t^2(xz^3 + 3xyz) + \frac{5}{2}xt^4 +$$

$$+ \frac{t^3}{3}(x + y^2 + z^3) + \frac{t^5}{30}(1 + 3z).$$

2. Se poate folosi și procedeul din secțiunea 6.1 bazat pe dezvoltarea în serie Taylor a soluției după puterile lui t; astfel dacă $F = 0$, putem scrie

$$u(t, x) = \sum_{n}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n}\Big|_{t-0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}u(t, x)}{t^{2n}}\Big|_{t=0} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}u(t, x)}{\partial t^{2n+1}}\Big|_{t=0}; \text{ ținînd seama că } \frac{\partial^{2n}u(t,x)}{\partial t^{2n}} =$$

$$= \Delta_3^n u(t, x), \frac{\partial^{2n+1}u(t, x)}{\partial t^{2n+1}} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^{2n}u(t, x)}{\partial t^{2n}}\right] \text{ va rezulta}$$

$$\frac{\partial^{2n}u(t, x)}{\partial t^{2n}}\Big|_{t=0} = \Delta_3^n u_0(x), \frac{\partial^{2n+1}u(t, x)}{\partial t^{2n+1}}\Big|_{t=0} = \Delta_3^n u_1(x) \text{ și deci}$$

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\Delta_3^n u_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta_3^n u_1(x).$$

ceea ce, simbolic, se transcrie

$$u(t, x) = \operatorname{ch}(\sqrt{\Delta_3}t)u_0(x) + \frac{1}{\sqrt{\Delta_3}} \operatorname{sh}(\sqrt{\Delta_3}t)u_1(x) = tM_t[u_1](x) + \frac{\partial}{\partial t}\, tM_t[u_0](x)).$$

6.3. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuația undelor cilindrice

Luînd în considerație EDP $\square_2 u = F$, $F = F(t, x, y)$, $\square_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_2$, numită *ecuația undelor cilindrice*, soluția problemei Cauchy

$$u\Big|_{t=0} = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1,\ u_0, u_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

se poate obține din soluția problemei Cauchy pentru ecuația undelor sferice în baza observației că orice soluție a EDP $\square_3 u = 0$ care nu depinde de variabila z va fi o soluție a EDP $\square_2 u = 0$; de aceea, va fi suficient să arătăm că media sferică $M_r[f]$ a unei funcții $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pe orice sferă $B_r(x)$, $x = (x_1, x_2, 0)$ nu depinde de variabila x_3 ($f = f(x_1, x_2)$). Scriind $S_r = S_r^+ \cup S_r^-$, $S_r = \partial B_r(x)$, S_r^+ și S_r^- fiind emisfera superioară ($x_3 > 0$), respectiv emisfera inferioară a sferei S_r, avem

$$M_r[f](x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} f(y)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r^+} f(y)\, \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r^-} f(y)\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi r} \iint_{S_r^+} f(y)\, \mathrm{d}\sigma,$$

deoarece f nedepinzînd de variabila x_3 integrala pe S_r^- coincide cu integrala pe S_r^+; cum $\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2}{\sqrt{r^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}$ se deduce

$$M_r[f(x_1, x_2)] = \frac{1}{2\pi r} \iint_{C_r} \frac{f(y_1, y_2)\mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2}{\sqrt{r^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}},$$

$C_r = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < r^2\}$ și deci media sferică va depinde doar de variabilele r, x_1 și x_2. Prin urmare s-a justificat următorul rezultat:

Teorema 7. *Soluția* EDP *a undelor cilindrice*

$$\square_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_2 u = F(t, x),\ x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0$$

care verifică datele Cauchy

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\Big|_{t=0} = u_1(x), x \in \mathbb{R}^2,$$

va fi, cu $x = (x_1, x_2)$,

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C_t} \frac{u_1(y_1, y_2)\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{C_t} \frac{u_0(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathrm{d}s \iint_{C_{t-s}} \frac{F(s, y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{\sqrt{(t - s)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}},$$

dacă $u_1 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_0 \in C^3(\mathbb{R})$ *și* $F \in C^2(\mathbb{R})$ *pentru orice* $t \geqslant 0$.

Această formulă se numește *formula Poisson-Parseval* pentru ecuația undelor cilindrice. Ca și în situațiile din 6.1 și 6.2 se poate stabili atît unicitatea soluției cît și stabilitatea ei.

Metoda utilizată acum prin care s-a dedus soluția problemei Cauchy restrînse pentru EDP $\square_2 u = F$ din soluția EDP $\square_3 u = F$ poartă numele de *metoda de coborîre*; aplicînd metoda de coborîre formulei din teorema 7 este ușor de constatat că se va deduce soluția problemei Cauchy $u(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\Big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}$ pentru EDP $\square_1 u = F$ obținută la secțiunea 6.1 (pentru aceasta se observă că dacă lipsește variabila x_2 din u_0, u_1 și F, integralele duble din teorema 7 se calculează ușor).

În cazul EDP $\square_n u = F, n > 3$ se obțin formule asemănătoare cu cele anterioare dar mai complicate; pentru n impar soluția se va deduce cu ajutorul unor integrale de suprafață calculate pe sfera $B_t(x)$ iar dacă n este par soluția conține integrale calculate în cercul meridian al sferei anterioare (vor apare și derivatele de ordin $\geqslant \frac{n}{2}$ în raport cu t ale acestor integrale). Nu vom insista asupra acestor formule.

Exemplul 3 Soluția EDP $\square_2 u = 0$ care verifică datele Cauchy $u(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x_1), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\Big|_{t=0} = u_1(x_2)$, în baza metodei de coborîre se va scrie

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2}[u_0(x_1 + t) + u_0(x_1 - t)] + \frac{1}{2} \int_{x_2 - t}^{x_2 + t} u_1(y)\mathrm{d}y,$$

dacă $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$.

6.4. Domeniul de dependență al soluțiilor ecuației undelor de datele inițiale. Principiul lui Huygens

În cazul EDP $\square_1 u = 0$, caracteristicile acestei ecuații care trec prin punctul $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ au ecuațiile carteziene

$$x - t = x_0 - t_0, \quad x + t = x_0 + t_0;$$

aceste caracteristici intercepteză pe axa $t = 0$ segmentul $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ iar formula lui d'Alembert (6) arată că soluția u în punctul (t_0, x_0) este determinată de valorile datelor inițiale u_0 și u_1 în acest interval; din acest motiv intervalul $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ se numește *intervalul de dependență al punctului* (t_0, x_0) (dacă se modifică u_0 și u_1 în afara acestui interval, $u(t_0, x_0)$ nu se modifică).

Considerăm acum domeniul mărginit $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ avînd frontiera formată din axa $t = 0$ și dreptele $x - t = a$, $x + t = b$ pînă la punctul lor de intersecție, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ fiind un interval dat și $G_2 \subset \mathbb{R}^2$ domeniul nemărginit avînd frontiera formată din $t = 0$ și semidreptele $x + t = a$, $x - t = b$. În D_2 soluția va fi determinată numai de valorile lui u_0 și u_1 pe $[a, b]$ (în particular, dacă $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = 0$, $x \in [a, b]$, avem $u(t, x) = 0$ pentru $(t, x) \in D_2$ sau echivalent, două soluții ale EDP $\square_1 u = 0$ ale căror valori inițiale coincid în $[a, b]$, vor coincide și în D_2). Domeniul G_2 definit anterior se va numi *domeniul de influență al intervalului* $[a, b]$ *în raport cu* EDP $\square_1 u = 0$, valorile lui u_0 și u_1 în afara lui $[a, b]$ neinfluențînd soluția în afara lui G_2.

Trecînd la cazul EDP $\square_3 u = 0$, dacă $u_1 = 0$, avem soluția

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t} \frac{u_0(x + \nu t)}{t} \, d\sigma; \tag{16}$$

dacă $u_0(x) = 0$, pentru $x \notin B_\varepsilon(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, iar x este considerat ca punct de observație, pentru $0 < t < d = \text{dist}\,(x, \partial B_\varepsilon(x_0))$ avem $u = 0$ (deoarece $S_t \cap B_\varepsilon(x_0) = \emptyset$ și integrala din (16) este nulă: nu se observă nici un efect în x). Cum t are interpretare de timp, t va crește și pentru $d < t < D$, unde D este distanța maximă de la x la $B_\varepsilon(x_0)$ avem $S_t \cap B_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$, deci $u \neq 0$, și se observă un efect în x. Prin *front de undă* la momentul t_1 al perturbației produsă în $B_\varepsilon(x_0)$ la momentul inițial se înțelege mulțimea punctelor din $\mathbb{R}^3$ în care s-a manifestat mai întîi efectul amintit (cu alte cuvinte este frontiera mulțimii din $\mathbb{R}^3$ în care nu s-a produs nici o perturbare). Dacă $d < t_1 < D$, punctul de observație x se află în frontul de undă. Odată cu creșterea lui t, S_t va cuprinde la interior $B_\varepsilon(x_0)$ și deci $u = 0$, ceea ce înseamnă că frontul de undă a depășit punctul de observație x (în care nu mai există perturbație). Această proprietate a soluțiilor EDP $\square_3 u = 0$ (care apare și în cazul soluțiilor EDP $\square_1 u = 0$) poartă numele de *principiul lui Huygens*. Analiza formulei Poisson-Parse-

val (vezi teorema 7) arată că pentru EDP $\square_2 u = 0$, principiul lui Huygens nu este valabil, deoarece pentru $t > D$ avem $C_t \cap B_\varepsilon(x_0) \neq \neq \emptyset$ (unde $B_\varepsilon(x_0)$ este o sferă deschisă din $\mathbb{R}^2$).

6.5. Probleme mixte pentru ecuația undelor sferice

Fie $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ astfel încît ∂D_3 este netedă; vom lua în discuție problema următoare:

Problema 1 (*prima problemă mixtă*). *Să se determine o soluție* $u \in C^2(]0, T] \times D_3) \cap C^0([0, T] \times \bar{D}_3)$ *a ecuației undelor sferice care verifică*:

i. *Pentru orice* $x \in \partial D_3$ *și* $t \in [0, T]$ *avem* $u(t, x) = g(x)$.

ii. *Pentru orice* $x \in D_3$ *avem* $u(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\Big|_{t=0} = u_1(x),$$

unde u_0, u_1 *și* g *sînt funcții date* ($g(x) = u_0(x)$ pentru $x \in \partial D_3$). Ca și în cazul ecuației căldurii (vezi 5.1) se poate presupune $g = 0$; într-adevăr, fie v soluția problemei Dirichlet interioare pentru D_3 cu valorile g la frontieră. Punînd $w = u - v$, se deduce $\Delta_3 w = \Delta_3 u - \Delta_3 v = = \Delta_3 u = u_{tt} = w_{tt}$, $w(t, x) = u(t, x) - v(x) = 0$, $x \in \partial D_3$), iar dacă $x \in D_3$ avem $w(t, x)\Big|_{t=0} = u_0(x) - v(x) = w_0(x)$, $w_t(t, x)\Big|_{t=0} = u_1(x) - - w_1(x)$.

Dacă w_0 și w_1 sînt suficient de regulate problema 1 admite o singură soluție. Astfel, pentru a justifica unicitatea soluției se consideră integrala energiei (pentru soluția care corespunde lui $w_0 = w_1 = 0$)

$$E(t) = \int_{D_3} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i}^2 \right) \mathrm{d}x$$

care, derivată în raport cu t, conduce la egalitatea

$$E'(t) = 2\int_{D_3} [u_t u_{tt} + (\nabla_3 u, \nabla_3 u_t)]\, \mathrm{d}x = 2\int_{\partial D_3} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \mathrm{d}\sigma + 2\int_{D_3} u_t \square_3 u\, \mathrm{d}x = 0.$$

Deci, $E(t) = E_0$ și deoarece $E(0) = 0$, avem $E_0 = 0$, ceea ce antrenează $u(t, x) = 0$. Existența soluției se poate obține prin separare de variabile:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t)]\, v_n(x),$$

unde $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ și $(v_n)_{n\geq 1}$ este șirul valorilor respectiv al funcțiilor proprii ale problemei $\Delta u + \lambda u = 0$ în D_3, $u\Big|_{\partial D_3} = 0$; șirurile de constante $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ se obțin cu ajutorul condițiilor inițiale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x) = w_0(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} b_n v_n(x) = w_1(x).$$

Se deduce $a_n = (w_0, v_n)_0$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (w_1, v_n)_0$.

Prin separare de variabile, din EDP $\square_3 u = 0$ se obține ecuația Helmholtz și pentru a deduce efectiv șirul $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ și șirul $(v_n)_{n\geq 1}$ vom lua în considerație cazul coordonatelor sferice; ecuația Helmholtz se scrie

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0$$

(vezi și 4.7). Pentru $\lambda = 0$ se obține ecuația Laplace și deci $v = 0$ dacă $v\Big|_{\partial D_3} = 0$. Pentru $\lambda \neq 0$ scriind

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$$

se deduce ED (verificată de funcția R)

$$(r^2 R')' + (\lambda r^2 - \mu) R = 0$$

și EDP

$$\Delta_3^* Y + \mu Y = 0$$

unde Δ_3 este Laplaceianul pe sfera unitate și μ este constanta de separare. Făcînd în ED verificată de R substituția $w = \sqrt{r}\, R$ se obține ED Bessel

$$r^2 w'' + r w' + \left(\lambda r^2 - \mu - \frac{1}{4}\right) w = 0$$

și deci

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} [c_1 J_\alpha(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 N_\alpha(\sqrt{\lambda}\, r)], \quad \alpha = \sqrt{\mu + \frac{1}{4}}$$

J_α și N_α fiind funcții Bessel de prima, respectiv a doua speță. Punînd $\mu = \beta(\beta + 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ rezultă $\alpha^2 = \mu + \frac{1}{4} = \left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2$ și EDP verificată de funcțiile sferice Y devine

$$\Delta_3^* Y + \beta(\beta + 1)Y = 0$$

și prin urmare, revenind la funcția v se obțin soluții care depind de trei parametri β, λ și $\nu \neq 0$:

$$v_{\beta\lambda\nu}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}}[c_1]_{\beta+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 N_{\beta+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\, r)] [c_3 P_\beta^\nu(\cos\theta) +$$

$$+ c_4 Q_\beta^\nu(\cos\theta)] [(c_5 \cos\nu\varphi + c_6 \sin\nu\varphi),$$

P_β^ν și Q_β^ν fiind ca de obicei funcții Legendre asociate de prima respectiv a doua speță, iar $c_1, \ldots, c_6$ sînt constante arbitrare (pentru $\nu = 0$ se consideră funcția $c_5 + c_6\varphi$).

În ipoteza $D_3 = B_a(0)$, trebuie luat $c_2 = 0$, $c_4 = 0$ (pentru a evita singularitățile din origină sau de pe axa Oz), iar $\beta = n$ și $\nu = m$; notînd $j_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} J_{n+\frac{1}{2}}(r)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ se deduc soluțiile

$$v_{n\lambda m}(r, \theta, \varphi) = j_n(\sqrt{\lambda}\, r)\, Y_{nm}(\theta, \varphi),\ n = 0, 1, \ldots, m = 0, 1, \ldots, n.$$

Deoarece știm că valorile proprii λ sînt pozitive, se poate scrie $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{R}$, rezultînd pentru $\square_3 u = 0$ soluțiile particulare

$$u_{nkm}(t, r, \theta, \varphi) = v_{nkm}(r, \theta, \varphi)\,[A_{nkm} \cos(kt) +$$

$$+ B_{nkm} \sin(kt)] = j_n(kr)\, P_n^m(\cos\theta)[E_{nm} \cos(m\varphi) +$$

$$+ F_{nm} \sin(m\varphi)]\,[A_{nkm} \cos(kt) + B_{nkm} \sin(kt)]$$

care sînt continue în sfera $B_a(0)$ și periodice, cu perioada 2π în φ. Dacă aceste soluții nu depind de φ, ele se vor numi *axial-simetrice* și vor avea forma

$$u_{nk}(t, r, \theta) = j_n(kr)\, P_n(\cos\theta)\,[A_{nk} \cos(kt) + B_{nk} \sin(kt)].$$

Dacă soluțiile nu depind nici de θ, ele se vor numi *cu simetrie sferică* și deci vor avea forma

$$u_k(t, r) = j_0(kr)\ [A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)]$$

sau, deoarece $j_0(r) = \dfrac{\sin r}{r}$, se deduce

$$u_k(t, r) = \frac{\sin(kr)}{r}\ [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)].$$

BIBLIOGRAFIE

1. Arnold, V. *Ecuații diferențiale*, traducere din lb. rusă, EDITURA ȘTIINȚIFICĂ Și ENCICLOPEDICĂ, 1978.
2. Beals, R. *Advanced Mathematical Analysis*, SPRINGER-VERLAG, 1973
3. Berberian, S. K. *Lectures in Functional Analysis*, SPRINGER-VERLAG, 1974.
4. Braun, M. *Differential Equations and Their Applications*, SPRINGER-VERLAG, 1975.
5. Chung, K. L. *Elementary Probability Theory with Stocastic Processes* SPRINGER-VERLAG 1974.
6. Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable*, SPRINGER-VERLAG, 1978.
7. Davies, B. *Integral Transforms and Their Applications*, SPRINGER-VERLAG, 1978.
8. Gelfand, I. M. — Șilov, G. E. *Funcții generalizate*, traducere din lb. rusă, EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ 1983.
9. Kniazev, P. N. *Integranlnie preobrazovania* IZDATELSTVO VISȘAIA SCOLA, Minsk, 1969.
10. Leis, R. *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Institut Mannheim, HOCHSCULTASCHENBUCHER-VERLAG 1967.
11. Mihoc, Gh. — Ciucu, Gh. — Craiu, V. *Teoria probabilităților și Statistică matematică*, EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ 1978.
12. Mihoc, Gh. — Micu,. M. *Teoria probabilităților și Statistică matematică*, EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, 1980.
13. Protter, M. H. — Morrey, C.B. A *First Course in Real Analysis*, SPRINGER- VERLAG, 1977.
14. Pugachev, V. *Théorie des Probabilités et Statistique Mathématique*, EDITIONS MIR, Moscou 1982.
15. Teodorescu, N. — Olariu, V. *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, vol. I, II, III EDITURA TEHNICĂ 1978—1980.
16. Ventsel, H. *Théorie des Probabilités*, EDITIONS MIR, Moscou, 1973.
17. Walter, W. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, SPRINGER-VERLAG 1972
18. Zemanian, A. H. *Generalized Integral Transformation*, INTERSCIENCE PUBLISHERS 1974.

Cuprinsul

Capitolul I: DISTRIBUȚII PERIODICE

1. Funcții continue periodice. Funcții indefinit derivabile periodice 11
2. Convoluția funcțiilor periodice și proprietățile ei. Funcționale 20
3. Distribuții periodice 25
4. Proprietăți ale distribuțiilor periodice 26
   4.1 Operația de complex — conjugare 26
   4.2 Operația de simetrie 27
   4.3 Operația de translație 27
   4.4 Operația de derivare 28
   4.5 Derivate de ordin superior. 34
   5. Convoluția distribuțiilor periodice 40
6. Spațiul Hilbert L_2 al distribuțiilor periodice 44
7. Spații Sobolev 50
8. Distribuții periodice de mai multe variabile 51
9. Distribuțiile lui Schwartz și distribuțiile periodice 53

Capitolul II: INTRODUCERE ÎN TEORIA PROBABILITĂȚILOR

1. Elemente din teoria măsurii. 55
2. Măsură de probabilitate 57
3. Proprietăți ale măsurii de probabilitate. 57
   3.1. Cazul spațiilor simple 64
   3.2. Independența spațiilor de probabilitate 66
4. Frecvența evenimentelor aleatoare 67
5. Variabile aleatoare. Elemente aleatoare. 71
6. Funcție de repartiție. Densitate de probabilitate 77
7. Caracteristicile numerice ale variabilelor aleatoare 86
8. Funcții de variabile aleatoare 92
9. Dependența și independența variabilelor aleatoare 102
10. Variabile aleatoare discrete importante 103
   10.1. Distribuția binomială 106
   10.2. Distribuția hipergeometrică 107
   10.3. Distribuția Poisson 110
   10.4. Distribuția geometrică 111
   10.5. Distribuția binomială cu exponent negativ 112
11. Variabile aleatoare continue importante 112
   11.1. Generalități 115
   11.2. Legea normală unidimensională 501

Capitolul III: ANALIZA COMPLEXĂ

1. Şiruri, serii, continuitate, derivabilitate 119
2. Integrarea în $\mathbb{C}$ 131
3. Formula lui Pompeiu şi consecinţele ei 138
4. Zerouri. Singularităţi izolate. Funcţii meromorfe 147
5. Dezvoltări Laurent. Reziduuri 152
6. Teorema reziduurilor şi aplicaţii. 158
7. Teoria Dunford-Taylor pentru matricea $f(A)$. 164
8. Funcţia gamma în $\mathbb{C}$ 182

Capitolul IV: ORTOGONALIZARE. TRANSFORMĂRI INTEGRALE

1. Baze în spaţii Hilbert 187
2. Teorema de reprezentare Fréchet-Riesz 195
3. Dezvoltări ortogonale 200
4. Polinoame ortogonale 208
5. Ortogonalitatea funcţiilor proprii în spaţii Sobolev 220
6. Dezvoltările ortogonale şi teoria transformărilor integrale. Serii Fourier trigonometrice. 231
7. Transformări integrale clasice. 238
   7.1. Transformarea Fourier. 238
   7.2. Transformarea Laplace. 257
8. Funcţia caracteristică a variabilelor aleatoare 279

Capitolul V: ECUAŢII DIFERENŢIALE

1. Ecuaţii diferenţiale liniare 284
2. Sisteme diferenţiale de ordinul întîi 293
   2.1. Generalităţi 293
   2.2. Metoda funcţiilor şi valorilor proprii pentru integrarea sistemelor diferenţialeliniare 303
   2.3. Sisteme diferenţiale liniare în complex 308
3. Ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea 314
   3.1. Generalităţi 314
   3.2. Probleme la limită Sturm-Liouville. 320
   3.3. Metode speciale de integrare pentru ecuaţii diferenţiale 324
4. Funcţii Bessel. 326
   4.1. Funcţii Bessel de prima speţă 326
   4.2. Funcţii Bessel de speţa doua 332
   4.3. Funcţii Bessel modificate. Funcţii Hankel 335
   4.4. Reprezentări integrale pentru funcţii Bessel 337
   4.5. Transformarea Hankel şi proprietăţile ei 342
5. Elemente din teoria stabilităţii 348
   5.1. Generalităţi 348
   5.2. Stabilitatea soluţiei nule pentru sisteme diferenţiale liniare 350
   5.3. Stabilitatea punctelor de echilibru pentru sisteme diferenţiale neliniare 353
   5.4. Spaţiul fazelor. Orbite 360
   5.5. Reprezentarea orbitelor în $\mathbb{R}^2$. Clasificarea Poincaré 263
6. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi 370
   6.1. Integrale prime 370
   6.2. Ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordinul întîi 378
   6.3. Interpretări geometrice 383

Capitolul VI: ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

1. Introducere. 389
2. Utilizarea teoriei distribuţiilor periodice în integrarea ecuaţiilor cu derivate parţiale 391

2.1. Soluții distribuții periodice pentru ecuația căldurii 392
2.2. Soluții distribuții periodice pentru ecuația coardei vibrante 398
2.3. Soluții distribuții periodice pentru ecuația lui Schrödinger 399
2.4. Soluții distribuții periodice pentru ecuația Laplace în $\mathbb{R}^2$ 400
3. Clasificări și forme canonice pentru ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi
3.1. Cazul ecuațiilor cu derivate parțiale cu două variabile independente . . 407
3.2. Teorema Cauchy-Kavlevakaia și probleme corect puse în sensul lui Hadamard 416
3.3. Cazul ecuațiilor cu derivate parțiale cu n variabile independente . . 421
4. Ecuații de tip eliptic 424
4.1. Soluții fundamentale și formule de reprezentare 425
4.2. Principiul de maxim în teoria funcțiilor potențial 429
4.3. Funcția Green pentru problema Dirichlet interioară 432
4.4. Funcția Green pentru sferă și consecințele ei 437
4.5. Funcții potențial de tip special 443
4.6. Funcții și valori proprii pentru ecuația Laplace 454
4.7. Funcții speciale atașate ecuației Laplace în $\mathbb{R}$ 460
5. Ecuații de tip parabolic 467
5.1. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuația căldurii din $\mathbb{R}$ 467
5.2. Transformarea Weierstrass 477
6. Ecuații de tip hiperbolic 480
6.1. Rezolvarea probelmei Cauchy pentru ecuația coardei vibrante 480
6.2. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuația undelor sferice 486
6.3. Rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuația undelor cilindrice 491
6.4. Domeniul de dependență al soluțiilor ecuației undelor de datele inițiale. Principiul lui Huygens 493
6.5. Probleme mixte pentru ecuația undelor sferice 494
Bibliografie 499
Cuprinsul 501

Redactor: ION MIHAI
Tehnoredactor: MARILENA DAMASCHINOPOL

Coli de tipar: 31,50
Bun de tipar: 15.04.1986

c. 384 — I.P. Informația
Str. Brezoianu nr. 23—25
București